大学数学题解系列丛书

【GAODENG SHUXUE JIETI ZHINAN】

高等数学解题指南

李健　袁昊◎著

SWJUP 西南交通大学出版社

大学数学题解系列丛书

高 等 数 学

解题指南

李 健 袁 昊 著

西南交通大学出版社

·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学解题指南 / 李健，袁昊著. —成都：西南交通大学出版社，2014.7

（大学数学题解系列丛书）

ISBN 978-7-5643-3201-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②袁… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 157565 号

大学数学题解系列丛书

高等数学解题指南

李 健 袁 昊 著

责任编辑	张宝华
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区交大路 146 号）
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网 址	http://www.xnjdcbs.com
印 刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印 张	18.25
字 数	454 千字
版 次	2014 年 7 月第 1 版
印 次	2014 年 7 月第 1 次
书 号	ISBN 978-7-5643-3201-3
定 价	40.00 元

前　言

高等数学是目前大学理、工、农、医、经管类各专业的重要基础课，是硕士研究生入学考试最重要的科目. 纵观十余年的考研试题和近几年全国大学生高等数学竞赛试题（非数学类），发现综合题解答越来越重要，不仅出现在解答题中，也出现在单选、填空题中. 因此，提高解综合题的能力成为考生亟待解决的问题. 那么，如何提高综合题解答的能力？首先，要夯实基础，把握各知识点. 其次，加强解综合题方面的训练，因为经过综合题解答系统训练的考生，无论是对基本知识的理解，还是对解题方法的掌握都较一般考生的水平高出许多. 为此我们推出《高等数学解题指南》供广大同学学习参考，以期提高这方面的能力. 全书共分 13 章，前 7 章为一元函数微积分，8 ~ 13 章为多元函数微积分.

本书经过了 5 年试用，每年都进行相应的完善修订，积累了作者长期教学生涯中的一些快捷解题方法，同时也注意吸收一些数学教学名师的教学优点，锁定大学数学竞赛要点. 通过本书的学习，可使学生在较短时间内，在解题能力方面有较大幅度的提高，让那些喜欢数学、有志学习的同学有一个好帮手.

本书在试用期间得到了多位老师的宝贵意见和热情指导，他们是郭正林、肖启良、何基好、吴智、刘铁中、卢大远、吴秀碧、廖敏、彭定涛，再次表示衷心感谢.

限于时间仓促，编者水平有限，本书中不妥之处在所难免，恳请老师和同学们批评指正！

祝愿使用此书的同学能够进一步理解大学数学的思想！

作者

2014 年 3 月

目　录

第一章　函数、极限、连续

求极限口诀: 遇到求极限问题, 要先定型$\left(\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0},0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},\infty^{0},0^{0}\right)$, 后定法（方法）, 求解过程中随时要“四化”: ① 遇到无穷小因子要用等价无穷小“简化”; ② 遇到非零的极限因子要“淡化”（极限不为零的因子随时求出来）; ③ 遇到无理式（带有根号的）的“0”因子或“$\infty-\infty$”因子要“有理化”; ④ 遇到幂指函数要“指数对数化”, 即$u^{v}=\mathrm{e}^{v\ln u}$.

第一节　概念、定理及公式

一、概　念

1. 邻　域

1) 一维情形

邻域: 以点x_0为中心的任何开区间称为点x_0的邻域, 记作$U(x_0)$.

δ邻域: 设δ是任一正数, 则开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$就是点x_0的一个邻域, 这个邻域称为点x_0的δ邻域, 记作$U(x_0,\delta)$, 即$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$. 点$x_0$称为该邻域的中心, δ称为该邻域的半径.

δ去心邻域: 去心邻域用$\overset{o}{U}(x_0,\delta)$表示, 即$\overset{o}{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$.

左、右δ邻域: $\{x\mid 0<x-x_0<\delta\}$称为点x_0的右δ邻域, 记作$U^{+}(x_0,\delta)$; $\{x\mid 0<x_0-x<\delta\}$称为点x_0的左δ邻域, 记作$U^{-}(x_0,\delta)$.

