

Design of the adaptive X-bar control
chart and its application

动态X—bar 控制图的研究 及其应用

郭志芳 著



知识产权出版社

全国百佳图书出版单位

动态 $\bar{X} - \text{bar}$ 控制图的研究及其应用

郭志芳 著



知识产权出版社

全国百佳图书出版单位

图书在版编目 (CIP) 数据

动态 $\bar{X}$ -bar 控制图的研究及其应用/郭志芳著. —北京: 知识产权出版社, 2014. 6
ISBN 978-7-5130-2596-6

I. ①动… II. ①郭… III. ①企业管理—质量管理 IV. ①F273. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 040603 号

内容提要

本书在系统的梳理国内外动态控制图研究成果的基础上, 改进了统计性能和经济性能的分析方式; 采用三个状态的马尔可夫链方法构建带有转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的状态空间, 减少状态空间的维数; 提出一种新的转换规则, 简化放松控制的转换规则, 进一步充实转换规则理论; 将转换规则应用到动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图、SVSSI $\bar{X}$ 控制图设计中, 为转换规则在其他动态控制图中的应用提供思路和方法。

本书可以作为从事质量管理、动态控制图优化等方面的研究人员和研究生的参考书, 也可作为质量管理培训人员和实际工作者的参考书。

责任编辑: 国晓健

责任出版: 谷 洋

动态 $\bar{X}$ -bar 控制图的研究及其应用

DONGTAI $\bar{X}$ -bar KONGZHITU DE YANJIU JIQI YINGYONG

郭志芳 著

出版发行: 知识产权出版社有限责任公司

社 址: 北京市海淀区马甸南村 1 号

责编电话: 010-82000860 转 8385

发行电话: 010-82000860 转 8101/8102

印 刷: 北京中献拓方科技发展有限公司

开 本: 787mm × 1092mm 1/16

版 次: 2014 年 6 月第 1 版

字 数: 200 千字

ISBN 978-7-5130-2596-6

网 址: <http://www.ipph.cn>

邮 编: 100088

责编邮箱: guoxiaojian@cnipr.com

发行传真: 010-82000893/82005070/82000270

经 销: 各大网上书店、新华书店及相关专业书店

印 张: 12.75

印 次: 2014 年 6 月第 1 次印刷

定 价: 39.00 元

出版版权专有 侵权必究

如有印装质量问题, 本社负责调换。

前言

随着经济全球化的深入，产品质量的竞争日益激烈。统计过程控制是一种可以提高产品质量、节约生产成本的有效方法，而控制图是它的主要工具之一。因此，控制图的应用和研究成果也越来越丰富。

传统的控制图是静态的，控制图的3个设计参数（抽样区间、样本容量、控制限）在控制过程中保持不变。而近期发展的控制图是动态的，控制图的3个设计参数中至少有一个要根据过程的实际状态进行调整，这种动态设计可以使控制图更快检测到过程的异常波动。但在动态控制图的操作中，仅根据当前样本的信息来决定下一个样本设计参数的选取，会造成设计参数之间的频繁转换，不利于控制图在实际中的应用。为了解决这个问题，研究者在动态控制图的设计中加入了转换规则。

本书以带有转换规则的动态 $\bar{X}$ ($\bar{X}$ -bar) 控制图为研究对象，借鉴相关动态控制图的研究成果，通过分析转换规则对动态 $\bar{X}$ 控制图运行的影响，对转换规则的理论和方法进行系统研究、改进和推广，希望为进一步完善和提高动态 $\bar{X}$ 控制图的性能奠定基础。

书中构建了3种类型的转换规则运行模式，定量分析加入转换规则所带来的动态控制图统计、经济性能。通过数值例子得出，选取适当的转换参数可以使动态 $\bar{X}$ 控制图的统计性能和经济性能均得到改进。

本书从传统动态 $\bar{X}$ 控制图的设计开始，运用马尔可夫链方法构造了动态 $\bar{X}$ 控制图模型，在梳理衡量动态 $\bar{X}$ 控制图优劣的性能指标的基础上，推导出各个

