数学分析讲义

下　册

刘玉琏　傅沛仁　编

人民教育出版社

数学分析讲义

上　册

[illegible] 著

[illegible]

数学分析讲义

下　　册

刘玉琏　傅沛仁　编

人民教育出版社

本书第一版是吉林师大数学系数学分析教研室编《数学分析讲义》，是为高等函授院校数学系开设数学分析课编写的. 此次修订，编者署名改为刘玉琏、傅沛仁，参照高等师范院校《数学分析大纲》，对第一版内容作了小量增删；在体例、格式、叙述等方面变动较大；在每节后增配了练习题，较难题作了提示，书末附有计算题的答案.

本书阐述细致，范例较多，通俗易懂，便于自学。可作高等函授院校理科的教材，也可作高校理科和同等业余学校学生的参考书以及中学数学教师的自学用书.

为了更好地保证教学效果，未经我社和编者同意，请不要为本书习题配备题解公开出版.

第二版修订稿经四川大学秦卫平付教授审查.

数学分析讲义

下　册

刘玉琏　傅沛仁　编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 14.25　字数 340,000

1966 年 3 月第 1 版 1982 年 6 月第 2 版　1982 年10月第 1 次印刷

印数 00,001—22,500

书号 13012·0739　　定价 1.35 元

目　　录

第九章　级　　数

级数是研究函数的一个重要工具. 在抽象理论与应用学科中,级数都处于重要的地位. 这是因为,一方面能够借助级数表示很多有用的非初等函数,例如,有些微分方程的解不是初等函数,但其解可用级数表示出来,等等;另一方面又可将函数表为级数,从而能够借助于级数研究这些函数,例如,用幂级数研究初等超越函数与非初等函数,以及实数的近似计算,等等.

§9.1. 数值级数

一、收敛与发散概念

如果有数列$\{u_n\}$,即

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots. \tag{1}$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来,即

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots, \tag{2}$$

或简写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

称为**数值级数**,简称**级数**. $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$都称为级数(2)的**项**,$u_n$称为级数(2)的**第$n$项**或**通项**.

级数(2)是无限多个数的和. 我们只会计算有限个数的和,不仅不会计算无限多个数的和,甚至不知道何谓无限多个数的和.因此,无限多个数的和是一个未知的新概念. 这个新概念也不是孤立的,它与我们已知的有限个数的和联系着. 不难想到,由有限个

数的和转化到“无限多个数的和”可以借助极限这个工具来实现.

设级数(2)前 n 项的和是 S_n, 即

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

或
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

称为级数(2)的 n 项**部分和**. 显然, 对给定级数(2), 其任意 n 项部分和 S_n 都是已知的. 于是, 级数(2)对应着一个部分和数列 $\{S_n\}$, 即

$$\begin{aligned}&S_1=u_1,\\&S_2=u_1+u_2,\\&S_3=u_1+u_2+u_3,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

定义 如果级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 设

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

称级数(2)**收敛**, 并称 S 是级数(2)的**和**, 表为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots.$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ **发散**, 称级数(2)**发散**, 此时级数(2)没有和.

由此可知, 级数的收敛与发散是借助于级数的部分和数列的收敛与发散定义的. 于是, 讨论级数的各种性质都是借助于讨论该级数的部分和数列进行. 因此, 研究级数及其和数只不过是研究数列及其极限的一种新形式. 这个新形式并不是数列极限的简单重复, 它使我们在处理多种不同形式的极限问题中, 具有更大的灵活性.

例 1. 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

的敛散性①. 其中 $a \neq 0$, r 是公比.

解 1) 当 $|r| \neq 1$ 时, 已知几何级数的 n 项部分和 S_n 是

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

(i) 当 $|r| < 1$ 时, 极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} ② = \frac{a}{1 - r}.$$

因此, 当 $|r| < 1$ 时, 几何级数收敛, 其和是 $\frac{a}{1-r}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

(ii) 当 $|r| > 1$ 时, 极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \infty.$$

因此, 当 $|r| > 1$ 时, 几何级数发散.

2) 当 $|r| = 1$ 时, 有两种情况:

(i) 当 $r = 1$ 时, 几何级数是

$$a + a + a + \cdots + a + \cdots.$$

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{ 个}} = na.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty \quad (a \neq 0),$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

(ii) 当 $r = -1$ 时, 几何级数是

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots$$

---

① 敛散性是指收敛与发散. 下同.

② 见 §2.1 例 4, 当 $|r| < 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

$$S_n=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 是偶数,}\\ 1, & \text{当 } n \text{ 是奇数,}\end{cases}$$

即部分和数列$\{S_n\}$发散.

因此,当$|r|=1$时,几何级数发散.

综上所述,几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$,当$|r|<1$时收敛,其和是$\frac{a}{1-r}$;当$|r|\geqslant 1$时发散.

例 2. 证明,级数

$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$$

收敛,并求其和.

证明 通项u_n可改写为

$$u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right).$$

级数的n项部分和S_n是

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\\&=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}.$$

于是,级数收敛,其和是$\frac{1}{5}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}.$$

例 3. 证明，调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的.