2) 二维情形

δ邻域: 设$P_0(x_0,y_0)$是xOy平面上的一个点, δ是任一正数. 与点$P_0(x_0,y_0)$距离小于δ的点$P(x,y)$的全体, 称为点P_0的δ邻域, 记作$U(P_0,\delta)$, 即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

δ去心邻域: 点P_0的去心δ邻域, 记作$\overset{o}{U}(P_0,\delta)$, 即$\overset{o}{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$. 如果不需要强调邻域的半径$\delta$, 则用$U(P_0)$表示点$P_0$的某个邻域, 点$P_0$的去心邻域记作$\overset{o}{U}(P_0)$.

δ邻域的几何意义: 在几何上, $U(P_0,\delta)$就是xOy平面上以点$P_0(x_0,y_0)$为中心、$\delta>0$为半径的圆内部的点$P(x,y)$的全体.

邻域与区间（区域）: 邻域当然属于区间（区域）的范畴, 但事实上, 邻域通常表示“一个局部位置”. 比如“点x_0的δ邻域”, 就可以称为“点x_0的附近”. 于是, 函数$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义也就是函数$f(x)$在点x_0的附近有定义, 这个“附近”到底有多近? 这难以说明也没有必要说明. 如“设函数$y=y(x)$由方程$y\ln y-x+y=0$确定, 试判断曲线$y=y(x)$在点$(1,1)$$\boxed{\text{附近}}$的凹凸性”, 这个“附近”就是指点$(1,1)$的邻域.

注: 关于邻域的这组概念非常重要, 因为它涉及"在一个局部位置"细致地研究问题.

2. 函　数

设 x 与 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 若对于每个值 $x \in D$, 变量 x 按照一定的法则有一个确定的值 y 与之对应, 则称 y 为 x 的函数, 记作 $y=f(x)$. 称 x 为自变量, y 为因变量. 称数集 D 为此函数的定义域, 定义域一般由实际背景中变量的实际意义或者函数对应法则的要求确定. 称相应的函数值的全体 $R=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 为函数的值域. 称 f 为对应法则. 这里需要注意函数定义中 y 的唯一性.

注: (1)单值函数与多值函数: 在函数的定义中, 对每个 $x \in D$, 对应的函数值 y 总是唯一的, 这样定义的函数称为单值函数. 如果给定一个对应法则, 按这个法则, 对每个 $x \in D$, 总有确定的 y 值与之对应, 但这个 y 不是唯一的, 于是, 这样的对应法则就不符合函数定义了, 我们称这种法则确定了一个多值函数. 请大家注意, 高等数学中所提到的函数是指单值函数, 也就是说当自变量 x 取一个值时, 这个对应法则 f 要保证因变量 y 有唯一的实数值与之对应, 否则就需要分成若干个单值函数.

(2) 几个重要函数:

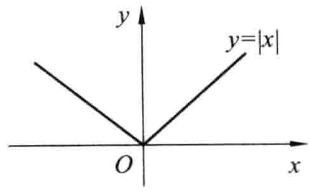
① 绝对值函数: $y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$.

其图形如下图(a)所示. 绝对值函数一般要转化为复合函数或分段函数来处理. 例如, 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是连续函数, 则

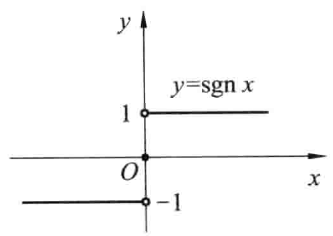
$$\min\{f(x), g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]=\begin{cases} g(x), f(x) \geqslant g(x) \\ f(x), f(x)<g(x) \end{cases},$$

$$\max\{f(x), g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]=\begin{cases} f(x), f(x) \geqslant g(x) \\ g(x), f(x)<g(x) \end{cases}.$$

它们都是连续函数.



(a)



(b)

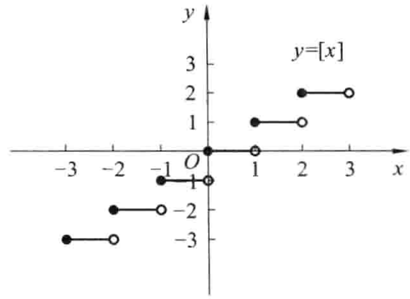
② 符号函数: $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$.

