高等院校『十二五』规划教材

高等数学

李水育 主编
张国勇 主审

Gaodeng Shuxue

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

高等院校“十二五”规划教材

高等数学

李水育 主编
张国勇 主审

Gaodeng Shuxue

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 李水育主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2013.10
高等院校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-115-32973-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第215669号

内 容 提 要

“高等数学”是高等职业院校的工科类和经管类等各专业的一门必修基础课. 本书结合了编者的多年教学实践和探索，在进行“福建省省级精品课程（高职类高等数学）项目”建设的同时，完成了本教材的编写.

本书主要介绍了函数，极限和连续，导数与微分，中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，多元函数微分学，二重积分和数学实验（Matlab 版）等内容.

本书可作为高职高专和应用型本科院校相关专业的“高等数学”教材使用.

◆ 主　　编　李水育
主　　审　张国勇
责任编辑　吴宏伟
执行编辑　喻智文
责任印制　张佳莹　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京昌平百善印刷厂印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：16.75　　2013 年 10 月第 1 版
字数：382 千字　　2013 年 10 月北京第 1 次印刷

定价：35.00 元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

编委会

主　编　李水育

参　编　庄金洪　吴珍莺　黄新丽　杨静俐

　　　　万丙晟　林伟奇　林志强　黄　琴

主　审　张国勇

前言

Preface

为适应当前高等职业院校和应用型本科的办学发展形势、生源特点和满足“高等数学”课程改革的需求，作者把工科类的“高等数学”课程、经管类的“微积分”和“数学实验(Matlab)”课程的内容有机地整编成一本书。本着“淡化理论，够用为准”的原则，力求做到在数学思想和教学内容上有所创新和突破。本教材内容扼要、通俗、易懂，便于组织教学。同时还把重点放在培养学生学习数学的兴趣和动手能力上。另外，为兼顾学生后续专业课程对数学知识的需求，书中有打“ * ”号部分，有的可作为不同门类专业的选修内容，有的可作为学生自我提高内容。

该教材的特色：

(1)在数学思想方面进行创新和突破。在微积分的基本理论中，提出了“变量形式不变性”的思想。在两个重要极限中，解决了如何由“繁”到“简”的计算方法问题；在不定积分的换元法中，也解决了如何将积分变量和中间变量形式相一致的计算方法问题。在不定积分的两类换元法中，为避开了繁杂的理论推导，首次提出了如何从被积函数和积分变量两方面入手的做法，把复杂的问题简单化。在极限理论中，归纳了在自变量的六个变化过程中，函数存在的三大变化趋势。导数在经济分析的应用中，明确提出了“边际分析”解决的是经济函数绝对变化“速度”的快慢问题，而“弹性分析”解决的是经济函数相对变化的幅度或称灵敏度问题，这些都便于学生对数学课程的理解、学习与掌握。在定积分的应用中，以辩证法的思想，从如何解决“变”与“不变”、“近似”与“精确”两类矛盾中，提出了对微元法思想的理解。

(2)在调整了教学内容和要求，尽量做到数学课程的简单化、通俗化和兴趣化。去掉了级数部分的内容，还简化了空间解析几何、多元函数微分学、微分方程的部分内容，去掉了线性代数和概率部分的内容，而适当地增加一些经济数学方面的知识。而且还增加了数学实验内容，借助 Matlab 软件丰富的计算机技术和生动的可视化效果，使学生利用“数”、“形”结合的方式接触数学知识，掌握一些数值计算、平面曲线和空间曲线与曲面等绘图技能，在培养学生学习数学兴趣的同时，也相应地减轻了学生学习数学的压力。

(3)为了配合本教材的教学，作者还建立了省级数学精品课程网站，其中有“高等数学”的教学大纲、题库、课件(PPT)等内容，网址是 http://27.151.116.65:86。可供教师与学生在教学中参考使用。

全书共分 9 个章。第 1 章函数、极限和连续，第 2 章导数与微分，第 3 章中值定理与导数应用，第 4 章不定积分，第 5 章定积分及其应用，第 6 章微分方程，第 7 章多元函数微分学，第 8 章二重积分和第 9 章数学实验(Matlab)。第 1～8 章的教材内容由李水育副教授编写，第 9 章的教材内容由杨静俐和万丙晟编写，第 1～8 章的小结和习题部分由庄金洪、吴珍莺和黄新丽编写，第 1～8 章的内容由林伟奇和林志强录入完成；参加编辑工作的还有黄琴。

本书在编写过程，得到了福州海峡职业技术学院张贤澳教授和有关部门的大力支持和帮助。福建省数学学会高职高专数学专业委员会理事长张国勇教授亲自担任了本书的主审。在此，特表诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中疏漏和错误在所难免，恳请同行和读者批评指正。

李水育

2013 年 6 月于福州

目录

Contents

第一章　函数、极限与连续

初等数学研究的对象基本上是常量，而高等数学研究的对象是变量. 函数是高等数学研究的对象. 函数反映了变量间的依赖关系，对函数的学习贯穿了高数学习的整个过程. 极限是微积分学的理论基础. 它是研究变量的一个基本方法. 本章将介绍函数、极限和函数连续性等概念，以及它们的性质和运算法则等.

