高职高专大学生数学竞赛辅导书

支撑课程应用数学与计算

被评选为2013年首批高职高专国家精品资源共享课程

数学竞赛与提高

SHUXUE

JINGSAI YU TIGAO

张 耘 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高职高专大学生数学竞赛辅导书

支撑课程应用数学与计算被评选为2013年首批高职高专国家精品资源共享课程

数学竞赛与提高

张 耘 编 著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容简介

本书是针对高职高专大学生数学竞赛编写而成，全书共分五大部分。前三部分是对高等数学各章知识点的梳理，后两部分是高等数学模拟试题与解析，以及2010、2011、2012年近三年北京市举办的高职高专大学生数学竞赛真题及解析。

高等数学竞赛试题中既含基本题型，同时又含有较高水平和一定难度的提高题，题目构思巧妙，解题方法灵活多变，解题技巧性强。高等数学竞赛能激励高职高专大学生学习高等数学的兴趣，活跃思想。提高高职高专学生利用所学数学知识解决实际问题的能力，是进行数学素质教育的有效举措。

本书可作为高职高专院校大学生数学竞赛辅导书，也可作为各高职高专院校竞赛培训教材，更可供高职高专大学生学习高等数学及参加"专升本"考试的参考书。特别有益于成绩优秀的高职高专大学生提高高等数学水平。

图书在版编目(CIP)数据

数学竞赛与提高 / 张耘编著. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-5635-3565-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 158753 号

书　　名：数学竞赛与提高
编 著 者：张　耘
责任编辑：王晓丹
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编:100876)
发 行 部：电话：010-62282185　**传真**：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京联兴华印刷厂
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：8.5
字　　数：208 千字
版　　次：2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-3565-1　　　　定　价：19.80 元

前　言

高等数学（或称微积分学）是各高职高专院校一年级大学生普遍开设的一门公共基础课程。2010 年北京举办了首届面向高职高专大学生的数学竞赛，目前已经连续举办了 3 届。在高职高专学生中开设数学竞赛，其目的意在推动高职高专院校数学课程的改革和建设，提高高职高专院校数学课程的教学水平。高等数学竞赛能激励高职高专大学生学习高等数学的兴趣，活跃思想，增强创新意识与能力。它要求学生比较系统地理解高等数学的基本概念和基本理论，掌握一定的数学解题基本方法，具备一定的抽象思维能力和逻辑推理能力，以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

本书共分五大部分。第一部分：函数、极限与连续；第二部分：一元函数微分学；第三部分：一元函数积分学；第四部分：综合测试题及解析；第五部分：往届真题及解析。前三部分是对微积分的各章知识点的梳理，列出了各章节的核心内容（参考竞赛大纲而编写），并对各章典型题进行解题技巧的分析。第四部分给出了五套综合测试题，并对测试题逐条解析，对重点题型深入分析，总结解题方法和技巧。第五部分给出近三年的竞赛真题和解析。

本书可作为准备迎赛的老师和学生们的一本辅导教材，帮助高职生进一步融会贯通高等数学的基本理论，熟练掌握各种计算方法和解题技巧，力求以最短时间对高等数学的知识点和基本计算及解题方法有较大幅度的一个提升，特别有益于成绩优秀的高职高专大学生提高高等数学水平。同时本书也可供高职高专大学生作为学习高等数学"专升本"考试参考书。

编写本书的目的是为高职高专类院校数学竞赛提供一本培训教材，由于是一种新的尝试，书中难免出现错误或不当之处，恳请教师同仁予以批评指正。

张　耘

目 录

第一部分　函数、极限与连续

一、竞赛内容大纲

1. 函数的概念及表示法、简单应用问题的函数关系的建立.
2. 函数的性质：有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数性质及其图形，初等函数.
4. 数列极限与函数极限的直观描述性定义及基本性质，函数的左极限与右极限.
5. 无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较.
6. 极限的四则运算、两个重要极限.
7. 函数的连续性概念（含左连续与右连续）、函数间断点的判定（不区分类型）.
8. 连续函数的性质和初等函数的连续性.
9. 闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理、零点定理）.

二、核心内容提要

1. 函数定义域和值域

① 定义域 D：为自变量 x 的取值范围. 也即使函数 $y=f(x)$ 有意义的一个数集，记做 $D(f)$.

当自变量取定 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记为

$$f(x_0)\text{或}y\big|_{x=x_0}$$

② 值域 Z：当 x 取遍 D 中的每一个值时，对应的函数值组成的集合称为函数的值域 Z，记为 $Z(f)$，$Z=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$.

