21世纪高等教育计算机规划教材

COMPUTER

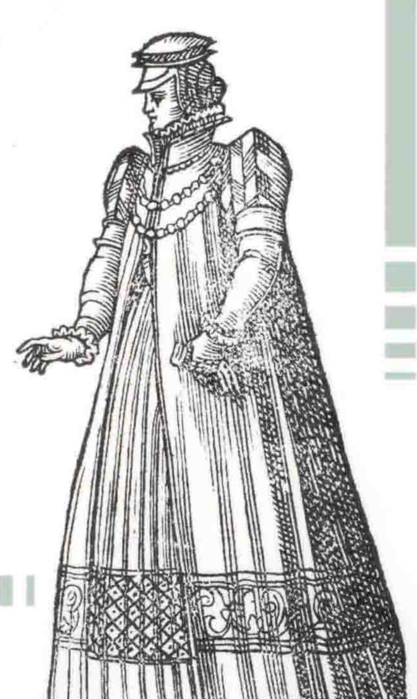
应用离散数学

（第2版）

Applied Discrete Mathematics

方景龙 周丽 编著

- 体系完整，以计算机科学与技术专业规范为指导
- 内容全面，涵盖常用离散结构的数学基础
- 例题、习题、上机作业体现实际背景下的具体应用



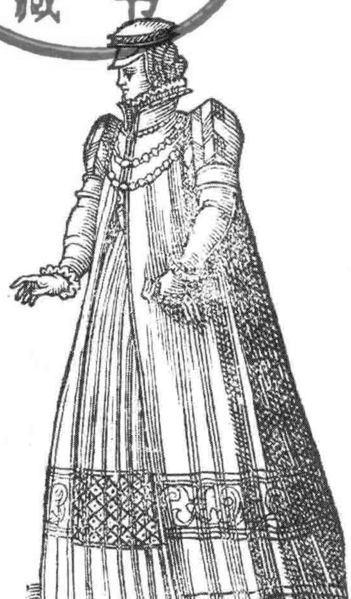
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

21世纪高等教育计算机规划教材

应用离散数学
（第2版）

Applied Discrete Mathematics

方景龙 周丽 编著



人民邮电出版社
北京

图书在版编目（C I P）数据

应用离散数学 / 方景龙，周丽编著. -- 2版. -- 北京 : 人民邮电出版社，2014.9
21世纪高等教育计算机规划教材
ISBN 978-7-115-35027-5

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①方… ②周… Ⅲ. ①离散数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第143668号

内 容 提 要

本书从应用的角度介绍离散数学。

全书共分 6 章，分别是命题逻辑、谓词逻辑、集合与关系、代数结构、图和有向图。全书体系严谨，叙述深入浅出，并配有大量与计算机科学相关的有实际背景的例题和习题。在每章最后增加了上机作业，可增强学生对课堂教学内容的理解和掌握，提高学生的学习兴趣和动手能力。这对于学生学习、理解和应用离散数学理论有很大的帮助。

本书可作为普通高等学校计算机科学与技术或相关专业的本科生教材。

◆ 编　　著　方景龙　周　丽
　责任编辑　邹文波
　责任印制　彭志环　杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京天宇星印刷厂印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：13.75　　　　2014 年 9 月第 2 版
　字数：328 千字　　　2014 年 9 月北京第 1 次印刷

定价：34.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

第 2 版前言

计算机的发明揭开了 20 世纪科技史上最辉煌的一页，特别是进入信息化社会的今天，计算机与人的生活已融为一体，密不可分。伴随着计算机科学技术的迅猛发展，作为计算机科学理论基础的离散数学正变得越来越重要。离散数学属于现代数学的范畴，是研究离散量的结构及相互关系的学科。它在可计算性与计算复杂性理论、算法与数据结构、程序设计语言、数值与符号计算、软件工程、数据库与信息系统、人工智能与机器人、网络系统、图形图像处理等各个领域，都有着广泛的应用。作为计算机科学与技术及其相关专业的一门重要的专业基础课，离散数学不仅能为学生的专业课学习及将来所从事的软、硬件开发和应用研究打下坚实的基础，而且能培养他们抽象思维和逻辑推理的能力。

