HIT

全国优秀数学教师专著系列

Sequence of Numbers and Inequality

数列与不等式

甘志国 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Sequence of Numbers and Inequality

数列与不等式

全国优秀数学教师专著系列

数列与不等式

Sequence of Numbers and Inequality

甘志国 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书是一部高中数学教学参考用书，共分为两部分：数列、不等式，系统、详尽地阐述了高中数学解题技巧，有理论、有实践. 本书注重科学性、系统性和趣味性，书中共含 46 篇小文章，每篇文章各自独立成文，所以本书可系统性地研读，也可有选择性地阅读. 本书可作为高三复习备考用书，也可供中学、大学师生及初等数学爱好者研读，或作为高中数学竞赛辅导资料和师范大学数学教材教法方面的教材.

图书在版编目(CIP)数据

数学解题与研究丛书. 数列与不等式/甘志国著.
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014. 1
ISBN 978 - 7 - 5603 - 4425 - 6

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①甘…　Ⅲ. ①中学数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 274065 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张　佳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 18. 25　字数 328 千字
版　　次　2014 年 1 月第 1 版　2014 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 4425 - 6
定　　价　38. 00 元

◎序言

我在读小学时，就喜欢上数学课，喜欢作数学题.喜欢的原因很简单(学数学只需一张纸、一支笔和一个不太聪明的大脑就行了)，从作题中也体验到了成功的喜悦；到了读中学时，这种兴趣就更强烈了，每天除了完成学习任务之外，就是到学校图书室去借阅各种数学习题集作，也翻阅《数学通报》、《数学通讯》等数学杂志；到了参加工作时，更是酷爱数学这门科学了，一边进行数学教学，一边攻读大学数学课程和研究生课程，还利用一切业余时间进行初等数学研究，并有不少论文发表(几乎每周都有论文发表在期刊上)，哈尔滨工业大学出版社分别于2008、2009年出版了我的专著《初等数学研究(Ⅰ)》、《初等数学研究(Ⅱ)》(总计230万字)，这两部书也很受读者喜爱，有网友说它们是数学教学中的"圣经"，也有网友留言"他确实是我相当佩服的老师，如果高中时他能教我那该多好啊！可惜我现在已经到了大学，不过我还是对初等数学充满了强烈的兴趣，他的《初等数学研究》让我十分着迷".

我是如何学数学并获得一些快乐的，从哈尔滨工业大学出版社第一编辑室主任刘培杰在《初等数学研究(Ⅰ)》(哈尔滨工业大学出版社，2008)中所写的序言(这篇《序言》也被《中学数学教学参考》(上旬)2008年第10期转载)里可以找到部分答案：

甘先生的研究历程带给我的感受有三点.

一是坚持的重要.甘先生如同中国象棋中的小卒,一直向前拱到底线终成大器.一位青年数学教师写一篇小文章并不难,难的是坚持数十年,由青年而至中年,一篇积成几百篇,这就要有一种精神了,这可能就是湖北人的韧劲.甘先生不是天才,但勤奋有加,靠后天努力终成正果.

二是定位的自觉.搞研究定位十分重要,它决定着将来学问的规模,层次与格调,有些人眼高手低,非世界难题不搞,结果与自身能力不相配匹,终落得"壮志未酬身先死".单墫教授曾有比喻,二流人才搞三流问题,结果必是一流的,而二流人才搞一流问题,其结果必是三流的.甘先生定位准确,结合本职工作,立足岗位成材,主攻初等数学研究,终于取得了可喜的成果.

三是对事业的热爱.曾国藩曾在其家书中告诫自己的后代,交友一定要交有嗜好有癖之人.后代不解,追问没有嗜好没有癖的人有何不可,曾国藩说:"其没有深情也!"对某项事业、某种物件、某位佳人一往情深是一个人幸福的基础,也是事业成功的必要条件.甘先生就是一位对初等数学情有独钟,嗜数如命的青年教师.曾经贫穷过,曾经疾病过,但都不改初衷,坚持钻研,并从中得到了乐趣.法国数学家泊松(Poisson Simeon Denis Baron, 1781—1840)有一句名言:人生最大的乐趣有二,一为数学的发现,一为数学的教学.甘先生兼而有之想必人生充满乐趣.