③ 对应法则 f：f 是反映 y 与 x 的对应规则的，即 y 是 x 的函数关系. 例如，$y=x^2$，对应法则是："因变量是自变量的平方".

例 1　求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}+\arctan\dfrac{x-6}{5}$；

(2) $f(x)=\begin{cases}x-1, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$.

解 （1）由 $y=\begin{cases}6-x>0\\ \left|\dfrac{x-6}{5}\right|\leqslant 1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x<6\\ 1\leqslant x<6\end{cases}$.

（2）分段函数定义域为（取各范围定义域之并）

$$D(f)=\{x\mid x\in[-1,0]\cup(0,2]\},$$

即

$$D(f)=\{x\mid x\in[-1,2]\}.$$

例 2 已知：$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求：$f(0)$，$f(1)$，$f(u)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f(x)+1$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\dfrac{1}{f(x)}$.

解

$$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1,$$

$$f(1)=\frac{1-1}{1+1}=0,$$

$$f(u)=\frac{1-u}{1+u},$$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x},$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{2+x},$$

$$f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}.$$

由此看出

$$f(x)+1\neq f(x+1);$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)\neq\frac{1}{f(x)}.$$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ x+1, |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，求：$f(1)$，$f(2)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(\pi)$，$f(-x)$.

解 这是分段函数，注意 x 在不同区间上 $f(x)$ 的表达式不同.

$$f(1)=\cos 1,$$

$$f(2)=2+1=3,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$f(\pi)=\pi+1.$$

$$f(-x)=\begin{cases}\cos(-x), & |-x|\leqslant\frac{\pi}{2} \\ -x+1, & |-x|>\frac{\pi}{2}\end{cases},$$

即

$$f(-x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2} \\ 1-x, & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

2. 两个函数相等

函数两要素:定义域、对应规则.

注: 只有满足定义域和对应规则都相等,两个函数才相等.

例 4　判断下列各对函数是否相同.

(1) $f(x)=\ln(x^2-4)$ 与 $g(x)=\ln(x+2)+\ln(x-2)$;

(2) $f(x)=\sin x$ 与 $g(t)=\sin(2\pi+t)$.

解　(1) $f(x)$的定义域为 $x^2-4>0$,$|x|>2$,$g(x)$的定义域为$\begin{cases}x+2>0\\x-2>0\end{cases}$,得 $x>2$. 由于 $f(x)$,$g(x)$的定义域不同,因此两函数不同.

(2) $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$g(t)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$. $g(t)=\sin(2\pi+t)=\sin t$($\sin x$ 为周期函数,周期为 2π). 说明 $f(x)$与 $g(t)$的定义域及对应规则都相同,因此 $f(x)$与 $g(t)$两函数相同.

注: 函数是否相同与变量所用字母无关.

3. 函数的性质

(1) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义,若对于任意的 $x\in I$,恒有:

- $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为偶函数(图形关于 y 轴对称);
- $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$为奇函数(图形关于原点对称).

例 5　讨论函数 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$的奇偶性.

解　由 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$,可知 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$为奇函数.

注:

① 讨论奇偶性应在对称区间上.

② 奇偶性判别除了用定义外,还常用下列性质.

- 奇函数之和(差)仍是奇函数;偶函数之和(差)仍是偶函数.
- 奇函数之积(商)是偶函数;偶函数之积(商)是偶函数.
- 奇函数与偶函数之积(商)是奇函数.

(2) 单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义,对于区间 I 内的任意两点 $x_1,x_2\in I$,

① 当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 内是**单调增加**的;

② 当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 内是**单调减少**的.

注：单调性还可用导数符号判断.

① 对任意 $x\in D$，总有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$单调增加；

② 对任意 $x\in D$，总有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$单调减少.

(3) 周期性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义，如果存在一个不为零的实数 T，对于任意的 $x\in I$，有$(x+T)\in I$，且有 $f(x+T)=f(x)$恒成立，则称 $y=f(x)$是**周期函数**. 其中，实数 T 称为周期. 通常所说的周期函数的周期指的是函数的**最小正周期**.

例如：函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

注：若 $f(x)$是以 T 为周期的函数，则 $f(ax)$就是以$\dfrac{T}{a}$为周期的函数.

例如：$y=\sin 3x$，周期 $T=\dfrac{2\pi}{3}$；$y=\tan 2x$，周期 $T=\dfrac{\pi}{2}$.

