数学
分析理论及应用

SHUXUE FENXI LILUN JI YINGYONG

主　编　许尔伟　毛耀忠　安乐
副主编　于海燕　张志莉　王晖　李晨松

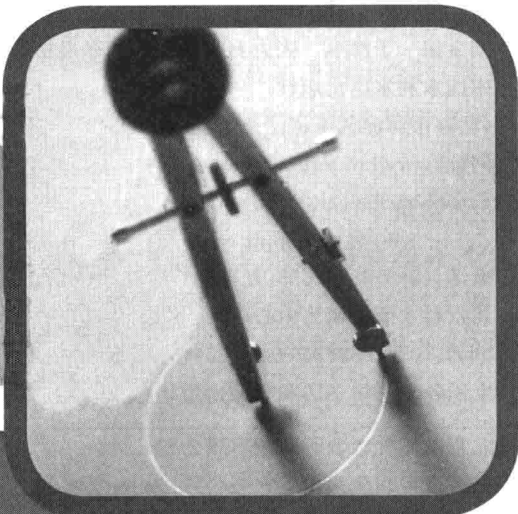
中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

数学

分析理论及应用

SHUXUE FENXI LILUN JI YINGYONG

主　编　许尔伟　毛耀忠　安乐
副主编　于海燕　张志莉　王晖　李晨松



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

全书共分12章，主要内容包括函数、极限与连续；导数与微分；微分基本定理及其应用；不定积分；定积分及其应用；数项级数；函数项级数；多元函数的极限与连续；多元函数微分学及其应用；反常积分与含参变量的积分；重积分及其应用；曲线积分与曲面积分等.

本书结构合理、阐述准确、通俗易懂、深入浅出、条理清楚、逻辑性强，易于学习和理解. 本书既可作为数学专业学生的参考书，可也作为非数学专业学生的参考书，对其他课程的学习也具有很好的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析理论及应用/许尔伟，毛耀忠，安乐主编. --北京：中国水利水电出版社，2014.3

ISBN 978-7-5170-1811-7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①许… ②毛… ③安… Ⅲ. ①数学分析 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第049208号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：杨元泓　封面设计：马静静

书　　名	数学分析理论及应用
作　　者	主　编　许尔伟　毛耀忠　安　乐 副主编　于海燕　张志莉　王　晖　李晨松
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：(010)68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：(010)88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京鑫海胜蓝数码科技有限公司
印　　刷	三河市天润建兴印务有限公司
规　　格	184mm×260mm　16开本　25.25印张　646千字
版　　次	2014年6月第1版　2014年6月第1次印刷
印　　数	0001—3000册
定　　价	86.00元

前　言

数学分析理论的萌芽始于阿基米德(前 287—前 212)为计算抛物线弓形的面积而使用的穷竭法,它是使用多边形面积逼近所要计算的面积的方法,这也是直到现在唯一可行的方法,这就是积分的前身.

本书在编写过程中,有以下几个特点:

第一,本书对数学符号的使用非常慎重.在保留通用符号的前提下,我们尝试对函数的各种极限,如单侧极限、自变量趋于正负无穷时函数的极限、函数值趋于正负无穷的情况等给出统一的定义和记法,并在定理的叙述和证明中不增加篇幅地涵盖多种情况;

第二,为数学分析的应用考虑,绝大多数定理给出尽可能一般的形式并有严密的证明;

第三,在遵循知识体系的基础上适当调整或删减内容.