一位教育专家曾说,教师有两种类型:一类是"为生存而教育",一类是"为教育而生存".甘先生显然是后者.现在随着国家对教育的重视,中学教师特别是数语外教师靠自己的知识和劳动也跻身于中产阶级行列.享受生活成为了这一阶层的生活核心,如C·赖特·密斯瓦所说:"中产阶级的气质意味着对自己的生活感到满意,意味着形而上学的情思的枯竭,意味着人生的终极关怀的丧失,意味着探索精神之路的断绝."我们很高兴看到甘志国式的青年教师有追求有理想有成果.1996年美国"数学与美国未来全国委员会"发表了引发转折的标志性报告《至关重要:美国未来的数学》,其中提出"高胜任教师"(highly qualified teacher)的概念.可以断言,只有不断钻研初等数学的中学数学教师才能是一位新时代的高胜任教师.

英国《泰晤士报》曾刊发过一篇题为《未来是橙色的》的署名文章.其中介绍了一个奇特现象,那就是北纬53°盛产数学家.据安德鲁斯大学研究人员计算得出:过去的400年中,54%的数学家出生在北纬53°

的地方.这个国外的研究结论在中国是否适用不得而知,但中国有句俗语:"天上九头鸟,地上湖北佬".湖北人聪明勤奋,数学自然不弱,读完甘先生的大作相信你一定会有这样的感觉:唯楚有才!

我喜欢轻松与享受,例如,倾听优美的音乐与品尝可口的美味,但是许多科学实验已经证明,永远的"轻松与享受"的代价就是寿命的减短,因此生物的本性需要在"轻松与享受"和"劳累和克服"之间来回振荡.我认为,如果一本书能在轻松之间让读者对某种对象产生了兴趣,虽然是一种成功,但如果到此为止,就有些不够.这就像一位人士被你说得胃口大开,正想去实际品尝一下,却不知餐馆在何处一样.所以我的愿望是既让你有了胃口,又要能让你吃到一些真实的菜.即使这道菜以你目前的水平还不能享受,但是经过努力学习后,就随时可以享用了.

我还想回答一个问题,就是学习数学是需要吃一些苦的,是需要克服一些困难的,克服这些困难实际上是对自己的一种磨练,是自己对自己的强制与要求.于是有的人就要问,那你为什么要受这种苦?值得吗?我的回答是:爱什么是不需要任何理由的!甘愿吃苦的原因和动力来自对数学的喜爱,就因为你就是这种人,你的回报就在于你每一次得知答案时的满足和享受.

你可以不受这些苦,但你也就体会不到那种快乐.

我认真研读过冯贝叶编著的《数学拼盘和斐波那契魔方》(哈尔滨工业大学出版社,2010),该书《序言》末的一首小诗也写出了我对数学的挚爱,现抄录下来(略有改动)供数学爱好者欣赏:

美丽的数学女神

你就像一个蒙着神秘面纱的美丽女神,
面纱的后面总是闪耀着宝石的光芒;
红宝石,蓝宝石,绿宝石,
多姿多彩,吸引着我去摘取.

但是,当我想揭开这面纱,
摘取这些迷人的宝石的时候,
我却发现,
这里有很多机关.
我必须,先回答一些问题,

找出答案后，
才能获得你的微笑.
伴随着你的微笑，
一颗带着芳香的小宝石，
轻轻落入我的手心.
啊！多么美丽，多么雅致，
像有一股可口的清泉，滋润着我的心田.
我用一个精致的盒子将这颗宝石收藏，
作为永久的纪念.

我是这样的贪心，
得到一颗宝石之后，
还想立即摘取下一颗，
而你的问题就愈加困难.

随着我收藏的宝石的增多，
这困难就成了折磨，
但我甘愿忍受你的折磨，
因为，不让我忍受你的折磨，
本身就是一种更大的折磨.

这宝石，我不时拿出来欣赏，
每当此时，就是我最大的快乐.
不要问我，
这宝石值多少钱?
可能在你看来，它一钱不值，
但是对我来说，
它却是无价之宝.

