项目引领 任务驱动

示范性高等职业院校课改规划教材

高等数学及应用数学

主编 刘永渤 章锦红 卢秀惠

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

高等数学及应用数学

主编　刘永渤　章锦红　卢秀惠

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是作者根据我国高职教育（工科类）的要求和“国家骨干高职院校建设”的需求，在认真总结多年从事高职高专数学教改经验的基础上编写而成。本书内容包括高等数学及应用数学两部分：高等数学部分含一元函数微积分学及常微分方程初步，为各专业学生共同学习内容；应用数学部分含多元函数微积分、线性代数初步、空间解析几何初步、级数及拉普拉斯变换，可根据各专业需要分别选用。

本书适用于高职高专工科类各专业、不同生源的大学一年级学生选用，也可以作为相关专业学生、教师的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学及应用数学/刘永渤，章锦红，卢秀惠主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2012. 9
ISBN 978-7-5661-0455-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… ②章… ③卢… Ⅲ. ①高等数学-高等职业教育-教材②应用数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①O13②O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 230487 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 肇东市一兴印刷有限公司
开　　本 787mm×1 092mm 1/16
印　　张 13.75
字　　数 323 千字
版　　次 2012 年 9 月第 1 版
印　　次 2012 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 30.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

编 委 会

主　审： 曹成龙

主　编： 刘永渤　章锦红　卢秀惠

副主编： 杨松梅　王　蕾　张　雷　王　渝

编　者： 王晓辉　王殿元　王　蕾　王　渝　卢秀惠
刘永渤　张　雷　张丽艳　杨松梅　赵海东
章锦红

前　　言

本书是作者根据我国高职教育(工科类)的要求和“国家骨干高职院校建设”的需求，在认真总结多年从事高职高专数学教改经验的基础上编写而成。教材内容的选取充分体现了高职高专基础课教学中以“为专业课服务为宗旨”，以“应用为目的，必需为度”的原则，以“强化概念，注重应用”为依据，既考虑了人才培养的应用性，又能使学生具有一定的可持续发展性。本书吸取了众多同类教材的优点，同时具有以下特点：

(1)本书适用于高职高专工科类各专业、不同生源的大学一年级的学生。内容既充分体现了与高中数学教学的有机衔接，又兼顾了高职院校教学的实际需求，在不降低教材质量的前提下，尽可能保持该学科知识体系的完整性，本着“必需、够用”的原则，尽量降低难度、注重应用。

(2)教材编写本着突出重点、分散难点的原则，注意几何、物理解释，重点培养学生的空间想象能力、抽象概括能力和动手应用能力。

(3)为便于不同层次学生对知识的掌握，注意体现启发式教学和直观性教学的原则，习题的配备以知识结构为主线，以解题类型为框架，由浅入深、从易到难进行设置。

习题的编选，本着注重双基训练，不追求复杂的计算和变换过程的原则，适当增加了应用性题目。

(4)本教材教学计划学时为84学时，高等数学部分含一元函数微积分学及常微分方程初步，为各专业学生共同学习内容，应用数学部分含多元函数微积分、线性代数初步、空间解析几何初步、级数及拉普拉斯变换，可根据各专业需要分别进行选用。

(5)章节中打有“*”号的部分，表示可根据不同专业的要求作为选学内容。

本教材由编者所在学校数学课程组集体编写。全书章节结构体系由刘永渤副教授策划，曹成龙副教授主审；正文部分由刘永渤、章锦红、卢秀惠副教授担任主编并完成统稿、定稿。第一至第四章及第七章由刘永渤编写，第五章及第六章由章锦红编写，第八章及第九章由卢秀惠编写。杨松梅、王蕾、张雷、王渝、王晓辉、王殿元、赵海东、张丽艳担任了部分文字输入、资料搜集等工作并提出了宝贵意见。

本书得到了编者所在学校领导的全力支持，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有欠妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2012年7月

目　　录

第 1 章　一元函数微分学

在欧洲资本主义初期，由于手工业生产逐渐向机器生产过渡，因此提高了生产力，促进了科学技术的快速发展. 这个时期数学研究也取得了丰硕的成果，其中最突出的成就是微积分的产生. 微积分的产生是基于许多科学家长期研究的结果，最终由牛顿与莱布尼兹大体完成. 微分学是微积分的重要组成部分，导数与微分是微分学的两个基本概念，都是建立在函数基础之上的. 导数的概念在于刻画函数的瞬时变化率，即函数相对于自变量变化的快慢程度；微分的概念在于刻画函数的瞬时改变量，即函数相对于自变量改变量充分小时，其改变量的近似值. 导数与微分紧密相关，在科学技术和社会生产实践过程中有着广泛的应用. 本章将在高中数学的基础上，复习和加深理解函数导数与微分的概念、计算方法，为进一步掌握一元函数积分学奠定基础.