其图形如上图(b)所示. 对于任何实数 x, 有 $x=|x|\operatorname{sgn} x$.

③ 取整函数: $y=[x]$.

先给出定义: 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$. 如

$[0.99]=0,[\pi]=3,[-1]=-1,[-1.99]=-2$. 因此，取整函数 $y=[x]$ 的定义域为 **R**，值域 **R = Z**. 它的图形如右图所示，在 x 为整数值处图形发生跳跃.



取整函数 $y=[x]$ 有如下性质:

$[x]\leqslant x<[x]+1$; $[x+n]=[x]+n$;

$n[x]\leqslant nx$; $[x]+[y]\leqslant[x+y]$,

其中 n 为正整数.

④ 分段函数: 在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数.

这里需要强调一句，分段函数是用几个式子来表示的一个（注意不是几个）函数. 分段函数的典型形式如下:

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x),x>x_0\\ a,x=x_0\\ \varphi_2(x),x<x_0\end{cases} \quad 或 \quad f(x)=\begin{cases}\varphi(x),x\neq x_0\\ a,x=x_0\end{cases}.$$

⑤ 狄利克雷函数: $D(x)=\begin{cases}1,x为有理数\\ 0,x为无理数\end{cases}$.

狄利克雷函数是一有界的偶函数，任何有理数都是它的周期，但没有最小的周期.

⑥ 通常把幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 转化为复合函数 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 来处理.

⑦ 反函数: 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R. 如果对于每一个 $y\in R$，必存在 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$ 成立，则由此定义了一个新的函数 $x=\varphi(y)$. 这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，一般记作 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 R，值域为 D. 相对于反函数来说，原来的函数也称为直接函数. 这里有两点需要说明: 第一、直接函数的单值性无法保证其反函数的单值性. 比如，直接函数 $y=x^2$ 的反函数是多值函数 $x=\pm\sqrt{y}$; 但如果直接函数是单值单调函数，则能保证反函数的单值性. 比如，函数 $y=x^2,x\in[0,+\infty)$ 是单值单调函数，故它有反函数 $x=\sqrt{y}$. 第二、若把 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形画在同一坐标系中，则它们完全重合，只不过直接函数的定义域看 x 轴上的取值范围而反函数的定义域看 y 轴上的取值范围. 只有把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$ 后，它们的图形才关于 $y=x$ 对称. 事实上，这也是经常把 x 与 y 字母互换的原因. 比如说，设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2,x<-1\\ x^3,-1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16,x>2\end{cases}$，请写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式. 答案: $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}},x<-1\\ \sqrt[3]{x},-1\leqslant x\leqslant 8\\ \dfrac{x+16}{12},x>8\end{cases}$.

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g\subset D_f$，则由

下式确定的函数 $y=f[g(x)], x\in D_g$ 称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量. 函数 g 与函数 f 构成的复合函数，即按“先 g 后 f”的次序复合的函数，通常记为 $f\circ g$，即 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

g 与 f 构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是:函数 g 的值域 R_g 必须含在函数 f 的定义域 D_f 内，即 $R_g\subset D_f$；否则，不能构成复合函数. 对于复合函数，重要的是熟练掌握**分解与复合**技术.

例 1　设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x^2-1, & x\geqslant 1 \end{cases}$，$g(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ x^2-1, & x\geqslant 0 \end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

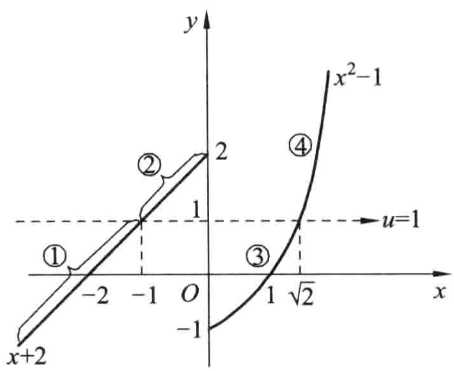
解　**解法** 1° 把函数 $g(x)$ 的表达式分别代入函数 $f(x)$ 的自变量中即可.