美丽的女神，
经过一生的追求，
我才知道，
你的魅力，
就在于，
蒙在你脸上的面纱，

永远不可能彻底揭开.
但是,你又是那样慷慨,
只要对你有追求,
你就有无穷的宝石,
伴随着你的微笑,
再次落到我的手中.
所以,我要永远追求你,
永远享受着你的折磨.

我还想敬告本书的部分读者——高中生,学习数学一定要建立在喜欢的基础上,也就是要培养浓厚的兴趣.同学们要深信以下三点:

第一,数学是有用的.

宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学.

——华罗庚

数学是科学的女皇.

——高　斯

一门科学只有成功地运用数学,才算达到真正完善的地步.

——马克思

发表在《人民日报》的文章《数学——撬起未来的杠杆》(该文曾选入高一(下)语文自读课本)中写道:"数学家们还介绍,美国国家研究委员会从1984年起,向美国政府提出了四份关于美国数学和数学教育的报告.报告指出:高技术的出现把我们的社会推到了数学技术的新时代,'很少有人认识到,被如此称颂的高技术,本质上是数学技术'.报告说:未来社会最好的工作和岗位,属于准备好了处理数学问题能力的人;数学已不单是一门学科,而且是重要的潜在资源;现今技术发达的社会里,扫除'数学盲'的任务已取代了扫除'文盲'的任务."

这些名言及论述都说明了数学的重要性和作用.

我们来举一个漂洗衣服的例子吧:

在洗衣服时,衣服上已打好了肥皂,揉搓得很充分了,再拧一拧,当然不能把水全部拧干,设衣服上还有残留污物的水1 kg,用20 kg的清水来漂洗,怎样才能漂洗得更干净?

方案1　如果把衣服一下子放到20 kg的清水中,那么连同衣服上那1 kg水,一共21 kg水.让污物均匀分布到这21 kg水中,拧"干"后,衣服上还有1 kg水,所以污物残留量是原来的1/21.

方案2　通常我们会把20 kg水分两次用,比如,第一次用5 kg,可使污物减少到1/6;再用15 kg水,污物又减少到1/6的1/16,即1/96.分两次漂洗,效

果好多了！

方案3 同样分两次漂洗，也可以每次用 10 kg 水，每次可使污物减少到原来的 1/11，两次漂洗后，污物减少到原有量的 1/121.

多学点数学，并用数学的眼光看世界，将会使你的生活更美好！（可见笔者发表于《中学数学杂志》2010(11)第 57～60 页的文章《数学，让你生活得更美好》）

第二，学数学是需要花时间的.

在欧几里得(Euclid，约前 330—前 275)的时代，学点几何学是很时髦的事. 托勒密(κανδιοξπτολαματοξ，约 90—168)国王也来请欧几里得教他学几何，但没学多久，国王就不耐烦了，问欧几里得，学习几何有没有更简便的方法. 欧几里得答道："学习几何无王者之道！"意思是，在几何学里，没有专门为国王铺设的康庄大道！

数学以计算为主，所以，作一道题是需要花时间的，比如，作一道解析几何题就要花半个小时，小学生作"36×37"这样的一道题也要花一两分钟，而作一道文科的选择题可能只需一瞬间. 当然，这里不是说学数学要花很多时间，我们干任何事情都要争取达到"会者不难"的一种境界，只是在打好数学基础时肯定要花时间，甚至是大量的时间. 学好数学必须作题，并且是有效率地作题，我曾经发表过"思探练变题"的解题法(见《中小学数学》(高中)2009(12):7)，值得大家在学习高中数学时借鉴. 学数学，要打好基础，绝不可只顾盲目作题，要反思、要总结.

本书中的练习题都是我在二十多年的高中数学教学中积累下来的. 我善于积累，在平时的教学中，遇到一道好题，认真研究后记载下来，供以后教学时使用. 这就是本书中练习题的来历，所以本书中的习题，读者应抽出时间认真完成(可作为考试来对待)，这样，你才会有大的收效.

学数学，要特别重视思考，且不能急于求成. 我有时想一道题，要想几年(当然是间断地想)才获解决.

第三，不要畏惧数学，因为数学好学.