本书共有 12 章,第 1 章介绍了函数、极限与连续的基本概念和简单性质;第 2 章主要介绍了导数和微分的基本概念以及函数的求导法则;第 3 章主要讨论了微分基本定理及应用,研究函数的单调性、极值、凹凸性、曲线的曲率与函数作图,讨论了导数在经济分析中的应用;第 4 章主要介绍了不定积分的概念、性质、基本积分方法与有理函数和可化为有理函数的积分;第 5 章介绍了定积分的概念、性质及积分方法,主要讨论定积分在几何学、物理学和近似计算中的应用;第 6 章主要介绍了数项级数、正项级数、任意项级数和无穷乘积;第 7 章介绍了函数项级数,讨论了一致收敛性、幂级数、函数幂级数展开式及其应用、泰勒级数与逼近定理和傅里叶级数;第 8 章在欧氏空间的基础上主要介绍了多元函数的概念、极限和连续;第 9 章在第 8 章的基础之上,介绍了偏导数与全微分的概念,并给出了复合函数求导法与隐函数存在定理,重点讨论了偏导数的几何应用和多元函数微分学的应用;第 10 章为反常积分与含参变量的积分,介绍了反常积分的性质与收敛判别、瑕积分的性质与收敛判别、含参变量的常义积分和广义积分、欧拉积分;第 11 章介绍了二重积分和三重积分的概念、性质与计算,讨论了重积分的应用;第 12 章介绍了第一类、第二类曲线积分与曲面积分的概念及相关理论,同时还讨论了高斯公式与斯托克斯公式的内容.

全书由许尔伟、毛耀忠、安乐担任主编,于海燕、张志莉、王晖、李晨松担任副主编,并由许尔伟、毛耀忠、安乐负责统稿,具体分工如下:

第 6 章、第 10 章、第 11 章:许尔伟(兰州城市学院数学学院);

第 1 章、第 12 章:毛耀忠(兰州城市学院数学学院);

第 2 章、第 4 章、第 8 章:安乐(天水师范学院);

第 5 章:于海燕(内蒙古民族大学);

第 3 章:张志莉(呼伦贝尔学院数学科学院);

第 7 章:王晖(内蒙古民族大学);

第 9 章:李晨松(内蒙古民族大学)。

本书的顺利完成，得到了许多同行专家的支持和帮助，他们提出了许多宝贵意见，令我们受益匪浅，在此，表示衷心的感谢。由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请读者见谅并提出意见，本书将不断改进并完善，进一步提高质量，突显特色，从而更好地为读者服务。欢迎同行们和广大读者批评指正。

编者
2014 年 1 月

目　　录

第1章　函数、极限与连续

1.1　实数集与不等式

1.1.1　集合

定义 1.1.1　一个集合(set) S 是某些个体的总和,这些个体或者符合某种规定或者具有某些可以识别的相同属性.集合 S 中的每一个个体 a 称为 S 的元素(element),记为

$$a \in S,$$

读作“a 属于 S”;如果 a 不是 S 的元素,则记为

$$a \notin S,$$

读作“a 不属于 S”.

集合有两种表示方法,列举法和属性法.

表示一个集合可以通过列出它所有元素的方法称为列举法.比如,集合

$$A = \{1,2,3,4\}.$$

通过描述集合中元素的属性的方式称为描述法,常写为 $\{x \mid \text{使 } x \text{属于 } A \text{ 的性质}\}$,比如,集合

$$S = \{n \mid n\text{是小于 10 的非负整数}\},$$

一次函数集合

$$S = \{f(x) \mid f(x) = kx + b, k \neq 0, k, b \in \mathbb{R}\}.$$

在数学中经常用描述法来表示一个集合,即用 $\{x \mid p(x)\}$ 表示所有满足命题 $p(x)$ 的实数 x 组成的集合.比如,$\{x \mid x^2 + 1 = 2\}$ 表示所有满足等式 $x^2 + 1 = 2$ 的实数 x 所构成的集合;$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 表示所有满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 构成的集合.

定义 1.1.2　如果集合 A 中每一个元素都属于集合 B,则称 A 是 B 的子集,记为

$$A \subset B,$$

也称 A 包含于 B 或 B 包含 A;如果集合 A 和集合 B 互为子集,$A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称集合 A 和集合 B 相等,记为

$$A = B.$$

不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$.

规定空集是任何集合的子集.比如,集合 $\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ 就是空集.空集不含任何元素,所以空集是任何集合的子集.今后在提到一个集合时,如果没有特别声明,一般都是非空集合.