本书第 1 版于 2005 年出版，第 2 版是在前版的基础上，广泛听取了读者和同行的建议，并根据作者的授课经验而修订的，主要是对篇幅进行了一定压缩，删除了一些既难懂又太理论的内容，适当增加了一些应用性强的内容，并订正了有关错误。

第 2 版共分 6 章，分别是：命题逻辑、谓词逻辑、集合与关系、代数结构、图和有向图。

第 1 章“命题逻辑”删除了第 1 版“字位运算与布尔检索”、“逻辑连接词完备集”的内容，把第 1 版中第 5 章的“逻辑门电路”放在了本章，并对部分内容进行了重新组织。

第 2 章“谓词逻辑”删除了第 1 版“前束范式”的内容，并对部分内容进行了重新组织。

第 3 章“集合与关系”删除了第 1 版“几个重要的函数”的内容，大幅压缩了“集合的等势与基数”的内容，并把第 1 版中第 5 章的“偏序关系与偏序集”放在了本章。

第 4 章“代数结构”对有关内容进行了重新编排，将第 1 版中第 5 章的“格”、“布尔代数”整合压缩成 1 节放在了本章。

第 5 章“图”删除了一部分理论性较强且叙述比较啰嗦的内容，增加了“广义优先搜索”和“深度优先搜索”的内容，并对部分内容和术语进行了重新组织和修订。

第 6 章“有向图”对个别术语进行了修订。

本书可作为普通高等学校计算机科学与技术或相关专业的本科生教材。根据我们的经验，使用本书可在 96 学时内完成全部教学任务。如果采用更少课时，则可适当略过有关章节的部分内容。

第 2 版由方景龙在第 1 版的基础上修订，周丽对全书进行了仔细阅读和校对。在编写过程中，参阅了大量的离散数学书籍和资料，在此向有关作者表示衷心的感谢。本书在写作过程中得到了浙江大学潘志庚教授、浙江工业大学梁荣华教授的热情鼓励和支持，同时得到了杭州电子科技大学万健教授、陈勤教授、吴铤教授、余日泰副教授等的许多帮助，他们提出了许多宝贵的意见和建议，在此，我们表示深深的谢意。

本书内容在杭州电子科技大学讲授多年，但是限于作者的水平，错误和疏漏在所难免。希望使用本书的读者不吝指正。作者联系 E-mail：fil@hdu.edu.cn。

方景龙

2014 年 5 月

目　　录

第1章　命 题 逻 辑

逻辑是探索、阐述和确立有效推理原则的学科，最早由古希腊学者亚里士多德（Aristotle）创建。数理逻辑是用数学的方法来研究逻辑问题。数理逻辑也叫符号逻辑，它已在逻辑电路、自动控制、程序设计、人工智能以及计算机科学的其他领域有着广泛的应用。

利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程，这种想法早在 17 世纪就有人提出过。莱布尼茨（G.W.Leibniz）就曾经设想过能不能创造一种“通用的科学语言”，可以把推理过程像数学一样利用公式来进行计算，从而得出正确的结论。限于当时的条件，他的想法并没有实现，但是他的思想却是现代数理逻辑部分内容的萌芽。从这个意义上讲，莱布尼茨可以说是数理逻辑的先驱。

1847 年，英国数学家布尔（G.Boole）发表了《逻辑的数学分析》，建立了“布尔代数”，并创造了一套符号系统，利用符号来表示逻辑中的各种概念。布尔还建立了一系列的运算法则，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础。19 世纪末 20 世纪初，数理逻辑有了比较大的发展，德国数学家弗雷格（G.Frege）和美国数学家皮尔斯（C.S.Peirce）都在其著作中引入了逻辑符号，从而逐步形成了现代数理逻辑的理论基础，使数理逻辑成为一门独立的学科。