$$f[g(x)]=\begin{cases} e^{g(x)}, & g(x)<1 \\ [g(x)]^2-1, & g(x)\geqslant 1 \end{cases}=\begin{cases} e^{x+2}, & x+2<1且x<0 \\ e^{x^2-1}, & x^2-1<1且x\geqslant 0 \\ (x+2)^2-1, & x+2\geqslant 1且x<0 \\ (x^2-1)^2-1, & x^2-1\geqslant 1且x\geqslant 0 \end{cases}=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1 \\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2} \\ x^2+4x+3, & -1\leqslant x<0 \\ x^4-2x^2, & x\geqslant\sqrt{2} \end{cases}.$$

解法 2° (1)画出 $g(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ x^2-1, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 的图形，如图 1.4 所示.

(2)将 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x^2-1, & x\geqslant 1 \end{cases}$ 广义化为

$$f(u)=\begin{cases} e^u, & u<1 \\ u^2-1, & u\geqslant 1 \end{cases}.$$



用边界线 $u=1$ 将 $g(x)$ 的图形划分为四段: ①、②、③、④，如右图所示. 细致说来，对于①与③，即当 $x<-1$ 或者 $0\leqslant x<\sqrt{2}$ 时，$g(x)$ 处于边界线 $u=1$ 下方，$g(x)<1$，此时 $f(u)=e^u$；对于②与④，即当 $-1\leqslant x<0$ 或者 $x\geqslant\sqrt{2}$ 时，$g(x)$ 处于边界线 $u=1$ 上方，$g(x)\geqslant 1$，此时 $f(u)=u^2-1$.

(3) 一目了然，于是有:

$$f[g(x)]=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1\cdots ① \\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\cdots ③ \\ x^2+4x+3, & -1\leqslant x<0\cdots ② \\ x^4-2x^2, & x\geqslant\sqrt{2}\cdots ④ \end{cases}$$

类题　设 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\leqslant 0 \\ \ln x, & x>0 \end{cases}$，$g(x)=\begin{cases} 2e^x-1, & x\leqslant 0 \\ x^3-1, & x>0 \end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

解　首先，广义化，$f[g(x)]=\begin{cases} [g(x)]^2-1, & g(x)\leqslant 0 \\ \ln g(x), & g(x)>0 \end{cases}$，则由 $g(x)$ 的表达式可知:

(1) 当 $g(x)\leqslant 0$，即 $\{2e^x-1\leqslant 0\}\cap\{x\leqslant 0\}$ 或 $\{x^2-1\leqslant 0\}\cap\{x>0\}$，而

$$\{2e^x-1\leqslant 0\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{x\leqslant -\ln 2\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{x\leqslant -\ln 2\},$$

$$\{x^2-1\leqslant 0\}\cap\{x>0\}=\{x\leqslant 1\}\cap\{x>0\}=\{0<x\leqslant 1\}.$$

(2) 当 $g(x)>0$，即 $\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant 0\}$ 或 $\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}$，而

$$\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{x>-2\ln 2\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{-2\ln 2<x\leqslant 0\},$$

$$\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}=\{x>1\}\cap\{x>0\}=\{x>1\}.$$

综上，得 $f[g(x)]=\begin{cases}(2e^x-1)^2-1, x\leqslant -\ln 2\\ \ln(2e^x-1), -\ln 2<x\leqslant 0\\ (x^2-1)^2-1, 0<x\leqslant 1\\ \ln(x^2-1), x>1\end{cases}.$

4. 初等函数

由六类基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算得到的，并能用一个数学表达式表示的函数，称为**初等函数**.

注：六类基本初等函数为：

(1) 常数函数：$y=C$ (常数)；　　(2) 幂函数：$y=x^{\alpha}$；

(3) 指数函数：$y=a^x(a>0,a\neq 1)$；　　(4) 对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$；

(5) 三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, g=\csc x$；

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\mathrm{arccot} x$.