集合有并、交、差三种运算.设 A,B 是两个集合,则

(1)由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 和 B 的并集,简称并,记为

$$A \cup B,$$

即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

(2)由所有属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 和 B 的交集,简称交,记为

$$A \cap B,$$

即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

比如

$$\{1,2,3,4,5\} \cup \{1,3,5,7,9\}=\{1,2,3,4,5,7,9\},$$

$$\{1,2,3,4,5\} \cap \{1,3,5,7,9\}=\{1,3,5\}.$$

定义 1.1.3 由数组成的集合称为数集.

有时我们在表示数集的的字母的右上角标上"+"、"−"等上标来表示该数集的特定的子集.

$\mathbb{N}$ 表示全体非负整数即所有自然数构成的集合,称为自然数集,即

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

$\mathbb{N}^{+}$ 表示所有正整数的集合,即

$$\mathbb{N}^{+}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

$\mathbb{Z}$ 表示所有整数的集合,称为整数集,即

$$\mathbb{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

$\mathbb{Q}$ 表示所有有理数的集合,称为有理数集,即

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^{+}, \text{且} \mid p \text{ 与} q \text{ 互质}\right\};$$

$\mathbb{R}$ 表示所有实数构成的集合,称为实数集;$\mathbb{R}^{+}$ 表示正实数集;$\mathbb{R}^{*}$ 为排除数 0 的实数集.

1.1.2 实数集的界与确界

对实数集,我们引入了有界的概念.

定义 1.1.4 对于非空数集 $E \subset \mathbb{R}$,如果存在 $b \in \mathbb{R}$ 使得对所有的 $x \in E$,都有

$$x \leqslant b,$$

则称集合 E 是有上界的,称 b 是集合 E 的一个上界;如果存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得对所有的 $x \in E$,都有

$$x \geqslant a,$$

则称集合 E 是有下界的,称 a 是集合 E 的一个下界. 如果实数的子集 E 既有上界又有下界,则称 E 是有界集.

易得集合 E 有界的充分必要条件是存在正数 M,使得所有的 $x \in E$,都有 $|x| \leqslant M$. 我们称 M 是集合 E 的界.

比如,自然数集 $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$,0 或者任何一个负数都是它的下界,但是它没有上界,所以它是无界的. 而集合 $A=\{x \mid x^{2}<2, x \in \mathbb{R}\}$,有 $|x|<\sqrt{2}$ ($\forall x \in A$),所以集合 A 是有界的,$\sqrt{2}$ 是它的界,$\sqrt{2}$,$-\sqrt{2}$ 分别是它的上界和下界.

很显然,如果一个数集有上界,那么它就有无穷多个上界. 实际上,若 M 是集合 E 的一个上界,那么 M 与任何正数 c 的和 $M+c$ 仍是 E 的上界. 在这些上界中有一个具有特别重要的作用,那就是上确界.

定义 1.1.5 设集合 E 有上界,如果所有上界中有一个最小的数,则称这个最小的上界是集

合 E 的上确界,记为

$$\sup E;$$

设集合 E 有下界,如果所有下界中有一个最大的数,则称这个最大的下界是集合 E 的下确界,记为

$$\inf E.$$

上确界和下确界统称为确界.

如果一个数集 E 中存在最大的数 b,记为 $b = \max E$,显然 b 就是 E 的上确界;同样如果 E 中存在最小的数 a,记为 $a = \min E$,那么 a 就是 E 的下确界.然而反之不一定成立.一个数集 S 的上确界或下确界并不一定是数集 S 中的数,即数集 S 的上确界或下确界可以存在,但它的最大数或最小数不一定存在.

比如,数集 $E = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$,容易看出 E 中有最大数 3,最小数 -2,所以 3 和 -2 就是 E 的上确界和下确界;数集 $A = \{x \mid x^2 < 9, x \in \mathbb{R}\}$ 的 $\sup A = 3$,$\inf A = -3$,但是 3 和 -3 都不是 A 中的数.