第一节　函　　数

一、集合

具有某种特性的事物的全体，称为**集合**，简称**集**. 一般用大写字母如 A，B，M，N 等表示. 组成某一集合的各个对象，称为这个集合的**元素**，一般用小写字母如 a，b，m，n 等表示. 若 a 是 A 的元素，则记为 $a\in A$（读作 a 属于 A），否则，记为 $a\notin A$（读作 a 不属于 A）.

1. 集合表示法

(1) **列举法**：对由有限个元素组成的集合，可以列举它的全体元素.如由元素 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 组成的集合 A，可记为：$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

(2) **描述法**：对由无限多个元素组成的集合，设集合 M 是由具有某种特性的元素 x 的全体组成，可记为 $M=\{x\,|\,x$ 所具有的特性$\}$. 如在 xOy 平面上，坐标满足方程 $x^2+x^2=r^2$ 的点的全体组成的集合 M，可记为 $M=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=r^2,\ x,\ y\in R\}$.这个集合 M 实际上由 xOy 平面上，以原点为圆心，半径等于 r 的圆周上的点的全体组成.

2. 数集

数学中，研究的对象是数. 所以，今后用到的集合通常是数的集合，简称**数集**. 常用的数集有：

$\mathbf{N}^*$——正整数

$\mathbf{R}$——实数

3. 数集的运算

设有两个集合 A 和 B：

(1) 若 A 的每一个元素都是 B 的元素，即，若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 A 为 B 的**子集**.记为 $A\subset B$（读作 A 包含于 B），或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）.如：$\mathbf{N}^*\subset\mathbf{R}$.

(2) 若 $A\subset B$ 且 $A\supset B$，则称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$. 如：设 $A=\{1,\ 2\}$，$B=\{x\,|\,x^2-3x+2=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，则 $A=B$.

(3) 不含任何元素的集合，称为**空集**，记为 $\varnothing$. 如：$\varnothing=\{x\,|\,x^2+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$. 规定空集为任何集合的子集，即 $\varnothing\subset A$.

(4) 由 A 和 B 中所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$. 如：$A=\{-2,\ 1\}$，$B=\{1,\ 2\}$，则 $A\cup B=\{-2,\ 1,\ 2\}$.

(5) 由 A 和 B 中所有公共元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B$

$=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$. 如上例,$A \cap B=\{1\}$.

二、区间

设 a, b 都是实数,且 $a<b$,则有如下结论.

1. 有限区间

(1) **开区间:**$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$,其图形如图 1-1 所示.

(2) **闭区间:**$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,其图形如图 1-2 所示.

(3) **半开区间:**$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$,或$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$,其图形如图 1-3 和图 1-4 所示.

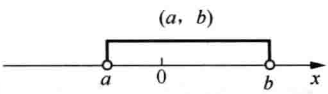

图 1-1

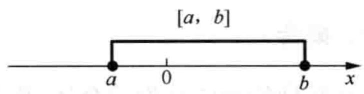

图 1-2

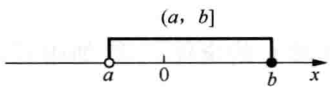

图 1-3

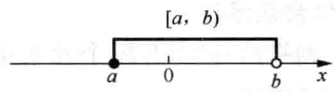

图 1-4

2. 无限区间

(1) **开区间:** $(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}$ 其图形如图 1-5 所示,

$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$, 其图形如图 1-6 所示.

(2) **半开区间:** $[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$, 其图形如图 1-7 所示.

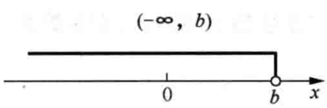

图 1-5

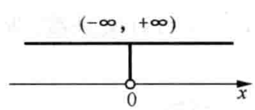

图 1-6

今后,在无特别要求的情况下,简称为"区间",并用 I 表示.

例 1 设 $A=\{x \mid x^2+2x-3 \geqslant 0\}$,$B=\{x \mid x^2-4<0\}$, 求 $A \cup B$,$A \cap B$.

解: $A=\{x \mid x^2+2x-3 \geqslant 0\}=\{x \mid x \leqslant -3$ 或 $x \geqslant 1\}$,

$B=\{x \mid x^2-4<0\}=\{x \mid -2<x<2\}$, 如图 1-8 所示.