1.1　无穷小与重要极限

1.1.1　无穷大与无穷小的概念

1. 无穷大的定义

定义 1　如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则 $f(x)$ 称为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大量，简称无穷大.

注意　无穷大的两种含义：

无穷大指数的绝对值大到极致（$-\infty$，$+\infty$，∞）.

无穷大量指在自变量的某个趋近过程下，趋近于无穷大的函数.

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时为无穷大，根据极限的定义，它的极限是不存在的，但为了便于描述函数的这种变化趋势，我们也说"函数的极限是无穷大"，并记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (\text{或} x \to \infty)}} f(x) = \infty$$

或记作

$$x \to x_0 (\text{或 } x \to \infty),\ f(x) \to \infty$$

例如，函数 $y = \tan x$，当 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时，$|\tan x|$ 无限增大（图 1.1），所以，函数 $\tan x$ 是当 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$. 又如，因为 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+1}{x(x-1)} = \infty$，$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{x(x-1)} = \infty$，所以 $\frac{x+1}{x(x-1)}$ 是 $x \to 0$ 和 $x \to 1$ 时的无穷大.

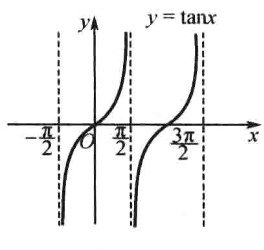

图 1.1

2. 无穷小的定义

定义 2　如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，则 $f(x)$ 称为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小量，简称无穷小.

例如,因为$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)=0$,所以函数$2x-1$是当$x\to\frac{1}{2}$时的无穷小.

又如,因为$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{x(x-1)}=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x(x-1)}=0$,所以$\frac{x+1}{x(x-1)}$是$x\to-1$和$x\to\infty$时的无穷小.

注意 (1)说函数$f(x)$是无穷大或无穷小,必须指明自变量的趋近过程.例如,函数$y=\frac{1}{x}$是当$x\to0$时的无穷大,$y=\frac{1}{x}$是当$x\to\infty$时的无穷小.当$x\to-1$时,$y=\frac{1}{x}$既不是无穷大,也不是无穷小.

(2)无穷大和无穷小是一个变量,不能与一个很大或很小的数(如$10^{1\,000}$,$10^{-10\,000}$)相混淆.

(3)常数中只有"0"可以看作是无穷小,因此,无穷大的倒数是无穷小,而无穷小的倒数未必是无穷大,当无穷小$f(x)\neq0$时,其倒数是无穷大.

3. 无穷小的性质

性质1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质2 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 常数与无穷小的乘积是无穷小.

例1 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解 因为$|\sin x|\leqslant1$,所以$\sin x$是有界函数,而当$x\to\infty$时,$\frac{1}{x}$是无穷小,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

以下极限为常见的有界函数与无穷小乘积的例子:

$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$;$\lim\limits_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}$;$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$;$\lim\limits_{x\to0}x\arctan\frac{1}{x}$;$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan x$.

例2 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

解 显然,当$n\to\infty$时,各项$\frac{1}{n^2},\frac{2}{n^2},\frac{3}{n^2},\cdots,\frac{n}{n^2}$的极限都为0,但却不是有限项的和,故不能用性质1.需将原式变形,得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}$$

4. 函数极限与无穷小的关系

函数、函数的极限与无穷小三者之间有如下重要关系.

定理1 具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和;反之,如果函数可以表示为一个常数与无穷小之和,那么该常数就是这个函数的极限.

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(或x\to\infty)}}f(x)=A$,则$f(x)=A+\alpha$;反之,若$f(x)=A+\alpha$,则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(或x\to\infty)}}f(x)=A$(其中$\alpha$是当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小).

1.1.2 无穷小阶的比较

1. 无穷小阶的比较的概念

两个无穷小的和、差、积仍是无穷小,而两个无穷小的商却不一定是无穷小. 例如,当 $x\to0$时,$x,2x,x^2$ 都是无穷小,而

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x}=0,\quad \lim_{x\to0}\frac{2x}{x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to0}\frac{2x}{x}=2$$

从以上各式可以看出各无穷小趋于 0 的快慢程度:$x^2\to0$ 比 $2x\to0$ 快些,$2x\to0$ 比 $x^2\to0$ 慢些,$2x$ 与 x 大致相同,从而引进无穷小的阶的概念.