定义 1.1.6　如果数集 E 没有上界,那么它也没有上确界,我们规定 $\sup E = +\infty$;同样如果数集 E 没有下界,我们规定 $\inf E = -\infty$.

那么在数集有上(下)界时,它是否一定有上(下)确界呢?关于这一点,结论是肯定的.

定理 1.1.1(确界存在性定理)

(1)如果非空数集 E 有上界,则 E 必有上确界;

(2)如果非空数集 E 有下界,则 E 必有下确界.

确界存在性定理简称确界定理.从直观上看,一个数集 E 是数轴上的一个点集,上界代表着这样的点:它的右边没有 E 中的点,因此它的右边全是 E 的上界,也就是说,E 的所有上界点的集合是数轴上的一条正向射线,射线的始点恰好是 E 的上确界.确界存在性反映了实数集的连续性这一重要而基本的性质,即实数充满了数轴而连续不断.如果实数间留有不是实数的“空隙”点,那么这“空隙”点左边的数集就没有上确界,“空隙”右边的数集就没有下确界了,此时确界定理就不成立了.所以确界定理是刻画实数连续性的一个重要定理.

定理 1.1.2　设 E 是非空集合,a,b 是实数,则有

(1) $\sup E = b$ 的充分必要条件是同时满足:

① b 是 E 的一个上界;

②对于任意满足 $c > b$ 的实数 c,存在 $x \in E$ 使得 $x > c$.

(2) $\inf E = a$ 的充分必要条件是同时满足:

① a 是 E 的一个下界;

②对于任意满足 $c > a$ 的实数 c,存在 $x \in E$ 使得 $x < c$.

证明　(1)必要性　设 $\sup E = b$.由定义可得,b 必然是 E 的一个上界.其次,由于 $\sup E = b$ 是集合 E 的最小上界,所以当 $c < b$ 时,c 不是集合 E 的上界,于是至少存在一个 $x \in E$ 使得 $x > c$;

充分性　b 是 E 的一个上界.为了证明 $\sup E = b$,只需证明当 $c < b$ 时,c 不是集合 E 的上界,而这一点可由条件②得到,即证.

(2)参照(1)的证明,留给读者思考.

例 1.1.1 证明数集 $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\right\}$ 的 $\inf A=\frac{1}{2}$，$\sup E=1$.

证明 对于 $\frac{n}{n+1}\in A(n=1,2,\cdots)$，总有

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{n}{n+1}\leqslant 1,$$

所以 $\frac{1}{2}$,1 分别是 A 的一个下界和一个上界.

对于 $\varepsilon>0$，存在 $\frac{1}{2}\in A$ 使得

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\varepsilon,$$

即任何大于 $\frac{1}{2}$ 的数 $\frac{1}{2}+\varepsilon$ 都不是 A 的下界，则 $\frac{1}{2}$ 是 A 的最大下界，所以

$$\inf A=\frac{1}{2};$$

对于 $\varepsilon>0$，取 $k=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$（$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 表示不超过 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的最大整数），则

$$k>\frac{1}{\varepsilon},$$

从而 $\varepsilon>\frac{1}{k}$，于是有

$$\frac{k}{k+1}\in A,$$

使得

$$\frac{k}{k+1}=1-\frac{1}{k+1}>1-\frac{1}{k}>1-\varepsilon,$$

即任何小于 1 的数 $1-\varepsilon$ 都不是 A 的上界，则 1 是 A 的最小上界，所以

$$\sup A=1,$$

证毕.

1.1.3 不等式

在数学分析中，要常常用到许多不等式，在此给出一些常见的不等式.

(1)绝对值不等式.

与实数有关的一些不等式是重要的，我们先回忆与绝对值有关的不等式：

①如果 $\delta\in\mathbb{R}^{+}$，$x,a\in\mathbb{R}$，则

$$|x-a|<\delta\Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta;$$

②如果 $x,y\in\mathbb{R}$，则

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|.$$

(2) $A-G$ 不等式，即平均值不等式，“正数的算术平均值不小于它们的几何平均值”. 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}^{+}$，$n\in\mathbb{N}^{+}$，则

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

证明 用数学归纳法证明，令 $A_n=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, G_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}, n\in\mathbb{N}^+$.