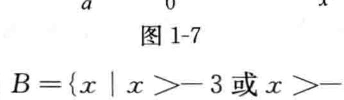

图 1-7

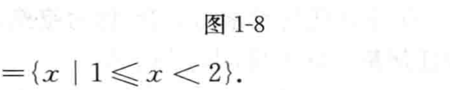

图 1-8

$A \cup B=\{x \mid x>-3$ 或 $x>-2\}$, $A \cap B=\{x \mid 1 \leqslant x<2\}$.

三、函数

设 D 是一个给定的非空实数集合,若对于 D 中的每一个数 x,按照某种对应的法则,总

存在一个唯一的数 y 与之对应，则称 y 是 x 的一个**函数**，记为 $y=f(x)$. 这里，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. D 称为函数的**定义域**，记为 D_f，y 亦称为函数 $f(x)$在 x 处的值，简称**函数值**.

当 $x=x_0\in D_f$时，则函数 $f(x)$对应的值为 $y_0=y\mid_{x=x_0}=f(x_0)$.

当 $x\in D_f$时，对应 y 的全体集合，称为函数的**值域**，记为 $Z_f=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}$.

不同的对应法则表示不同的函数，如 $y=f(x)$，$y=\varphi(x)$ 等.

函数的定义域 D_f，或是根据问题的实际意义确定，或是由使函数解析式有定义的自变量 x 的全体实数组成.

例如，匀速直线运动中，路程是关于时间的函数，而时间的取值是非负的，所以，路程应表示为 $S(t)=vt$ 定义域 $D_S:t>0$.

例 2 有一边长为 36cm 的正方形铁皮，在其四周各剪去面积相等的小正方形，制成一个没有盖的容器，试建立所得容器的容积 V 与被剪去的小正方形边长 x 之间的函数关系.

解：依题意，$V=4x\,(18-x)^2$，$D_f:x\in(0,18)$.

例 3 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{4-x^2}$；

(2) $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$.

解：(1) 依题意，$\begin{cases}x+2\neq 0\\4-x^2\geqslant 0\end{cases}$，即$\begin{cases}x\neq -2\\-2\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，得 $D_f=(-2,2]$.

(2) 依题意，$\begin{cases}x+1>0\\x-1>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x>-1\\x>1\end{cases}$，得 $D_f=(1,+\infty)$.

例 4 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(-3)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(x+1)$.

解：$f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$，$f(-3)=\dfrac{1-(-3)}{1+(-3)}=-2$，

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}=\frac{a-1}{a+1},\ f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{2+x}.$$

例 5 画出下列函数的图像，并指出它们的定义域.

(1) $f(x)=\begin{cases}2, & x\neq 0,\\0, & x=0;\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x>0,\\0, & x=0,\\1-x, & x<0;\end{cases}$ (3) $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,\text{当} & x>0,\\0,\text{当} & x=0,\\-1,\text{当} & x<0.\end{cases}$

解：分别画出函数图像，如图 1-9～图 1-11 所示.

(1)定义域：$D_f=(-\infty,+\infty)$ (2)定义域：$D_f=(-\infty,+\infty)$

(3)定义域：$D_f=(-\infty,+\infty)$，通常称(3)为符号函数.

此例中，函数 $f(x)$在定义域内的不同区间上用不同的解析式表示其函数关系，且在定义域内不能化为用一个解析式表示函数关系的函数，称它为分段函数，其中，点 $x=0$ 称为分界点.

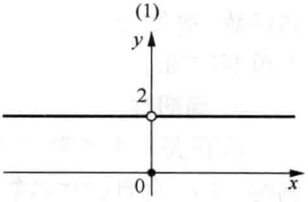

图 1-9

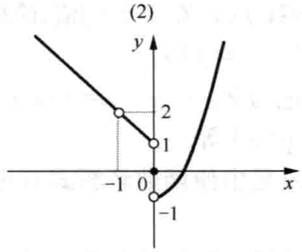

图 1-10

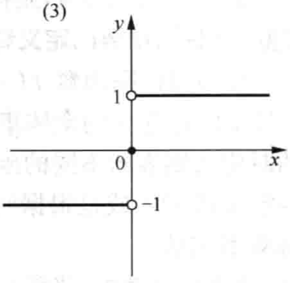

图 1-11

注意：分段函数求函数值时，应根据自变量取值的定义区间选择对应的函数表达式.如对本例中(2)有：$f(-1)=(1-x)\big|_{x=-1}=2$，$f(1)=(x^2-1)\big|_{x=1}=0$.

四、函数的几种特性

设函数 $y=f(x)$，其定义域记为 D_f.