5. 数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 一个正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

注：① ε 为任意小的一个正数；② N 只要求存在，不要求最小且不唯一；③数学中任何“**定义**”的条件都是充要条件.

例 2 设对“$\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists$ 一个正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|<2\varepsilon$”是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的 (C).

(A) 充分条件　　(B) 必要而非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件.

解 如果把 ε 限制在 $(0,1)$ 区间时的 N 存在，此 N 也可以作为当 $\varepsilon\in[1,+\infty)$ 时的 N；“$\exists$ 一个正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时”等价于“$\exists$ 一个正整数 $M=N+1$，当 $n>M$ 时”；ε 是任意小的正数，那么 2ε 也是任意小的正数.

6. 函数的极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$ 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 一个 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 一个 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

理解：ε可以看成误差. 比如生产某个零件，零件的尺寸总有一定误差（为正数），误差是绝对的，人类追求“零”误差的脚步永不停止. 客户提出一个满足使用要求的误差(ε)，生产厂家就根据这一要求用符合要求的设备进行加工. 设备在某个范围内($0<|x-x_0|<\delta$)都满足精度要求，设备的精度越高越好（$\delta>0$越小越好），用这些机器生产出来的零件的实际尺寸($f(x)$)与理论尺寸(A)之间的误差是在客户可以接受的误差(ε)范围之内.

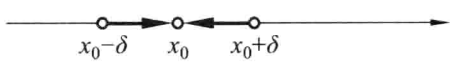
7. 函数的左、右极限

左极限：$f_-(x_0)=f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A \Leftrightarrow$ 设函数$f(x)$在点x_0的某一去心左邻域内有定义. 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$一个$\delta>0$，当$0<x_0-x<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$；

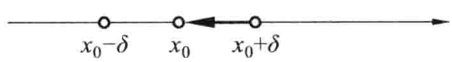
右极限：$f_+(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A \Leftrightarrow$ 设函数$f(x)$在点x_0的某一去心右邻域内有定义. 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$一个$\delta>0$，当$0<x-x_0<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

注意：关于“$x\to\cdot$”的表示法:

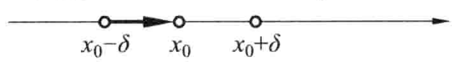
（1）$x\to x_0$（$x\neq x_0$，$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$）$\Leftrightarrow \exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时（即存在$\delta>0$，当$x$与$x_0$的距离小于$\delta$且$x$不等于$x_0$时）.



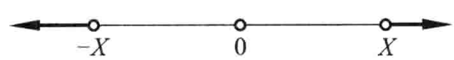
(2) $x\to x_0^+$（$x\neq x_0$，$(x_0,x_0+\delta)$）$\Leftrightarrow \exists\delta>0$，当$0<x-x_0<\delta$时.



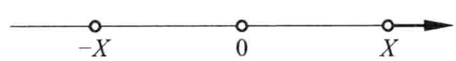
(3) $x\to x_0^-$（$x\neq x_0$，$(x_0-\delta,x_0)$）$\Leftrightarrow \exists\delta>0$，当$0<x_0-x<\delta$时



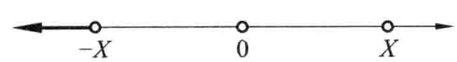
(4) $x\to\infty$ $((-\infty,-X)\cup(X,+\infty))$ $\Leftrightarrow \exists X>0$，当$|x|>X$时



(5) $x\to+\infty$ $((X,+\infty))$ $\Leftrightarrow \exists X>0$，当$x>X$时



(6) $x\to-\infty$ $((-\infty,-X))$ $\Leftrightarrow \exists X>0$，当$x<-X$时



8. 无穷小量（以 0 为极限的量）

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0 \Leftrightarrow$ 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$一个$X>0$，当$|x|>X$时，恒有$|f(x)|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0 \Leftrightarrow$ 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$一个$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)|<\varepsilon$.

9. 无穷大量（实际上是极限不存在的一种形式）

通俗说法：在自变量的变化过程中，变到某一时刻，函数的绝对值可以且**永远**大于某个给定的正数，这样的量称为无穷大量.