当 $n=1$ 时，$A_1=x_1=G_1$，则 $A_1\geqslant G_1$ 成立；

假设当 $n=k$ 时结论成立，即

$$A_k=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\geqslant\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}=G_k\ ,$$

则当 $n=k+1$ 时，因为 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$ 中必有最大正数，不妨设为 x_{k+1}，则有

$$A_{k+1}^{k+1}=\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}=\left(\frac{kA_k+x_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}=\left(A_k+\frac{x_{k+1}-A_k}{k+1}\right)^{k+1},$$

用二项式展开得

$$\begin{aligned}A_{k+1}^{k+1}&\geqslant A_k^{k+1}+C_{k+1}^{k}A_k^k\left(\frac{x_{k+1}-A_k}{k+1}\right)\\&=A_k^{k+1}+A_k^kx_{k+1}-A_k^{k+1}\\&=A_k^kx_{k+1}\geqslant G_k^kx_{k+1}\\&=x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}\\&=G_{k+1}^{k+1}\end{aligned}$$

即得

$$A_{k+1}\geqslant G_{k+1}\ ,$$

由此可得，当 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}^+,n\in\mathbb{N}^+$ 时，$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，得证.

(3)伯努利不等式.

如果 $x>-1, n\geqslant 2$ 为正整数，则

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\ ,$$

其中，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

证明 用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，显然成立；

假设 $n=k$ 时成立，即

$$(1+x)^k\geqslant 1+kx\ ,$$

则当 $n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&=(1+x)(1+x)^k\geqslant(1+x)(1+kx)\\&=1+(1+k)x+kx^2\geqslant 1+(1+k)x,\end{aligned}$$

即不等式对 $n\geqslant 2$ 的正整数均成立，且当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

(4)三角不等式.

如果 $a,b,c\in\mathbb{R}$，则有

$$|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|\ .$$

(5)对任意 $a,b\in\mathbb{R}$，有

$$2ab\leqslant 2|ab|\leqslant a^2+b^2\ .$$

(6)如果 $x\in(0,1)$，则有

$$x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}\ ,$$

其中，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

(7)如果 n 为正整数，则有

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

1.2 函数及其性质

1.2.1 函数的概念

定义 1.2.1 设两个变量 x 和 y，D 是一个非空实数集合，$x\in D$，存在一个法则 f，使得对于每个 x，都存在确定的变量 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为

$$y=f(x),\ x\in D,$$

其中，x 是自变量，y 是因变量，D 为这个函数的定义域，也记为 $D(f)$.

定义 1.2.2 按照对应法则，对于 $x_0\in D$，有确定的值 y_0，记为 $f(x_0)$ 与之对应，则称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值. 当 x 取遍 D 的所有数值时，对应的所有函数值 $f(x)$ 的集合称为函数的值域，记作

$$Z(f)=\{y\mid y=f(x),x\in D\},$$

自变量与因变量之间的这种相依关系被称为函数关系. 在函数的定义中，自变量的取值范围就是函数的定义域.

用数学运算式来表示的函数，函数的定义域是指能使该算式在实数范围内有意义的全体自变量的值的集合. 确定这种函数的定义域时，必须依据以下基本规定：

(1)分式的分母不能等于 0；

(2)负数不能开偶次方；

(3)对数的真数要大于 0；

(4)正弦和余弦的绝对值不能大于 1；

(5)表达式由几项组成时，应取各项定义域的公共部分.

在反映实际问题的函数关系中，其定义域要由问题本身的意义来确定. 比如，圆的面积 S 和圆的半径 r 之间的关系是

$$S=\pi r^2,$$

按实际意义，r 的定义域是 $(0,+\infty)$.

变量 x，y 之间的对应法则是函数的核心.