1. 奇偶性

若 D_f 关于原点对称(即若 $x\in D_f$，则有 $-x\in D_f$)，且对于任意 $x\in D_f$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数，其图形关于 y 轴对称. 例如 $y=x^2$ 为偶函数，其图形如图 1-12 所示. 若对于任意 $x\in D_f$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，其图形关于原点对称. 例如 $y=x^3$ 为奇函数，其图形如图 1-13 所示，又如 $y=3^x$ 是非奇非偶函数，其图形如图 1-14 所示.

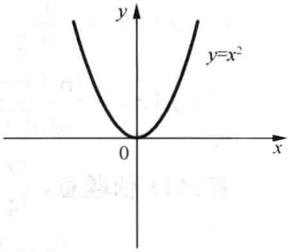

图 1-12

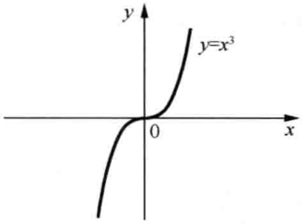

图 1-13

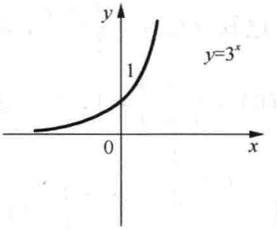

图 1-14

2. 单调性

设区间 $I\subset D_f$，若对于任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(见图 1-15)；当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少(见图 1-16). 单调增加和单调减少，统称为单调性. 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数. 例如，$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在 $(0,+\infty)$ 上单调增加；$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

3. 周期性

若存在一个常数 $T\neq 0$，使得对任意 $x\in D_f$，必有 $x\pm T\in D_f$，且有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期性函数，其中 T 称为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期通常指它的最小正周期.

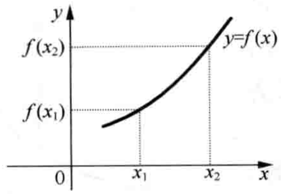

图 1-15

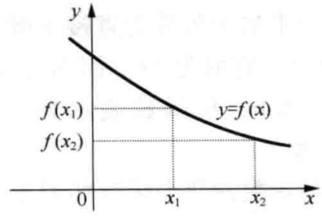

图 1-16

例如：$y = \sin x$ 的周期为 2π，$y = \tan x$ 的周期为 π. 其图形分别见图 1-17 和图 1-18.

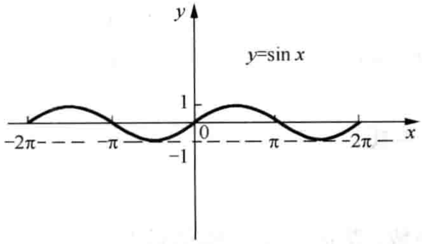

图 1-17

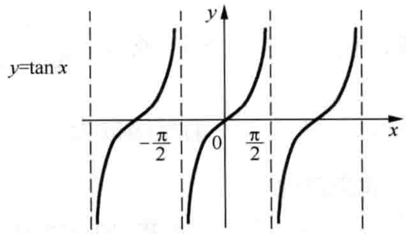

图 1-18

4. 有界性

设区间 $I \subset D_f$，若存在一个正数 M，使得对于任意 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界，也称 $f(x)$ 是 I 上的有界函数. 否则，称 $f(x)$ 在 I 上无界，也称 $f(x)$ 是 I 上的无界函数.

例如：$y = \arctan x$，对任意 $x \in \mathbf{R}$，都有不等式 $|\arctan x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ 成立，所以，它是$(-\infty, +\infty)$上的有界函数，其图形如图 1-19 所示.

但应注意，函数的有界性与 x 的取值区间有关. 如：$y = \frac{1}{x}$ 在$(0,1)$上是无界的，但它在 $[1, +\infty)$ 上或在 $(-\infty, -1]$ 上却是有界的，其图形如图 1-20 所示.

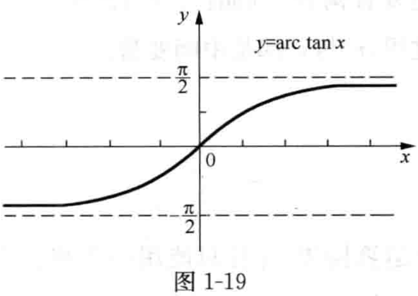

图 1-19

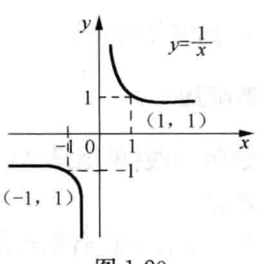

图 1-20

五、反函数与复合函数

1. 反函数

设 $y = f(x)$ 是定义在 D_f 上的一个函数，值域为 Z_f，若对于每一个 $y \in Z_f$，有唯一确定