定义 3 设 α 和 β 是在同一趋近过程下的两个无穷小,且 $\beta\neq0$,则:

(1) 如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$,则称 α 是比 β 较高阶的无穷小;

(2) 如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称 α 是比 β 较低阶的无穷小;

(3) 如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=C$($C$ 为非零常数),则称 α 与 β 是同阶无穷小;通常,如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$,则称 α 与 β 是等价无穷小,记作 $\alpha\sim\beta$.

由定义 3 可知,当 $x\to0$ 时,x^2 是比 $2x$ 较高阶的无穷小;$2x$ 是比 x^2 较低阶的无穷小;$2x$ 与 x 是同阶无穷小.

例 3 比较当 $x\to2$ 时,无穷小 $x-2$ 与 x^2-6x+8 阶的高低.

解 因为$\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-6x+8}=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{2}$,所以当 $x\to2$ 时,$x-2$ 与 x^2-6x+8 是同阶无穷小.

2. 等价无穷小代换

根据等价无穷小的定义可以证明,有下列常用等价无穷小关系:

当 $x\to0$ 时,$x\sim\sin x$,$x\sim\tan x$,$x\sim\arcsin x$,$x\sim\arctan x$,$x\sim e^x-1$,$x\sim\ln(x+1)$.

当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$\sqrt[n]{1+x}\sim1+\frac{x}{n}$,…

一般来说,当$f(x)\to0$ 时,$f(x)\sim\sin f(x)$,$f(x)\sim\tan f(x)$,…例如,当 $3x+5\to0$ 时,$3x+5\sim\sin(3x+5)$,…

等价无穷小在求两个无穷小之比的极限时有重要作用,对此有如下定理.

定理 2 设 $\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1$ 是在同一趋近过程下的无穷小,且 $\alpha\sim\alpha_1$,$\beta\sim\beta_1$,$\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$存在,则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\tan6x}$.

解 当 $x\to0$ 时,$\sin3x\sim3x$,$\tan6x\sim6x$,故$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\tan6x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{6x}=\frac{1}{2}$.

注 等价无穷小代换法只适用于整体结构为乘积或商的函数极限问题.

1.1.3 两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ **(图 1.2)**

结构:在 x 的某一趋近过程下,若 $f(x)\to 0$,则 $\lim\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin 2x}{2x}}=-\dfrac{1}{3}$

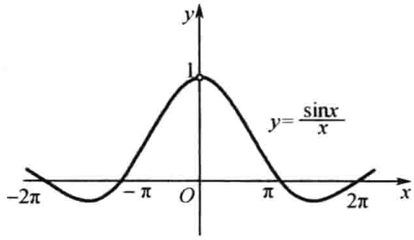

图 1.2

例 6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ **或** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

结构:在 x 的某一趋近过程下,若 $f(x)\to 0$,则 $\lim[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\right]^{-3}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\right]^{-3}=\mathrm{e}^{-3}$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\times 6}}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\times 4}}=\dfrac{\mathrm{e}^{6}}{\mathrm{e}^{4}}=\mathrm{e}^{2}$

习题 1.1

1. 利用等价无穷小代换求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-1}{\tan x}$　　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\mathrm{e}^{x}-1}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\arcsin x}$　　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\cos x-1}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{\sin(x^2-1)}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\tan x}$　(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{3}}{x^2}$

(10) $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{3}}\dfrac{\sin(3x+5)}{\ln(3x+6)}$

2. 利用两个重要极限求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{x}{\sin x}$　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\tan x}$　(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{3}}{x^2}$　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$　(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{5x}$　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x}$　(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\csc x}$　(11) $\lim\limits_{x\to +\infty}x[\ln(x+a)-\ln x]$

1.2　函数的导数运算

导数的概念及运算方法在高中的数学中已经进行了较充分的展示,故本节通过复习和适当拓展的方式,力求对导数运算方法实现更深入的理解,进一步熟练掌握导数的定义及表示方法、导数的实际意义、导数基本公式、导数运算法则见本书附录.

1.2.1　初等函数的导数

1. 基本初等函数

定义1　幂函数 $y=x^\alpha$(α 为实数)、指数函数 $y=a^x$、对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$、三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x,y=\arctan x,y=\text{arccot}\,x$ 称为**基本初等函数**.

2. 初等函数

定义2　由基本初等函数和常数经过有限次的复合或有限次的四则运算构成的可以用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

3. 分段函数

定义3　在自变量的不同取值范围内,对应法则用不同的式子表示的函数称为分段函数.