数理逻辑这门学科建立以后，发展比较迅速，促进它发展的因素也是多方面的。比如，非欧几何的建立，促进人们去研究非欧几何和欧氏几何的无矛盾性，从而促进了数理逻辑的发展。

集合论的产生是近代数学发展的重大事件，但是在集合论的研究过程中，出现了一次危机（常被称作数学史上的第三次大危机）。这次危机是由于发现了集合论的悖论引起的。什么是悖论呢？悖论就是逻辑矛盾。

集合论本来是论证很严格的一个分支，被公认为是数学的基础。1903 年，英国唯心主义哲学家、逻辑学家、数学家罗素（B.A.W. Russell）对集合论提出了以他名字命名的“罗素悖论”，这个悖论的提出几乎动摇了整个数学基础。

罗素悖论中有许多例子，其中一个很通俗也很有名的例子就是“理发师悖论”：某乡村有一位理发师，有一天他宣布，给且仅给不自己刮胡子的人刮胡子。这样就产生了一个问题：理发师究竟给不给自己刮胡子？如果他给自己刮胡子，他就是自己刮胡子的人，按照他的原则，他又不该给自己刮胡子；如果他不给自己刮胡子，那么他就是不自己刮胡子的人，按照他的原则，他又应该给自己刮胡子。这就产生了矛盾。

悖论的提出，促使许多数学家去研究集合论的无矛盾性问题，从而产生了数理逻辑的一个重要分支——公理集合论。

非欧几何的产生和罗素悖论的发现，说明数学本身还存在许多问题。为了研究数学系统

的无矛盾性问题，需要以数学理论体系的概念、命题、证明等作为研究对象，研究数学系统的逻辑结构和证明的规律，这样又产生了数理逻辑的另一个分支——证明论。

数理逻辑新近还发展了许多新的分支，如递归论、模型论等。递归论主要研究可计算性理论，它与计算机的发展和应用有密切的关系。模型论主要研究形式系统和数学模型之间的关系。

数理逻辑近年来发展特别迅速，主要原因是这门学科对于数学其他分支，如集合论、数论、代数、拓扑学等的发展有重大的影响，特别是对新近形成的计算机科学的发展起了推动作用。反过来，其他学科的发展也推动了数理逻辑的发展。

正因为它是一门新近兴起而又发展很快的学科，所以它本身也存在许多问题有待于深入研究。现在许多数学家正针对数理逻辑本身的问题进行研究。

总之，这门学科的重要性已经十分明显，它已经引起了更多人的关心和重视。

本书介绍数理逻辑的两个最基本，也是最重要的部分：命题逻辑和谓词逻辑。本章首先介绍命题逻辑。

命题逻辑是研究命题如何通过一些逻辑连接词构成更复杂的命题以及逻辑推理的方法。命题是指具有具体意义且又能判断它是真还是假的句子。

如果我们把命题看做运算的对象，如同代数中的数字、字母或代数式，而把逻辑连接词看做运算符号，就像代数中的“加、减、乘、除”那样，那么，由简单命题组成复合命题的过程就可以当作逻辑运算的过程，也就是命题的演算。

逻辑运算同代数运算一样具有一定的性质，满足一定的运算规律。例如，满足交换律、结合律、分配律，同时还满足逻辑上的双重否定律、吸收律、零律、单位律、德·摩根律等。利用这些定律，我们可以进行逻辑推理，可以简化复合命题，可以推证两个命题是否等价等。这些推理和证明在计算机程序设计、程序正确性证明和程序设计语言以及人工智能等诸多方面都有应用。

本章主要介绍命题、逻辑连接词、命题公式、命题公式的范式、命题公式的等价演算、命题公式的推理演算等命题逻辑中的有关内容。

1.1 命题和逻辑连接词

1.1.1 命题

我们从逻辑的基本成分——命题开始介绍。所谓**命题**，是指能区分真假的陈述句，这与中学数学中的命题定义是一样的。

命题可分为真命题和假命题。如果命题所表述的内容与客观实际相符，则称该命题是**真命题**；否则称之为**假命题**。命题的这种真假属性称为命题的**真值**。当一个命题是真命题时，我们称它的真值为“真”，用 T 表示；当一个命题是假命题时，我们称它的真值为“假”，用 F 表示。