定义 1.2.3 一般地，我们用记号 $y=f(x)$ 表示变量 y 是变量 x 的函数，其中，字母“ f ”表示变量 y 和变量 x 之间的对应法则.

比如，在函数表达式 $y=f(x)=\sqrt{9+8x-x^2}$ 中，对应法则“ f ”相当于运算程序

$$f(\quad)=\sqrt{9+8(\quad)-(\quad)^2},$$

按这样的运算程序，如果在该函数中给出 x 的值，就可以计算出相应的 y 值. 当 $x=-1$ 时，相应的函数值

$$y=f(-1)=\sqrt{9+8(-1)-(-1)^2}=0,$$

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，则对于 $x_0\in D$，其对应的函数值可记为 $f(x_0)$ 或者 $y|_{x=x_0}$.

常用的函数表示方法有以下三种：

(1)解析法

用数学表达式或解析表达式把自变量和因变量之间的关系表达出来，因函数数学表达式的不同，可以分为三种，分别是：显函数、隐函数和分段函数.

①显函数：直接用 x 的解析表达式表示出函数 y. 例如

$$y=\frac{1}{x},\ y=x^2-2.$$

②隐函数：自变量 x 和因变量 y 的对应关系没有直接给出. 例如

$$F(x,y)=0,\ \ln y=\sin(x+y).$$

③分段函数：即在定义域的不同分段区间内，函数有不同的解析表达式. 例如

$$y=|x|=\begin{cases}x,\ x\geqslant 0\\-x,\ x<0\end{cases}.$$

(2)图象法

即在平面直角坐标系 xOy 中，把自变量与因变量的关系用图形表示出来的方法.

(3)表格法

把自变量与因变量的值列成表格表示的方法.

在平面直角坐标系 xOy 中，对于 $y=f(x),x\in D$，取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则在坐标系中就确定了一个点 (x,y)，当 x 取完定义域 D 中的每一个数值时，平面上的点集 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 即为函数 $y=f(x)$ 的图形. 如图 1-2-1 所示.

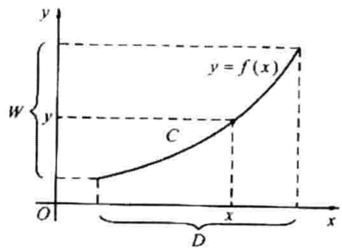


图 1-2-1

例 1.2.1　求函数 $y=\arcsin(x-1)+\ln(x-1)$ 的定义域.

解　要使 $y=\arcsin(x-1)+\ln(x-1)$ 有意义，必须满足

$$\begin{cases}|x-1|\leqslant 1\\x-1>0\end{cases},$$

解得

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\x>1\end{cases},$$

即

$$1<x\leqslant 2,$$

所以函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $(1,2]$.

例 1.2.2　求函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解　要使此函数有意义,必须满足

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases},$$

解得

$$\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -2\end{cases},$$

所以函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域是 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

例 1.2.3　已知 $f(x)=x4^{x-2}$,求 $f(2),f(-2),f(t^2),f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

解

$$f(2)=2\ ,$$
$$f(-2)=-2\times 4^{-4}\ ,$$
$$f(t^2)=t^2 4^{t^2-2}\ ,$$
$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}4^{\frac{1}{t}-2}\ .$$

例 1.2.4　设 $f(x-3)=x^2-5x+3$,试求 $f(x)$,$f(x+h)-f(x)$.

解　令 $t=x-3$,则 $x=t+3$,代入上式可得

$$f(t)=(t+3)^2-5(t+3)+3=t^2+t-3\ ,$$

则

$$f(x)=x^2+x-3\ ,$$

那么

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=(x+h)^2+(x+h)-3-(x^2+x-3)\\&=h(2x+h+1)\ .\end{aligned}$$

例 1.2.5　下列 $f(x),g(x)$ 是否表示同一函数,为什么?

(1) $f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$;

(3) $f(x)=|\cos x|,g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

解　(1)由于

$$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|\ ,$$

当 $x<0$ 时,$f(x)\neq g(x)$,因为对应法则不同,所以 $f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$ 不是同一函数.