注意　分段函数的图像相邻两段之间未必是断开的;一般来说,分段函数不是初等函数. 然而,像绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

因为它可以用 $y=\sqrt{x^2}$ 表示,所以是初等函数.

4. 初等函数的特性

(1)使函数有意义的点为连续点,函数在它的每一个定义区间内处处连续.

(2)使函数无意义的两定义区间的交界点为间断点. 函数在间断点的左、右极限都存在

的点为第一类间断点,否则为第二类间断点.

5. 初等函数的导数

初等函数的导数运算,依据导数定义、导数基本公式、导数的四则运算法则、复合函数和反函数的求导法则及函数恒等则导数恒等的原则进行.

例 1 求函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$的导数.

解 $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

例 2 求函数 $y=x^x$ 的导数.

解 因为 $y=x^x=e^{x\ln x}$,所以 $y'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.

1.2.2 分段函数的导数

分段函数的导数分段求,交界点处的导数用导数定义求.

例 3 求函数 $y=\begin{cases}e^x-1 & x>0\\ 1 & x=0\\ \sin x & x<0\end{cases}$的导数.

解 当 $x>0$ 时,$y'=(e^x-1)'=e^x$;当 $x<0$ 时,$y'=(\sin x)'=\cos x$;在点 $x=0$ 处,极限 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x-1}{x-0}$与$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(e^x-1)-1}{x-0}$均为$\infty$,所以所求函数的导数为

$$y'=\begin{cases}e^x & x>0\\ \cos x & x<0\end{cases}$$

1.2.3 隐函数的导数

我们知道,函数 y 可以用自变量 x 的关系式 $y=f(x)$来表示,如 $y=2x+5$,$y=e^x+1$,$y=\sin(\omega x+\varphi)$,$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$等. 像这样,因变量 y 可由含有自变量 x 的数学式子直接表示出来的函数,称为显函数. 但有时,我们还会遇到另一种表达形式的函数,就是函数 y 是由一个含 x 和 y 的二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的.

例如,在方程 $x-y+3=0$ 中,给 x 一个确定值,相应的有唯一确定的 y 值与之对应,所以 y 是 x 的函数. 事实上,由该方程解出 y,便得到显函数 $y=x+3$.

又如,在方程 $x^2+y^2=R^2$(R 为常数)中,解出 y,得到 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. 当 $x\in[-R,R]$,$y\in[0,R]$时,函数确定为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$;当 $x\in[-R,R]$,$y\in[-R,0]$时,函数确定为 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$. 显然它们都是 x 的单值函数.

一般来说,如果变量 x,y 之间的函数关系由某一个方程 $F(x,y)=0$ 所确定,那么这种函数就称为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的**隐函数**.

有些隐函数很容易化为显函数,而有些则很困难,甚至不可能. 例如,方程 $xy=e^{x+y}$就无法把 y 表示成 x 的显函数. 在实际问题中,有时需要计算隐函数的导数. 因此,我们希望找到一种不需把隐函数化为显函数,而能够直接由方程 $F(x,y)=0$ 求出导数$\dfrac{dy}{dx}$的方法.

我们知道,把方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$代入原方程,有

$$F[x,f(x)]\equiv0$$

把这个恒等式的两端对 x 求导，所得的结果也必然相等. 但应注意的是，左端 $F[x,f(x)]$ 是将 $y=f(x)$ 代入 $F(x,y)$ 后所得的结果，所以当方程 $F(x,y)=0$ 的两端对 x 求导时，要记住 y 是 x 的函数，然后用复合函数求导法则去求导，这样，便可得到欲求的导数. 下面举例说明这种方法.

例 4　求由 $x^2+y^2=R^2$ 所确定的隐函数 y 的导数 y'_x.

解　将 $x^2+y^2=R^2$ 的两边同时对 x 求导，并注意到 y 是 x 的函数，y^2 是 x 的复合函数，按求导法则，得

$$(x^2)'_x+(y^2)'_x=(R^2)'_x$$

$$2x+2y\cdot y'_x=0$$

解出 y'_x，得 $y'_x=-\dfrac{x}{y}$. 在这个结果中，分母 y 仍是由方程 $x^2+y^2=R^2$ 所确定的 x 的函数.

例 5　求由方程 $xy=e^{x+y}$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解　将方程的两边同时对 x 求导，得

$$y+x\cdot\frac{dy}{dx}=e^{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

移项并整理，得

$$\frac{dy}{dx}(x-e^{x+y})=e^{x+y}-y$$

解出 $\dfrac{dy}{dx}$，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$$

例 6　求方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 所确定的隐函数在 $x=0$ 处的导数 $y'|_{x=0}$.