(4) 有界性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义，如果存在一个正数 M，对于任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 I 上**有界**，否则**无界**.

例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[1,2]$上有界，但在$[-1,1]$上无界.

注：有界函数图形必介于平行于 x 轴的两条直线$\begin{cases} y=-M(M>0) \\ y=M \end{cases}$之间.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域和值域分别为 D 和 Z，若对任意 $y\in Z$，都有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应，则称此确定的函数 $x=\varphi(y)$为 $y=f(x)$的反函数. 通常将反函数习惯记为：$y=\varphi(x)$.

注：

① 单调性必有反函数；

② 直接函数与反函数的图像关于 $y=x$ 对称；

③ 利用反函数性质可以求函数的值域.

5. 基本初等函数与复合函数

(1) 6 种基本初等函数

① 常量函数 $y=C$；

② 幂函数 $y=x^n$；

③ 指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

④ 对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

⑤ 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

⑥ 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

注：复合函数就是由这 6 个基本初等函数复合而成的函数.

(2) 复合函数

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，若 $u=\varphi(x)$的值域的全部或部分能使 $y=f(u)$有意义，则称 y 是通过中间变量 u 构成的 x 函数，即 y 是 x 的复合函数. 记做

$$y=f[\varphi(x)].$$

通常称 f 为外层函数，φ 为内层函数，其中 x 是自变量，u 是中间变量.

关于复合函数的几点说明如下.

① 并不是任何两个函数都可以构成一个复合函数.

② 复合函数不仅可由两个函数，也可由多个函数相继复合而成.

③ 分解复合函数时，多采用"由外向内，逐层分解"的方法.

例如：$y=\sin^2 2x$ 是由基本初等函数 $y=u^2,u=\sin v,v=2x$ 复合而成的. $y=\ln\arcsin x^2$ 是由基本初等函数 $y=\ln u,u=\arcsin v,v=x^2$ 复合而成的.

6. 分段函数与初等函数

(1) 分段函数

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

例如：$f(x)=\begin{cases}2x-1,x>0\\x^2-1,x\leqslant 0\end{cases}$ 是一个分段函数.

(2) 初等函数

由基本初等函数经有限次的四则运算或复合，并能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

例如：$y=\sqrt{x+2}$是复合函数也是初等函数；$y=\sqrt{x}+2$ 只是初等函数而不是复合函数.

7. 显函数与隐函数

显函数：形如 $y=f(x)$的函数称为显函数. 例如：$y=\sin x$；$y=\ln x+5$.

隐函数：由方程 $F(x,y)$所确定的函数称为隐函数. 例如：$x+y^2=1$；$xy+\cos y-2=0$.

8. 数列的极限

(1) 数列极限的定义

对于数列$\{a_n\}$，若当 n 无限增大时，a_n 无限趋近于某一确定的常数 A，则称 A 为数列$\{a_n\}$的极限，或称数列$\{a_n\}$收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n=A.$$

注： 若这样的常数 A 不存在，则称数列$\{a_n\}$无极限，或称发散.

记住三个基本数列的极限：

$$\lim_{n\to\infty} C=C(C\text{ 为常数})；$$

$$\lim_{n\to\infty} C=\frac{C}{n}=0(C\text{ 为常数})；$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0(|q|<1).$$

(2) 收敛数列的性质

定理 1(极限的唯一性)：如果数列$\{a_n\}$收敛，那么它的极限唯一.

定理 2(收敛数列的有界性)：如果数列$\{a_n\}$收敛，那么数列$\{a_n\}$一定有界.

(3) 数列的计算法

① 有限数列求极限：利用"数列的四则运算法则"(见后面介绍).

② 无限数列求极限：利用"等差、等比数列前 n 项和公式".

例 6　求下列数列的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\dfrac{1}{n}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5n-7}{3n+4}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7n^3+3n^2-n+5}{4n^3-1}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}5+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=5+0=5$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5n-7}{3n+4}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{7}{n}}{3+\dfrac{4}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5-\dfrac{7}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{4}{n}\right)}=\dfrac{5}{3}$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7n^3+3n^2-n+5}{4n^3-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}}{4-\dfrac{1}{n^3}}=\dfrac{7}{4}$.

例 7 求数列$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$的极限.