(2)由于 $f(x)=\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)=2\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,因为定义域不同,所以 $f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$ 不是同一函数.

(3)由于 $f(x)=|\cos x|$ 和 $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,且对应法则相同,所以 $f(x)=|\cos x|,g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$ 表示同一函数.

例 1.2.6　求函数

$$f(x)=\begin{cases}2x+1,\ x\geqslant 0\\ x^2+4,\ x<0\end{cases}$$

的定义域,计算 $f(0)$,$f(1)$,$f(-1)$,$f(x-1)$ 并画出 $f(x)$ 的图形.

解　$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,

$$f(0)=1, f(1)=3, f(-1)=5,$$

因为

$$f(x-1)=f(x)\begin{cases}2(x-1)+1,\ x-1\geqslant 0\\ (x-1)^2+4,\ x-1<0\end{cases},$$

所以

$$f(x-1)=\begin{cases}2x-1,\ x\geqslant 1\\ x^2-2x+5,\ x<1\end{cases}.$$

图 1-2-2 即为函数 $f(x)$ 的图形.

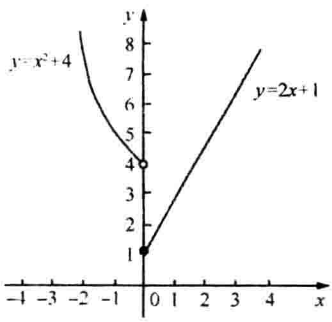


图 1-2-2

1.2.2　函数的性质

1. 函数的单调性

函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,如果当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增函数,区间 I 为单调递增区间,如图 1-2-3 所示,

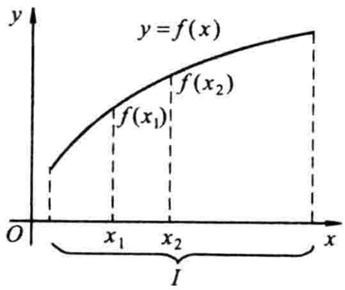


图 1-2-3

单调递增函数的图形是随着自变量 x 的增大，对应的函数值增大，是沿 x 轴正向上升的.

如果当 $x_1 < x_2$ 时，总有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递减函数，区间 I 称为单调减区间，如图 1-2-4 所示，

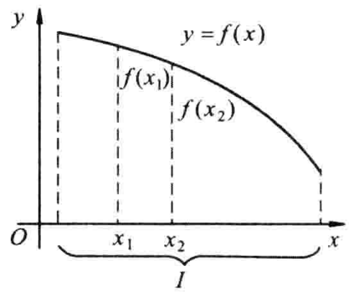


图 1-2-4

单调递减函数的图形是随着自变量 x 的增大，对应的函数值减小，是沿 x 轴正向下降的.

单调增函数和单调减函数统称为单调函数，函数的这种性质就是单调性. 例如，函数 $y = x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$上单调递增. 这里要注意函数的单调性是依附区间的，函数可以在定义域的某些区间单调递增，而在另一些区间单调递减. 例如，函数 $y = |x|$ 的单调递减区间是$(-\infty, 0]$，单调递增区间是$[0, +\infty)$，而在整个定义域 $\mathbb{R}$ 不是单调的.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的，如果对每一个 $x \in D$，总有

$$f(x) = f(-x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数，偶函数的图形是关于 y 轴对称的，如图 1-2-5 所示.

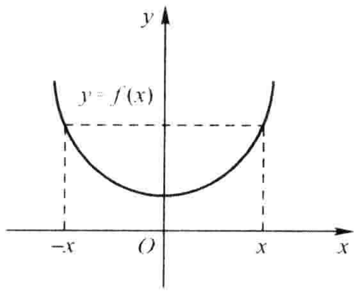


图 1-2-5

如果对每一个 $x \in D$，总有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数，奇函数的图形是关于原点对称的，如图 1-2-6 所示.