例 1.1 判断下面的语句是否是命题。

（1）6 是质数。

（2）5 是有理数。

（3）2105 年元旦是晴天。

（4）地球外存在智慧生物。

（5）现在是白天。

（6）王平是大学生。

（7）$12>8$。　　　　（8）$x>y$。

（9）请不要吸烟！　　　　（10）我正在说假话。

解　本例中，语句（1）、（2）、（3）、（4）、（5）、（6）、（7）是命题，语句（8）、（9）、（10）不是命题。

语句（1）是一个假命题，语句（2）是一个真命题。语句（3）和（4）也都是命题，虽然限于现在的认知，我们还不能确定语句（3）和（4）的真值，但它们的真值客观存在而且唯一。

命题的真假可能与该命题的范围、时间和空间有关。例如，语句（5），如果对生活在北京的人来说是真命题，则对居住在纽约的人来说便是假命题了。尽管如此，这里语句（5）的范围、时间、空间应是有所指的，是特定的，所以，它的真值也是客观存在而且唯一的，所以它也是命题。同样，对于语句（6），这里的人“王平”应是特指某个人，所以它们的真值也客观存在而且唯一，所以它们都是命题。

语句（8）不是命题，是因为根据变量 x 和 y 的不同取值情况它可真可假，即无唯一的真值，所以不是命题。而语句（9）不是命题，是因为该语句不是陈述句。

对于语句（10），若（10）的真值为“真”，即“我正在说假话”为真，则（10）这句话也应是假话，所以（10）的真值应为假，矛盾。反之，若（10）的真值为“假”，即“我正在说假话”为假，也就是“我正在说真话”，则（10）这句话也应是真话，所以（10）的真值应为“真”，也矛盾。于是（10）的真值无法确定，从而不是命题。

像例 1.1 中语句（10）这样由真推出假，又由假推出真的陈述句称为**悖论**。悖论的例子很多，例如“本命题是假的”这句话也是一个悖论，读者不妨试着分析一下。

命题还可以分为简单命题和复合命题。**简单命题**也称为**原子命题**，是一个不能再分解为更简单的陈述句的命题，如例 1.1 的命题（1）、（2）、（3）、（4）、（5）、（6）、（7）。简单命题可以用小写英文字母 p，q，r，…，p_1，p_2，p_3，…等表示，例如，用 p 表示命题“6 是质数”，用 q 表示命题“5 是有理数”等。但是在各种论述和推理中，所出现的命题多数不是简单命题，而是由原子命题和自然语言中的连接词构成的**复合命题**，如下面的例 1.2。

例 1.2　将下列复合命题写成原子命题与连接词的复合。

（1）6 是偶数是不对的。　　　　（2）6 是偶数且是 3 的倍数。

（3）6 是偶数或是 3 的倍数。　　　　（4）如果 6 是偶数，那么 3 是奇数。

（5）6 是偶数当且仅当 3 是奇数。

解　本例中 5 条语句都是复合命题，它们都是由原子命题通过自然语言中的连接词复合而成的。如果我们将涉及的原子命题符号化如下。

$$p：6 是偶数；q：6 是 3 的倍数；r：3 是奇数。$$

则 5 个复合命题可以表示为：

$$非p；\ p且q；\ p或q；如果p，那么r；\ p当且仅当r。$$

例 1.2 中出现的“非”、“且”、“或”、“如果……，那么……”、“当且仅当”等是自然语言中常用的连接词，但自然语言中出现的连接词可能具有二义性。为了排除二义性，在数理逻辑中必须给出连接词的严格定义，并且用特定的符号表示。

1.1.2 逻辑连接词与命题符号化

本小节我们首先给出常用的 5 种逻辑连接词：否定词、合取词、析取词、蕴涵词和等值词。类似于实数的加、减、乘、除等运算，这 5 种逻辑连接词也可称为命题的 5 种运算。