解 此数列为等差数列,属于“无限数列之和求极限”,故不能用“数列的四则运算法则”求极限,可用“数学的前 n 项和公式”求极限,即由 $a_1=\dfrac{1}{n^2}$,$a_n=\dfrac{n}{n^2}$,前 n 项和

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\left(\dfrac{1+n}{n^2}\right)}{2}=\frac{1+n}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},$$

可得
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}.$$

9. 函数的极限

(1) 函数极限的定义

对于函数 $f(x)$,若在自变量的某一变化过程中($x\to\infty$或 $x\to x_0$),$f(x)$无限趋近于某一确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$($x\to\infty$或 $x\to x_0$)的极限.

(2) 左、右极限

左极限:$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$(自变量 x 从 x_0 左侧趋于 x_0 时函数的极限).

右极限:$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$(自变量 x 从 x_0 右侧趋于 x_0 时函数的极限).

(3) 函数极限存在的条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\\ x+1, \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$,求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}f(x)$,$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)$.

解 $x_0=\dfrac{\pi}{3}$不是分界点,左、右侧表达式一样,因此

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x=\frac{1}{2}.$$

$x_0=\frac{\pi}{2}$是分界点，左、右侧表达式不一样，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x=0,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(x+1)=\frac{\pi}{2}+1.$$

$x_0=\frac{\pi}{2}$处的左、右极限不相等，因此 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$不存在.

注：用左、右极限来判定极限的存在性，一般只对分段函数在分界点处求极限时使用.

10. 两个重要极限

(1) 第一重要极限公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

推广：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

使用技巧：

$$\boxed{\lim_{☆\to 0}\frac{\sin ☆}{☆}=1}$$

注：第一重要极限主要解决"$x\to 0$ 时，$\frac{0}{0}$型未定式极限"问题.

(2) 第二重要极限公式

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\text{ 或}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

推广：

$$\lim_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}.$$

使用技巧：

$$\boxed{\lim_{☆\to\infty}(1+\frac{1}{☆})^{☆}=\mathrm{e}}\text{ 或 }\boxed{\lim_{☆\to 0}(1+☆)^{\frac{1}{☆}}=\mathrm{e}}$$

注：第二重要极限主要解决"$x\to\infty$或 $x\to 0$ 时，1^∞ 型未定式极限"问题.

11. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小

以 0 为极限的变量称为无穷小量，简称"无穷小".

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\tan x=0$，则称当 $x\to 0$ 时，$\tan x$ 是无穷小量. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$，则称当 $x\to\infty$时，$\sin\frac{1}{x}$是无穷小量.

(2) 无穷大

绝对值无限增大的变量称为无穷大量，简称"无穷大".

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，则称当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}$是无穷大量. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$，则称当 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{x-1}$是无穷大量.

(3) 无穷大与无穷小的关系

在同一变化过程中，

① 若 $f(x)$是无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小；

② 若 $f(x)$是无穷小且 $f(x)\neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大.

(4) 无穷小的性质

性质 1：有限个无穷小的代数和是无穷小.

性质 2：有限个无穷小的乘积是无穷小.

性质 3：常量与无穷小的乘积是无穷小.

性质 4：有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(5) 无穷小的阶

设当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$时(以下用 $x\to\cdots$表示)，α 和 β 都是无穷小，则

① 若$\lim\limits_{x\to\cdots}\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 较高阶的无穷小；

② 若$\lim\limits_{x\to\cdots}\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 较低阶的无穷小；

③ 若$\lim\limits_{x\to\cdots}\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小；

④ 若$\lim\limits_{x\to\cdots}\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$(其中“$\sim$”为“等价符号”).

12. 等价无穷小替换

定理：设 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$都是同一变化过程中的无穷小，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，若$\lim\limits_{x\to\cdots}\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则有

$$\boxed{\lim_{x\to\cdots}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to\cdots}\frac{\beta'}{\alpha'}}$$

此定理表明：在求两个无穷小之比的极限时，分子和分母都可以用等价无穷小替换，如果替换得当，则可简化极限计算.

等价无穷小替换的原则：

① 只对函数的因子可作等价无穷小替换；

② 该因子首先必须是无穷小量.

当 $x\to 0$ 时，有如下等价无穷小.

$\sin x\sim x$；　$\tan x\sim x$；　$\arcsin x\sim x$；　$\arctan x\sim x$；

$e^x-1\sim x$；　$\ln(1+x)\sim x$；　$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$；

$a^x-1\sim x\ln a(a>0)$；　$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$($\alpha\neq 0$ 且为常数)；

$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

13. 函数的连续与间断

(1) 函数连续的概念

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在 x_0 连续.