逻辑语言：(1)对$\forall M>0$，$\exists$一个$X>0$，当$|x|>X$时，恒有$|f(x)|>M$. 则称$x\to\infty$时，

$f(x)$为无穷大量，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$；

(2)对 $\forall M>0$，$\exists$一个 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$．则称 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为无穷大量，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$．

注意：无穷大量与无界变量的区别．例如：当 $x\to\infty$ 时，$y=x\sin x$ 为无界变量而非无穷大量．

事实上，不妨取 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当 $n\to\infty$，$y\to\infty$；再取 $x=n\pi$，当 $n\to\infty$，$y\to 0$．

例 3　设数列 x_n 的通项 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & \text{当}n\text{为奇数时}\\ \dfrac{1}{n}, & \text{当}n\text{为偶数时}\end{cases}$，则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是(D)．

(A) 无穷小量　　(B) 无穷大量　　(C) 有界变量　　(D) 无界变量

10．无穷小的比较

设当 $x\to x_0$（x_0 可以是 $\pm\infty$ 等)时，α 与 β 都是无穷小，并且 β 在 x_0 的一个充分小的近旁(除 x_0 之外)不取零值．

(1) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

(2) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小；

(3) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(c\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小，记为 $\alpha(x)=O(\beta(x))$；

(4) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

(5) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c(c\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小；

(6) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$不存在且 $\neq\infty$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 无法比较．如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$．

常见的等价无穷小：

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$（考试时一定要写 $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$ 推出此结论）．

注意：“等价”不是“相等”，A 与 B 等价可以理解为 A 等于 B 加上一个可以忽略不计但不为零的部分（高阶无穷小）．零是最高阶的无穷小．等价的实质就是把最低阶的无穷小项保留，而将高阶的项统统去掉．

利用等价无穷小代换时要注意以下事项:

(1) $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, $\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在且不等于$-1$，则$\alpha(x)+\beta(x)\sim\alpha_1(x)+\beta_1(x)$.

(2) 乘除运算用等价无穷小代换可简化运算. 例如，求$I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{(\arcsin x)^3}$.

错误解 $I\cancel{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$.

正确解 $I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{6}$.

(3) 用**泰勒公式**(**等价无穷小是泰勒公式的近似表示，泰勒公式是等价无穷小的精确表示**). 当$x\to 0$时,

① $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，其中$o(x^3)$是比$x^3$更高阶的无穷小;

② $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$，其中$o(x^4)$是比$x^4$更高阶的无穷小;

③ $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，其中$o(x^3)$是比$x^3$更高阶的无穷小;

④ $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$，其中$o(x^3)$是比$x^3$更高阶的无穷小;

⑤ $\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，其中$o(x^3)$是比$x^3$更高阶的无穷小;

⑥ $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，其中$o(x^3)$是比$x^3$更高阶的无穷小;

⑦ $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，其中$o(x^3)$是比$x^3$更高阶的无穷小;

⑧ $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+o(x^3)$，其中$o(x^3)$是比$x^3$更高阶的无穷小.

注: $o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$，$o(x^n)+o(x^{n+1})=o(x^n)$.

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}\xlongequal{\text{泰勒公式}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\left[x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\left[x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}\xlongequal[\text{因子选择最低阶}]{\text{等价无穷小替换}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{-\frac{x^3}{2}}=-1$.

设$f(x)$连续，$\varphi(x),\psi(x),g(x)$可导，则$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$，其中$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$为积分上限函数.

推论 1° $\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$;

2° $\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$;

$3°\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)g(x)\mathrm{d}t\right)'=\left(g(x)\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)'$

$$=g'(x)\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t+g(x)[f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)].$$

例 4　设 $f(x)=\int_0^{\sin x}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$, $g(x)=\tan x-\sin x$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(D).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶而非等价无穷小

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t}{\tan x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[1-\cos(\sin x)]\cos x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\sin x)^2\cdot\cos^3 x}{1-\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}=\frac{1}{3}.$$

类题　(1) 设 $f(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, g(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(D).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶而非等价无穷小