一个复合命题，不论其构成多么复杂，一般都可以分析出构成该命题的原子命题，将这些原子命题以及它们之间的逻辑联系用恰当的小写英文字母符号、逻辑连接词符号和括号表示出来，形成符号串，这个过程称为**命题符号化**。一个命题可以有多个不同的符号化结果，但它们是等价的。

定义 1.1 设 p 是一个命题，用 $\neg p$ 表示这样一个复合命题：当 p 为真时它为假，当 p 为假是它为真，如表 1.1 所示。$\neg$ 称为**否定词**，$\neg p$ 称为 p 的否定式，读作“非 p”。

定义 1.2 设 p 和 q 是命题，用 $p\wedge q$ 表示这样一个复合命题：当 p 和 q 均为真时它为真，否则它为假，如表 1.2 所示。$\wedge$ 称为**合取词**，$p\wedge q$ 称为 p 和 q 的合取式，读作“p 与 q”。

除“p 与 q”外，自然语言中的“既 p，又 q”，“不但 p，而且 q”，“虽然 p，但是 q”，“一面 p，一面 q”等复合命题都可以用逻辑连接词“$p\wedge q$”表示。

定义 1.3 设 p 和 q 是命题，用 $p\vee q$ 表示这样一个复合命题：当 p 和 q 均为假时它为假，否则它为真，如表 1.3 所示。$\vee$ 称为**析取词**，$p\vee q$ 称为 p 和 q 的析取式，读作“p 或 q”。

表1.1　$\neg p$的真值

p	$\neg p$
F	T
T	F

表1.2　$p\wedge q$的真值

p	q	$p\wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

表1.3　$p\vee q$的真值

p	q	$p\vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

否定词 $\neg$、析取词 $\vee$、合取词 $\wedge$ 又常被称为**逻辑非（逻辑否）**、**逻辑加（逻辑或）**和**逻辑乘（逻辑与）**，是 3 个最基本的逻辑运算。

定义 1.4 设 p 和 q 是命题，用 $p\to q$ 表示这样一个复合命题：当 p 为真而 q 为假时它为假，否则它为真，如表 1.4 所示。$\to$ 称为**蕴涵词**，$p\to q$ 称为 p 与 q 的蕴涵式，读作“若 p 则 q”，并称 p 为蕴涵式的前件，q 为蕴涵式的后件。

表1.4　$p\to q$的真值

p	q	$p\to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

在使用蕴涵词时，要注意以下几点：

（1）$p\to q$ 的逻辑关系是，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件。即当 $p\to q$ 为真时，若 p 取 T，则 q 一定取 T；若 q 取 F，则 p 一定取 F。

（2）从表 1.4 可以看出，只要前件 p 取 F，则不管后件 q 是取 T 还是取 F，蕴涵式 $p\to q$ 都取 T。这就像合同中的职责或义务，如果规定的条件不成立，也就无需承担职责或义务。例如，下面例 1.3 的语句（1）。

（3）在自然语言中，蕴涵语句通常要求前件 p 和后件 q 之间有着语意上的联系。在数理逻辑中，我们关心的只是原子命题和复合命题之间的真值关系，因此并不要求它们在语意上有必然联系，例如下面例 1.3 的语句（2）和（3）。其他逻辑连接词的使用也是如此，我们就不一一说明了。

（4）除“若 p 则 q ”外，自然语言中的“只要 p 成立，就有 q 成立”，“因为 p 成立，所以 q 成立”，“只有 q 成立，才有 p 成立”，“ p 成立仅当 q 成立”，“除非 q 成立，否则 p 不成立”等复合命题都可以符号化为“ $p \to q$ ”。