证明 因为调和级数的每项都是正数，所以部分和数列$\{S_n\}$是严格增加的. 讨论子数列$\{S_{2^m}\}$:

$$S_2, S_4, S_8, \cdots, S_{2^m}, \cdots.$$

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2^1\text{ 项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{2^2\text{ 项}}+\cdots+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1}\text{ 项}},$$

其中每个括号内的和数都大于$\frac{1}{2}$. 事实上，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.$$

…………………………………………………………

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}>2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}.$$

于是

$$S_{2^m}>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{m\text{个}}=1+\frac{m}{2}.$$

$$\lim_{m\to\infty}S_{2^m}\geqslant\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{m}{2}\right)=+\infty,$$

即 $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2^m}=+\infty$. 对任意自然数 $n\geqslant 2$, 总存在唯一的自然数 m, 使 $2^{m-1}\leqslant n<2^m$, 且有

$$S_{2^{m-1}} \leqslant S_n < S_{2^m},$$

当 $n\to\infty$ 时, 有 $m\to\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, 即调和级数是发散的.

二、收敛级数的性质

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛与它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛是等价的. 因此, 数列 $\{S_n\}$ 收敛的必要充分条件也就是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要充分条件. 回忆数列 $\{S_n\}$ 的柯西收敛准则: “数列 $\{S_n\}$ 收敛的必要充分条件是, 对任意 $\varepsilon>0$, 总存在自然数 N, 当 $n>N$ 时, 对任意自然数 P, 有 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$.” 由于 S_n 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和, 而

$$S_{n+p}-S_n = u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}.$$

于是, 有下面级数的柯西收敛准则:

定理 1. (柯西收敛准则) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要充分条件是, 对任意 $\varepsilon>0$, 总存在自然数 N, 当 $n>N$ 时, 对任意自然数 p, 有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

根据定理 1 的必要性, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 特别是当 $p=1$ 时, 则对任意 $\varepsilon>0$, 总存在自然数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $|u_{n+1}|<\varepsilon$. 于是, 有

推论 1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

推论 1 的等价命题是, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例如, 级数

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\cdots+\frac{n}{100\cdot n+1}+\cdots.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{100\cdot n+1}=\frac{1}{100}\neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100\cdot n+1}$发散.

注 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 仅是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件而不是充分条件，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也可能发散. 例如，调和级数(见例 3)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$却是发散的.

定理 1 指出，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛等价于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的充分远 (即 $n>N$)的任意片段(即对任意 p, $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$) 的绝对值可以任意小. 由此可见，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关，而与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 任意指定的有限个项无关. 于是，又有

推论 2. 若去掉、增添或改变级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的有限项，则不改变级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性.

例如，去掉发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的前面 100 项，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100+n}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{100+n}+\cdots$$

也是发散的.

根据数列的极限运算定理可得到级数的运算定理:

定理 2. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,其和是 S,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n+\cdots$$

也收敛,其和是 cS,其中 c 是常数.

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$的 n 项部分和分别是 S_n 与 S'_n,有

$$\begin{aligned}S'_n&=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n\\&=c(u_1+u_2+\cdots+u_n)\\&=cS_n.\end{aligned}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,有

$$\lim_{n\to\infty}S'_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=cS,$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$收敛,其和是 cS. □

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cS=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)具有分配性.

定理 3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛,其和分别是 A 与 B,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

也收敛,其和是 $A\pm B$.

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$的 n 项部分和分别

是 A_n, B_n 与 C_n, 有

$$\begin{aligned}C_n&=\sum_{k=1}^{n}(u_k\pm v_k)\\&=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)\\&=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)\\&=A_n\pm B_n.\end{aligned}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$, 有

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}A_n\pm\lim_{n\to\infty}B_n=A\pm B,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 收敛, 其和是 $A\pm B$. □

三、同号级数

同号级数是指级数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

的每一项 u_n 的符号是非负或非正. 如果 $u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**正项级数**; 如果 $u_n\leqslant 0(n=1,2,\cdots)$, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**负项级数**.

将负项级数每项乘以 -1, 负项级数就变成了正项级数, 由定理 2 知, 负项级数与正项级数具有相同的敛散性. 于是, 讨论负项级数的敛散性可以归结为讨论正项级数的敛散性. 因此, 下面我们只讨论正项级数敛散性的判别方法.

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数, 则此级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的, 即

$$S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots.$$

根据 §2.2 公理, 我们有判别正项级数收敛性的定理:

定理 4. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要充分条件是，它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

例 4. 证明, 正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

是收敛的.

证明 已知 $\frac{1}{n!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\leqslant\frac{1}{\underbrace{1\cdot2\cdot2\cdots2}_{n-1\text{ 个}}}=\frac{1}{2^{n-1}}, n=2, 3, \cdots.$

于是, 对任意 n, 有

$$S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 是收敛的.

例 5. 讨论正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的敛散性，其中 p 是任意实数. 此级数称为**广义调和级数**，亦称 **p-级数**.

解 广义调和级数的敛散性与数 p 有关，下面分三种情况讨论:

1) 当 $p=1$ 时, 广义调和级数就是调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，已知调和级数发散, 即广义调和级数发散.

2) 当 $p<1$ 时, 对任意自然数 n, 总有

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}.$$

设广义调和级数与调和级数的 n 项部分和分别是 S'_n 与 S_n，有

$$S'_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = S_n.$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = +\infty$，即广义调和级数发散.

3) 当 $p>1$ 时，不难证明下列不等式

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right]^{①}.$$

有

$$\begin{aligned} S'_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} < 1 + \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{1^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{1^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1} \\ &= \frac{p}{p-1}, \end{aligned}$$

---

① 应用微分中值定理，函数 $f(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$ 在区间 $[n-1, n]$ 上 $(p>1, n>2)$，有

$$\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} = \frac{p-1}{(n-1+\theta)^p}, \quad 0<\theta<1$$

或

$$\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} > \frac{p-1}{n^p},$$

即

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right].$$