我认为，数学学科的规律性最强，题意清楚明白，不会出现模棱两可的现象，有公式可套，有例题可仿，打好基础、适当训练、循序渐进、注重反思，就可学好数学.

最后，作为一名经常战斗在高三教学第一线的数学老师，多次亲历了学子们的顽强战斗. 也作为你们的朋友，针对你们的高考复习备考，我想对你们说几句知心话.

吃苦耐劳，无怨无悔. 诚然，高中学习是够累的，没有双休日，很少有节假日，早上 6∶30 就开始起床，晚上 10∶30 还不能上床休息，用"披星戴月"这个

词来形容是再恰当不过的了.但是,要把学习搞好,必须有充足的学习时间,谁在时间上拥有了优先权,谁就可能在学习上赢得竞争的胜利.同学们,别以为人生漫长,美国人是这样算出一生的学习时间的:一生以60年计,穿衣梳洗5年,路途旅行5年,娱乐8年,生病3年,打电话1年,照镜子70天,擤鼻涕10天,……这样,即使一个人终生学习,学习时间也不足12年,不够4 300天.高中三年更是求学的黄金时期,千万不要浪费每一点时间.同学们,也别埋怨求学时间短暂,雷巴柯夫曾强调:"时间是一个常数,但对勤奋者来说,又是一个变数,用'分'来计算时间的人比用'时'来计算时间的人时间多59倍."如何争取时间,也听两首通俗的诗吧:一首是"无事此静卧,一日算半日,若活七十岁,只算三十五."另一首是"无事此静坐,一日算两日,若活七十岁,便是百四十."有迟到习惯的同学,你还能天天迟到吗?

康熙皇帝是中国历史上很有作为的一位帝王,在位长达61年之久.他一生不仅勤勉为政,还酷爱自然科学.康熙皇帝14岁时,看到新旧历法之争相当激烈,自己因对自然科学知之不多,而无法判明是非,于是暗下决心要努力学习自然科学,并拜请比利时传教士南怀仁(Ferdinand Verbiest,1623—1688)为师.因每日需早朝,故只能把学习时间安排在早朝前,命南怀仁半夜起床赶到宫中上课,小康熙刻苦学习、虚心请教,按时交纳作业.一位封建帝王竟如此好学,我们高中生还能懒惰吗?

鼓足信心,扬起理想风帆. 斗转星移,以前每次考试成绩的酸甜苦辣都将与我们一一作别,或是成功,或是失败,或是顺航,或是逆流,都成了无可挽留的昨天.古人云:"弃我去者,昨日之日不可留.为什么你总对过去纠缠不休而耿耿于怀呢?"从今天开始,让我们带着灿烂的、甜蜜的笑脸,怀揣超脱喜悦的心情,重新打扮一下自己,你便是一个全新的你:有信心,有理想,自然就会有抱负,有作为.

勤奋拼搏,弹奏壮丽凯歌. 同学们一定从电视上欣赏过体育竞赛的激动场面,上千人上万人的体育运动会都是有的,运动员的拼搏精神值得我们认真学习.我们要努力,我们要拼搏.人生难得几回搏,此时不搏,更待何时?

成长不可无书,成功不能无知.据说美国历史上曾有这样的两个家族,一个是爱德华家族,其始祖爱德华是位满腹经纶的哲学家,他的八代子孙中出了13位大学校长,100多位教授,20多位文学家,20多位议员和一位副总统;另一个家族的始祖叫珠克,他是个缺乏文化修养的赌徒和酒鬼,他的八代子孙中有300多位乞丐,7个杀人犯和60多个盗窃犯.同学们,一个人有没有文化修养,竟能产生如此源远流长的影响.你是作一个造福子孙的"拼搏者",还是作一个遗臭万年的"懒汉"呢?

同学们,你们是凭才学才选择并实现读××高中的,××高中每年都要走

出数以千计的大学生，很多大学生又要通过自己的刻苦努力在知识上成为金字塔尖上的佼佼者. 实际上，你们离这些佼佼者并不遥远，在高考前的这一阶段，再努一把力，调整好心态，你也可以同他们一样成为佼佼者.

下面，也赋诗一首《奔向远方》与你们共勉：

满怀青春的憧憬与幻想，我匆匆前行.