例 1.3　将下列复合命题符号化。

（1）如果你的月工资收入超过 3500 元，那你必须交纳个人所得税。

（2）如果今天不是星期天，那么 $2+3=5$ 。

（3）只有你离散数学及格，你才能毕业。

解　在解题时，首先将涉及的原子命题符号化，然后再符号化该复合命题。

（1）设 p：你的月工资收入超过 3500 元；q：你必须交纳个人所得税。则命题（1）符号化为：

$$p \to q$$

（2）设 p：今天是星期天；q：$2+3=5$。则命题（2）符号化为：

$$\neg p \to q$$

（3）设 p：离散数学及格；q：你能够毕业。这句话的意思可以翻译成“如果你能够毕业，你的离散数学必定是及格了”，因此命题（3）符号化为：

$$q \to p$$

另外，“只要你能够毕业，那么你的离散数学就必定及格了”的符号化也是 $q \to p$；“除非你离散数学及格，否则你不能毕业” 的符号化也是 $q \to p$ 。

例 1.4　中学数学中讨论的四种命题：原命题、逆命题、否命题和逆否命题，都是针对蕴含式这种复合命题的。将原命题用 $p \to q$ 表示，则 $q \to p$ 、$\neg p \to \neg q$ 和 $\neg q \to \neg p$ 就是相应的逆命题、否命题和逆否命题。例如，用 p 表示“今天是星期四”，q 表示“今天有英语考试”，则：

原命题 $p \to q$：如果今天是星期四，那么我今天有英语考试。

逆命题 $q \to p$：如果我今天有英语考试，那么今天是星期四。

否命题 $\neg p \to \neg q$：如果今天不是星期四，那么我今天没有英语考试。

逆否命题 $\neg q \to \neg p$：如果我今天没有英语考试，那么今天不是星期四。

例 1.5　大部分程序设计语言中都有 **if** p **then** S 这样的语句，其中 p 是命题，而 S 是一个程序段（待执行的一条或几条语句）。当程序在运行中遇到这样一条语句时，如果 p 为真就执行 S，如果 p 为假就不执行 S 。因此程序设计语言中使用的 if-then（如果—那么）结构与蕴涵逻辑连接词是不同的。例如，若原来 $x=0$，则执行语句

$$\textbf{if}\ \ 2+2=4\ \ \textbf{then}\ \ x:=x+1$$

后 x 的值是 $0+1=1$。这是因为 $2+2=4$ 为真，所以赋值语句 $x:=x+1$ 被执行的缘故。

定义 1.5　设 p 和 q 是命题，用 $p \leftrightarrow q$ 表示这样一个复合命题：当 p 与 q 同时为真或同时为假时它为真，否则它为假，如表 1.5 所示。$\leftrightarrow$ 称为**等值词**，$p \leftrightarrow q$ 称为 p 与 q 的等值式，读作“ p 当且仅当 q ”。

表1.5　$p \leftrightarrow q$的真值

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

$p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系是 p 和 q 互为充分必要条件，即当 $p \leftrightarrow q$ 为真时，p 取 T 时 q 必须取 T，而

q 取 T 时 p 也必须取 T，因此 $p \leftrightarrow q$ 与 $(p \to q) \wedge (q \to p)$ 等价。

要注意，“p 成立仅当 q 成立”表示“仅当 q 成立时 p 才可能成立，但 q 成立时 p 并不一定成立”，与“p 成立当且仅当 q 成立”意思不一样，前者的符号化结果是“$p \to q$”，后者的符号化结果是“$p \leftrightarrow q$”。

前面给出了几个命题符号化的例子，事实上，命题符号化在数理逻辑中有着重要的作用，后面讨论的本章大部分内容都是在命题符号化后展开的。因为一切人类语言都可能有二义性，所以只有把语句表达的命题都进行符号化才可以消除歧义（当然，做这种翻译需要在语句含义的基础上做些合理假设以消除歧义，否则命题符号化过程本身也会有歧义）。一旦完成了命题符号化，我们就可以分析它们以决定它们的真值，并且还可以对它们进行处理，用推理规则对它们做推理分析。