解　将方程的两边同时对 x 求导，得

$$(y^5)'+(2y)'-(x)'-(3x^7)'=(0)'$$

$$5y^4y'+2y'-1-21x^6=0$$

解出 y'，得

$$y'=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$$

因为当 $x=0$ 时，可以从原方程中求出 $y=0$，代入上式，得

$$y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$$

从上面的例子可以看出，求隐函数的导数时，可将方程两边同时对自变量求导，遇到 y 就看成 x 的函数，遇到 y 的函数就看成 x 的复合函数，然后从关系式中解出 y'_x 即可.

根据隐函数求导法，我们还可以得到一个简化求导运算的方法. 它适合于由几个因式通过乘、除、乘方、开方所构成的比较复杂的函数（包括幂指函数）的求导. 这个方法是先取对数，化乘、除为加、减，化乘方、开方为乘积，然后利用隐函数求导法求导，因此称为对数求导法.

例 7　求函数 $y=x^x$ 的导数.

解　对原等式两边取自然对数，得

$$\ln y=x\ln x$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y'_x=\ln x+1$$

所以

$$y'_x=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

注 幂指型函数求导时，可先用对数恒等式 $N=e^{\ln N}$ 将函数转化为复合函数后再求导，也可以用对数求导法.

例 8 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{(x-2)(x+3)}}$ 的导数.

解 对原等式两边取自然对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln x+\ln(x-1)-\ln(x-2)-\ln(x+3)]$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y'_x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}y'_x&=\frac{1}{2}y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-2)(x+3)}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+3}\right)\end{aligned}$$

1.2.4 由参数方程所确定的函数的导数

在实际问题中，函数 y 与自变量 x 的关系常常通过某一参数变量 t 表示出来，即

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}\tag{1.1}$$

称为函数的参数方程.

在实际问题中，有时需要计算由方程(1.1)所确定的函数 y 对 x 的导数. 但从(1.1)式中消去参数 t 有时会很困难，因此要寻找一种直接由方程(1.1)来计算导数的方法. 下面就来研究这个问题.

函数 $y=\psi(t)$ 可以看成参数方程确定的函数 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(t)$ 复合而成的函数，如果函数 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，根据复合函数的求导法则，有

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

上式就是由参数方程(1.1)所确定的函数 y 对 x 的导数公式.

例 9 已知椭圆的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$ $(a>0,b>0,t$ 为参数)，求椭圆在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 相应点处的切线方程.

解 当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，椭圆上的相应点 M_0 的坐标是

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\quad y_0=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$$

即 $M_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)$. 曲线在点 M_0 处的切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\left.\frac{b\cos t}{a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}$$

代入点斜式方程,即得椭圆在点 M_0 处的切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}b=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$$

即

$$bx+ay-\sqrt{2}ab=0$$

习题 1.2

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=\sqrt{x}-\arcsin x+2^x-\frac{1}{x}+\ln|x|+\sec x$

(2) $y=\arctan x+x^5+\csc x+\lg x+\cos\frac{\pi}{6}$

(3) $y=\mathrm{e}^3+5^x+\cot x+\log_2|x|+\frac{1}{x^2}$

(4) $y=\arccos x+\left(\frac{1}{3}\right)^x-\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln x+\tan x$

(5) $y=\mathrm{e}^x\arctan x$　(6) $y=3^x\cot x$　(7) $y=\frac{\arcsin x}{x}$　(8) $y=\sqrt{x}\sec x$

(9) $y=\frac{x+1}{x-2}$　(10) $y=\frac{\sin x}{x}$　(11) $y=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$　(12) $y=\frac{\ln|x|}{\sqrt{x}}$

2. 利用函数恒等则导数恒等的原则求下列函数的导数.

(1) $y=x^3\cdot\sqrt[5]{x}$　(2) $y=\frac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$　(3) $y=\frac{2x^2-3x+x^2\cdot\sqrt{x}-1}{x^2}$

(4) $y=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$　(5) $y=\frac{1}{1+\sqrt{x}}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}$　(6) $y=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

(7) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$　(8) $y=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$　(9) $y=\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x$

(10) $y=\ln\sqrt{1-x^2}$　(11) $y=\ln\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

3. 求下列初等函数的导数.

(1) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$　(2) $y=\cos^3x^2$　(3) $y=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

(4) $y=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$　(5) $y=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(\sqrt{x^2+a^2}+x)$

4. 求下列幂指型函数的导数.

(1) $y=\sqrt[x]{x}$　(2) $y=x^{-x}$　(3) $y=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$　(4) $y=x^{\sin x}$