我仿佛听见远方的呼唤：

走吧，朋友！让我们鼓起风帆，去搏击狂风去搏击恶浪去搏击苦涩的日子吧！远方有旖旎的风光，远方有壮丽的辉煌，远方是太阳升起的地方.

走吧，朋友！放飞你蓝色的梦，去讴歌生命去讴歌壮丽去讴歌远方的风景吧！不要再贪恋港湾的的温馨了，它不过是暂时栖息的地方；不要采撷往日的绿叶，它已随秋风舞落在地，不要回眸身后孤寂的足迹，它已被涨起的海潮冲得无影无踪.

走吧，朋友！只要我们不息地奋斗，我们都能达到那理想的绿地！

祝高三学子在高考中取得优异成绩！

谢谢大家！

甘志国

北京丰台二中

2013 年 8 月 1 日

◎ 目录

数　　列

第 1 章

§1　已知的三个数能为某个等差(比)数列的项的充要条件

1. 引子

2009 年第 8 期《数学通讯》(下半月)"争鸣"栏刊登的问题 181 中证明了"1,$\sqrt{2}$,3 不可能是一个等差数列中的三项",接着又给出了"1,$\sqrt{2}$,3 能否为一个等比数列中的三项"的两种不同的解答:

解法 1　假设存在这样的等比数列,设公比为 q,则可设 $\sqrt{2}=q^m,3=q^n,m,n\in\mathbf{N}^*$.

由 $\sqrt{2}=q^m$,得 $q=2^{\frac{1}{2m}}$,代于 $3=q^n$,从而可知 $2^{\frac{n}{2m}}=3,2^n=3^{2m}$,得 2^n 有约数 3,这不可能!所以不存在这样的等比数列,使 1,$\sqrt{2}$,3 为其中的三项.

解法 2　假设存在这样的等比数列,设公比为 q,则可设 $\sqrt{2}=q^m,3=q^n,m,n\in\mathbf{N}^*$.

两式相除得 $\frac{\sqrt{2}}{3}=q^{m-n}$,则 $m-n=\log_q\frac{\sqrt{2}}{3}$.该式左边为有理数,右边只要调节 q 的值完全可以使对数的值为有理数,所以存在这样的等比数列,使 1,$\sqrt{2}$,3 为其中的三项.

本文将指出解法 1 的结论正确，但推理有误（由$\sqrt{2}=q^m$，只能得$|q|=2^{\frac{1}{2m}}$，不能得$q=2^{\frac{1}{2m}}$），把$|q|=2^{\frac{1}{2m}}$代入$3=|q|^n$得$2^{\frac{n}{2m}}=3,2^n=3^{2m}$. 这样推理才严谨.

解法 2 中取对数的错误可这样纠正：

由$\frac{\sqrt{2}}{3}=q^{m-n}$得$q=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{\frac{1}{m-n}}$，所以$3=q^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{\frac{n}{m-n}}$，$3^{m-n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$，$3^m=(\sqrt{2})^n$，$3^{2m}=2^n$，该式不可能成立，所以选不出同时满足$\sqrt{2}=q^m,3=q^n,m,n\in\mathbf{N}^*$的 q.

［苏］C. E. 里亚平等编，盛世雄译，1980 年上海教育出版社出版的《初等代数习题集》第 285 页第 75 题是“数 $2,\sqrt{6},4.5$ 能不能是等比数列或等差数列的项”，第 444 页的解答和提示为“不可能是等差数列的项，可能是等比数列的项：$q=\sqrt[2n-2m]{\frac{6}{4.5^2}}$”.（也可见甘志国著《初等数学研究（Ⅰ）》（2008 年哈尔滨工业大学出版社）第 308 ～ 310 页）

本节将讨论以上问题的一般情形：寻求已知的三个数能为某个等差（比）数列的项的充要条件.

为了研究的方便，本节把数列$\{a_n\}$拓广为自变量 n 取全体整数，所以等差数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=a_0+nd$（d 是公差，$n\in\mathbf{Z}$），等比数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=a_0q^n$（q 是公比，$n\in\mathbf{Z}$）.