函数连续满足的三个条件：

① $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义；

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在；

③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$（即极限值等于该点函数值）.

（2）间断点

若 $f(x)$在 x_0 处不满足以上三条中的任意一条，则 x_0 为函数 $y=f(x)$的间断点.

（3）间断点分类

① 第一类间断点（左、右极限都存在）

$$\begin{cases}\text{在点 } x_0 \text{ 处左、右极限都存在但不相等} \Rightarrow \text{（跳跃间断点）} \\ \text{在点 } x_0 \text{ 处左、右极限存在且相等} \begin{cases}\text{但 } f(x_0) \text{ 无意义} \\ \text{或} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)\end{cases} \Rightarrow \text{（可去间断点）}\end{cases}$$

② 第二间断点（除第一间断点之外的/至少有一侧极限不存在）

$$\begin{cases}\text{在点 } x_0 \text{ 处左、右极限至少有一个为} \infty \Rightarrow \text{（} x_0 \text{ 为无穷间断点）} \\ f(x) \text{ 的值在某两个值之间变动无限次} \Rightarrow \text{（} x_0 \text{ 为震荡间断点）}\end{cases}$$

例如：$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$，在 $x=0$ 处无定义，$x=0$ 是间断点；$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$（至少有一侧极限不存在），故 $x=0$ 是 $f(x)$的第二类间断点.

又如：$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，在 $x=0$ 处无定义，所以 $x=0$ 是间断点，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，极限存在，故 $x=0$ 是 $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$的第一类间断点.

（4）初等函数在其定义域上的连续性

注： 分段函数不是初等函数，判断其在分界点处的连续性需用左、右极限.

例 9　判断 $f(x)=\begin{cases}x+1, x<0 \\ e^x, x\geqslant 0\end{cases}$的连续性，并求连续区间.

解　（1）$f(x)$有定义；

（2）$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=0+1=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x=e^0=1$，所以有极限；

（3）$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)=e^0=1$，所以 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续，连续区间为$(-\infty,+\infty)$.

14. 闭区间上连续函数的性质

（1）最大值最小值定理

设 $f(x)$在$[a,b]$连续，则它在该区间上至少取得最大值和最小值各一次.

（2）零点定理

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)=0.$$

（3）介值定理推论

在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

三、求极限方法归纳

1. 利用极限的运算法则求极限

若在同一变化过程中,设$\lim\limits_{\cdots} f(x)=A$,$\lim\limits_{\cdots} g(x)=B$,则

$\lim\limits_{\cdots}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{\cdots} f(x)\pm\lim\limits_{\cdots} g(x)=A\pm B$,

$\lim\limits_{\cdots}[kf(x)]=k\lim\limits_{\cdots} f(x)=kA$,

$\lim\limits_{\cdots}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{\cdots} f(x)\cdot\lim\limits_{\cdots} g(x)=A\times B$,

$\lim\limits_{\cdots}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{\cdots} f(x)}{\lim\limits_{\cdots} g(x)}=\dfrac{A}{B}$. $\quad(\lim\limits_{\cdots} g(x)=B\neq 0)$

注:"$\lim\limits_{\cdots}$"此处表示"$x\to\infty$或 $x\to x_0$ 时取极限".

例 1 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-6x+5}$.

解 由于分母的极限$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-6x+5)=2\neq 0$,故由商的极限运算法则有

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-1}{3x^2-6x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-6x+5)}=\frac{1}{2}.$$

2. $\dfrac{0}{0}$型求极限

方法 1:先因式分解,然后消零因子.

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x+2}=1$.

方法 2:先共轭,后消零因子(含有根式的$\dfrac{0}{0}$型).

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}$.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(3-x)-(1+x)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)(1+x)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{2(1-x)}=-2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$型求极限

方法:分子和分母同时除以变量 x 的最高次幂.

例 4 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{6x-8}$;

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2-x}{2x^3-5}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+1}{4x^2+7x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{6x-8}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{5}{x}}{6-\dfrac{8}{x}}=\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2-x}{2x^3-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{5}{x^3}}=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+1}{4x^2+7x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}$,因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=3$,

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x+1}{4x^2+7x}=\infty.$$

结论:一般地,当 $x\to\infty$ 时,有理分式函数的极限有以下结果:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, n=m \text{ (分子最高次幂=分母最高次幂)}.\\ \infty, n>m\end{cases}$$

注: 今后可直接应用上述公式求“$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式”的极限问题.

4. ∞－∞型求极限

方法:先通分,再约分.

例 5 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+1-2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$