命题符号化时可能同时使用多种逻辑连接词，因此，命题符号化涉及逻辑运算的先后次序问题。对前面讲过的 5 种逻辑连接词，规定运算的先后次序为（按自左向右）：

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \to,\ \leftrightarrow$$

由于基于运算的先后次序来理解逻辑表达式往往费时费力，而且容易出错，因而也可采用添加括号的办法，按先括号内后括号外的规则进行命题运算。**我们推荐采用添加括号的方法来处理逻辑运算的先后次序。**

例 1.6 将下列复合命题符号化。

（1）除非你已满 16 周岁，否则只要你身高不足 4 英尺就不能乘公园滑行铁道。

（2）只有你主修计算机科学或不是新生，你才可以从校园网访问因特网。

（3）不管你或他努力与否，比赛定会取胜。

（4）选修过“高等数学”或“微积分”的学生可以选修本课。

（5）学过“离散数学”或“数据结构”，但不是两者都学过的学生，必须再选学“计算机算法”这门课。

解 在解题时，首先将涉及的原子命题符号化，然后再符号化该复合命题。

（1）此句话的意思是“如果你不满 16 周岁且身高不足 4 英尺，你就不能乘公园滑行铁道”，或者表达成“如果你能乘公园滑行铁道，则你已满 16 周岁或身高达到 4 英尺”。因此设 p：你已满 16 周岁；q：你身高不足 4 英尺；r：你能乘公园滑行铁道，则命题（1）的符号化结果是：

$$(\neg p \wedge q) \to \neg r \text{ 或 } r \to p \vee \neg q$$

此命题表达的是不能乘坐公园滑行铁道的一个充分条件，即能乘坐的一些必要条件，但没有给出能够乘坐的任何充分条件，所以不能符号化为 $p \vee \neg q \to r$。例如，一个人满了 16 周岁或身高达到 4 英尺但有心脏病，照样不能乘坐。

（2）此句话可以翻译成“如果你不主修计算机又是新生，那么就不能从校园网访问因特网”，或则“如果你能够从校园网访问，那你就主修了计算机或不是新生”，因此设 p：你主修计算机科学；q：你是新生；r：你可以从校园网访问因特网。类似于命题（1），命题（2）的符号化结果是：

$$(\neg p \wedge q) \to \neg r \text{ 或 } r \to (p \vee \neg q)$$

注意，如果符号化为 $(p \vee \neg q) \to r$ 就不对了，因为你主修计算机科学并不一定非要你从校园网访问英特网；同样，你不是新生也并不一定非要从校园网访问因特网。

（3）设 p：你努力；q：他努力；r：比赛取胜，则命题（3）的符号化结果是：

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \to r$$

（4）此句话的意思是“如果你没有选修过‘高等数学’或‘微积分’这两门课中的任何一门，你就不能选修本课”，或者表达成“如果你选修本课，则你必须选修过‘高等数学’或‘微积分’两门课中的至少一门”。因此，设 p：选修过“高等数学”；q：选修过“微积分”；r：选修本课，则命题（4）的符号化结果是：