2. 已知的三个数能为某个等差数列的三项的充要条件

定理 1 当已知的三个复数 a,b,c 中有相等的数时，当且仅当它们全相等时，它们能是某个等差数列的项，且这个等差数列是常数列.

定理 2 当已知的三个复数 a,b,c 两两不等时，当且仅当$\frac{c-a}{b-a}\in\mathbf{Q}$（则可设$\frac{c-a}{b-a}=\frac{v}{u}$（$u,v\in\mathbf{Z},uv\neq 0$）时，它们能是等差数列的项，比如是等差数列$\left\{c+\frac{b-a}{u}(n-v-k)\right\}$（$k$ 是已知的任意整数）的第 $k,k+u,k+v$ 项.

证明 若 a,b,c 是某个等差数列的项，可不妨设 a,b,c 依次是等差数列$\{a_n\}$（设其公差为 d）的第 $0,k,l$ 项（$k,l\in\mathbf{Z}$），得

$$\begin{cases}a=a_0\\ b=a_0+kd\\ c=a_0+ld\end{cases},\frac{c-a}{b-a}=\frac{l}{k}$$

所以$\frac{c-a}{b-a}\in\mathbf{Q}$.

当$\frac{c-a}{b-a}=\frac{v}{u}(u,v\in\mathbf{Z},uv\neq0)$时，容易验证$a,b,c$分别是等差数列$\left\{c+\frac{b-a}{u}(n-v-k)\right\}$的第$k,k+u,k+v$项.

所以定理2成立.

当a,b,c依次增大或依次减小时，由$\frac{c-a}{b-a}=\frac{v}{u}(u,v\in\mathbf{Z},uv\neq0)$得$u,v$同号，所以$a,b,c$可以是等差数列$\left\{c+\frac{b-a}{u}(n-v-k)\right\}$项数依次增大的三项（比如第$k,k+u,k+v$项，其中$k,u,v\in\mathbf{N}^*$），也可以是该等差数列项数依次减小的三项（比如第$k,k+u,k+v$项，其中$k+v,-u,-v\in\mathbf{N}^*$）. 当$a,b,c$（每两个都不相等）不是依次增大也不是依次减小时，则a,b,c不能是某个等差数列项数依次增大的三项，也不能是某个等差数列项数依次减小的三项（因为公差不为0的等差数列是递增数列或递减数列）.

以下对等比数列的研究限定在实数范围内.

定理3　当已知的三个非零实数a,b,c中有绝对值相等的数时，当且仅当它们的绝对值全相等时，它们能是某个等比数列的项，且这个等比数列的公比是1或-1，当$|a|=|b|=|c|\neq0$且a,b,c同号即$a=b=c\neq0$时，公比可以是1也可以是-1；当$|a|=|b|=|c|\neq0$且a,b,c不全同号时，公比只能是-1.

定理4　当已知的三个正实数a,b,c两两不等时，当且仅当$\log_{\frac{b}{a}}\frac{c}{a}\in\mathbf{Q}$（则可设$\log_{\frac{b}{a}}\frac{c}{a}=\frac{v}{u}(u,v\in\mathbf{Z},uv\neq0)$）时，它们能是等比数列的项，比如是等比数列$\left\{c\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-v-k}{u}}\right\}$（$k$是已知的任意整数）的第$k,k+u,k+v$项.

证明　若a,b,c是某个等比数列的项，可不妨设a,b,c依次是等比数列$\{a_n\}$（设其公比为q）的第$0,k,l$项（$k,l\in\mathbf{Z}$），得

$$\begin{cases}a_0=a\\ b=a_0q^k,|q|=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{l}},\log_{\frac{b}{a}}\frac{c}{a}=\frac{l}{k}\\ c=a_0q^l\end{cases}$$

所以$\log_{\frac{b}{a}}\frac{c}{a}\in\mathbf{Q}$.

当$\log_{\frac{b}{a}}\frac{c}{a}=\frac{v}{u}(u,v\in\mathbf{Z},uv\neq0)$时，容易验证$a,b,c$分别是等比数列$\left\{c\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-v-k}{u}}\right\}$的第$k,k+u,k+v$项.

所以定理4成立.