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}=\dfrac{5}{\mathrm{e}}.$

(2) 设 $f(x^2),g(x)$ 在点 $x=0$ 的邻域内连续且是等价无穷小，令 $F(x)=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$, $G(x)=\int_0^x tg(x-t)\,\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$F(x)$ 是 $G(x)$ 的(D).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶而非等价无穷小

解　$G(x)=\int_0^x tg(x-t)\,\mathrm{d}t\xlongequal{令u=x-t}\int_x^0(x-u)g(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x g(u)\mathrm{d}u-\int_0^x ug(u)\mathrm{d}u$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x g(u)\mathrm{d}u-\int_0^x ug(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)\cdot 2x}{\int_0^x g(u)\mathrm{d}u+\cancel{xg(x)}-\cancel{xg(x)}}=2\lim_{x\to 0}f(x^2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\int_0^x g(u)\mathrm{d}u}$$

$$=2\lim_{x\to 0}f(x^2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)}=2.$$（因为 $f(x^2),g(x)$ 当 $x\to 0$ 时等价）

例 5　把 $x\to 0^+$ 时的无穷小 $\alpha=\int_0^{\sin x}\cos t^2\mathrm{d}t$, $\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 进行排列，使后者是前者的高阶无穷小. 正确的排列是(B).

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β　　(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α

解　若涉及比较的无穷小量的个数 $n\geqslant 3$ 一般是这样处理：① 先写出各无穷小的等价无穷小，再进行比较；② 或者先求各无穷小的导数，再写出对应的等价无穷小，最后进行比较.

当 $x\to0^+$ 时，$\alpha'=\cos(\sin x)^2\cos x\to1$；$\beta'=2x\tan x\sim2x^2$，$\gamma'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}\sim\dfrac{1}{2}x$.

下面这样做对吗？ 因为 $\cos t^2\to1$，$\tan\sqrt{t}\sim\sqrt{t}$，$\sin t^3\sim t^3,(t\to0)$，所以

$$\alpha=\int_0^{\sin x}\cos t^2\mathrm{d}t\sim\int_0^{\sin x}1\,\mathrm{d}t\sim\sin x\sim x,$$

$$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t\sim\int_0^{x^2}\sqrt{t}\mathrm{d}t\sim\frac{2}{3}x^3,\quad \gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t\sim\int_0^{\sqrt{x}}t^3\mathrm{d}t\sim\frac{x^2}{4}.$$

类题　在下列选择中，当 $x\to0^+$ 时，是 $\sqrt{x}$ 的等价无穷小的是(B).

(A) $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

解　(A) $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$，(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$，(D) $1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\dfrac{1}{2}x$，通过比较知(A)，(C)，(D)都不是 $\sqrt{x}$ 的等价无穷小，故选(B).

例 6　设 $f(x)=2x-\sin x-\sin x\cos x$. 当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 x 的________阶无穷小.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}(n\text{为待定})=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin x-\frac{1}{2}\sin2x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{2-\cos x-\cos2x}{nx^{n-1}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+2\sin2x}{n(n-1)x^{n-2}}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x+4\cos2x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}=\frac{5}{6},$$

故 $n=3$ 时，$f(x)$ 为 x 的 3 阶无穷小.

例 7　设 $f(x)=1-\cos(\mathrm{e}^{x^2}-1)$ 是 2^mx^n 的等价无穷小（当 $x\to0$ 时），则 $m=$_____，$n=$_____.

解　当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x^2}-1)^2\sim\dfrac{1}{2}x^4$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2^mx^n}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{2^mx^n}=\lim_{x\to0}\frac{x^{4-n}}{2^{m+1}}=1\Rightarrow\begin{cases}m=-1\\n=4\end{cases}.$$

类题　① 当 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$_________；

解　当 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1\sim-\dfrac{1}{4}ax^2$，$x\sin x\sim x^2$，所以

$$1=\lim_{x\to0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\frac{a}{4}\Rightarrow a=-4.$$

② 试确定常数 a,b,c 的值，使得 $\ln(1+x)-\dfrac{ax}{1+bx}=cx-x^2+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

解　因 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，代入题设等式条件，得