$$(\neg p \wedge \neg q) \to \neg r \text{ 或 } r \to p \vee q$$

注意，如果符号化为 $(p \vee q) \to r$ 就不对了，原因与题（2）的分析一样。

（5）设 p：学过“离散数学”；q：学过“数据结构”；r：选学“计算机算法”，则命题（5）的符号化结果是：

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \to r$$

从例 1.6 可以看出，命题的符号化并不是唯一的。

习题 1.1

1．下列哪些语句是命题？在是命题的语句中，哪些是真命题？哪些是假命题？哪些命题的真值现在还不知道？

（1）中国有四大发明。

（2）你喜欢计算机吗？

（3）地球上海洋的面积比陆地的面积大。

（4）请回答这个问题！

（5）$2+3=6$。

（6）$x+7<10$。

（7）圆的面积等于半径的平方乘以圆周率。

（8）只有 6 是偶数，3 才能是 2 的倍数。

（9）若 $x=y$，则 $x+z=y+z$。

（10）外星人是不存在的。

（11）2020 年元旦下大雪。

（12）如果 $1+1=3$，则血就不是红的。

2．令原子命题 p：气温在零度以下，q：正在下雪。用 p、q 和逻辑连接词符号化下列复合命题。

（1）气温在零度以下且正在下雪。

（2）气温在零度以下，但不在下雪。

（3）气温不在零度以下，也不在下雪。

（4）也许在下雪，也许气温在零度以下，也许既下雪气温又在零度以下。

（5）若气温在零度以下，那一定在下雪。

（6）也许气温在零度以下，也许在下雪，但如果气温在零度以上就不下雪。

（7）气温在零度以下是下雪的充分必要条件。

3．令原子命题 p：你的车速超过每小时 120 公里，q：你接到一张超速罚款单。用 p、q 和逻辑连接词符号化下列复合命题。

（1）你的车速没有超过每小时 120 公里。

（2）你的车速超过了每小时 120 公里，但没接到超速罚款单。

（3）你的车速若超过了每小时 120 公里，将接到一张超速罚款单。

（4）你的车速不超过每小时 120 公里，就不会接到超速罚款单。

（5）你接到一张超速罚款单，但你的车速没超过每小时 120 公里。

（6）只要你接到一张超速罚款单，你的车速就肯定超过了每小时 120 公里。

4. 判断下列各蕴涵式是真是假。

（1）若 $1+1=2$，则 $2+2=4$。 （2）若 $1+1=2$，则 $2+2=5$。

（3）若 $1+1=3$，则 $2+2=4$。 （4）若 $1+1=3$，则 $2+2=5$。

（5）若猪会飞，那么 $2+2=4$。 （6）若猪会飞，那么 $2+2=5$。

（7）若 $1+1=3$，猪就会飞。 （8）若 $1+1=2$，猪就会飞。

5. 给出下列各蕴涵形式命题的逆命题、否命题和逆否命题。

（1）如果今天下雪，我明天就去滑雪。

（2）只要有测验，我就来上课。

（3）只有当正整数没有 1 和它自己以外的因数时，它才是质数。

6. 你会用什么样的布尔检索寻找关于新泽西州海滩的网页？如果你想找关于泽西岛（在英吉利海峡）海滩的网页呢？

7. 你会用什么样的布尔检索寻找关于徒步旅行西弗吉尼亚的网页？如果你想找关于徒步旅行弗吉尼亚的网页，而不是西弗吉尼亚呢？

1.2 命题公式及其真值表

1.2.1 命题公式

就像数学中有变量的概念一样，数理逻辑中也有**命题变元**的概念，它是用来表示任意命题的标识符，用小写英文字母表示，而 1.1 节的真值 T（或 1）和 F（或 0）又通常称为**命题常元**。

将命题变元用逻辑连接词按一定的逻辑关系连接起来就得到命题公式，下面给出**命题公式**的严格定义，它采用的是一种归纳定义方式，本书后面还将出现多次这种定义方式。

定义 1.6 命题公式是按下列规则定义字符串的。

（1）命题常元 0 和 1 是命题公式。

（2）命题变元是命题公式。

（3）若 A 和 B 都是命题公式，则 $\neg A$，$\neg B$，$A\wedge B$，$A\vee B$，$A\to B$，$A\leftrightarrow B$ 是命题公式。

（4）只有有限次使用（1）、（2）和（3）所得到的符号串才是命题公式。

在定义 1.6 中引进了大写字母 A，B 等，用它们表示任意的命题公式。

例如，$\neg p\wedge q$，$(\neg p\to q)\vee 1$ 都是命题公式，而 $\wedge q$，$p\wedge\to q$ 不是命题公式。

在命题公式中，由于有命题变元的出现，因而真值是不确定的，所以命题公式本身不是命题。只有对命题公式中出现的每个命题变元都解释成具体的命题，才能将命题公式“翻译”成一个具体的复合命题，这实际上相当于通过对公式中的每一变元都确定一个真值来确定命题公式的真值。

1.2.2 真值表

定义 1.7 设 A 是以 p_1，p_2，p_3，…，p_n 为变元的命题公式，给 p_1，p_2，p_3，…，p_n 各指