性能指标的表达式, 在统计设计中, 增加考虑了衡量参数转换次数的指标 ANSW, 同时在经济设计中增加考虑了由于参数转换而产生的费用。通过经典的例子, 对动态 $\bar{X}$ 控制图的统计性能和经济性能进行对比分析, 阐明各类动态 $\bar{X}$ 控制图的性能特点。进一步运用试验设计和遗传算法, 分析费用参数、时间参数对动态 $\bar{X}$ 控制图最优设计参数选取的影响。研究结果表明, 增加参数转换的费用后, 动态 $\bar{X}$ 控制图的经济性能依旧比静态控制图的经济性能好, 而且参数的转换费用和取样的费用是影响动态 $\bar{X}$ 控制图单位时间费用的主要因素。

经过对动态 $\bar{X}$ 控制图的性能分析之后, 本书的第二步将 B&L 转换规则引用到动态 $\bar{X}$ 控制图的设计中, 克服传统动态 $\bar{X}$ 控制图参数转换过于频繁的缺点, 使得动态控制策略在实际中更易于应用。首先基于传统的 3 种状态的马尔可夫链模型, 设定、分析带有 B&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的状态, 应用概率统计知识推导出带有 B&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的初始概率和状态转移概率。运用对比分析方法, 说明各个转换参数的 B&L 转换规则对动态 $\bar{X}$ 控制图的性能的影响。从结果中可以看出, B&L 转换规则的加入可以使得动态 $\bar{X}$ 控制图检测异常原因的能力增强, 同时单位时间的费用也会减小。

本书的第三步从带有 A&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的设计开始。相比 B&L 转换规则的加紧控制策略, A&L 转换规则通过放松控制来减少控制图设计参数之间的转换次数。现有的关于 A&L 转换规则的研究并没有使用马尔可夫链模型, 这不易于 A&L 转换规则在其他控制图中的推广, 而且在 A&L 转换规则的研究中存在一些不合理的地方。针对这些问题, 采用 3 种状态的马尔可夫链模型构建了带有 A&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的状态空间, 推导出该控制图的初始概率和状态转移概率, 从经济设计和统计设计两个角度分析 A&L 转换规则的各个转换参数对动态 $\bar{X}$ 控制图性能的影响。研究结果表明, 带有 A&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图节约的费用主要集中在检测异常原因的费用和参数转换的费用。

紧接着, 本书对带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的设计进行研究。根据 A&L 转换规则和 B&L 转换规则的特点, 提出了一个新的 M&N 转换规则。相比 A&L 转换规则, M&N 转换规则是一种简化的放松控制策略。同样, 运用马尔可夫链方法构建了带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的状态空间, 分析

不同 M 、 N 取值下的带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的统计和经济性能。结果表明, M&N 转换规则可以加快动态 $\bar{X}$ 控制图对异常原因的检测速度, 但对动态 $\bar{X}$ 控制图经济性能的影响并不明显。

无论什么控制图, 动态的设计策略均会存在参数转换次数频繁的问题, 因此, 本书将 B&L 转换规则、M&N 转换规则推广到动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图、特殊的动态 $\bar{X}$ 控制图的设计中, 分析加入 B&L 转换规则和 M&N 转换规则后, 动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图、特殊的动态 $\bar{X}$ 控制图的统计性能和经济性能。

最后, 以本书研究的带有转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图模型为基本工具, 研究了实例中的控制问题。对比分析各类转换规则对 VSI $\bar{X}$ 控制图性能改进的效果, 应用遗传算法得到最优的控制策略和相应的设计参数, 以实现更有效的监控, 为转换规则在实际监控中的应用提供指导。

本书的研究、写作和出版得到了太原科技大学博士科研启动项目“带有转换规则的动态均值控制图的优化设计研究”(编号 W20132001) 的资助。

由于动态控制图的复杂性和涉及的理论及内容较多, 加之本书为理论探讨性著作, 还存在需要进一步研究探讨的问题; 再者笔者学术水平十分有限, 故难免存在不足之处, 希望专家、学者以及广大读者给予批评指正。

目 录

第1章 绪 论	1
1.1 研究背景	1
1.2 国内外研究现状综述	2
1.2.1 关于动态 $\bar{X}$ 控制图的统计设计的研究	3
1.2.2 关于动态 $\bar{X}$ 控制图的经济设计的研究	6
1.2.3 关于动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的研究	8
1.2.4 关于动态 $\bar{X}$ 控制图改进的研究	9
1.2.5 有待进一步研究的问题及可行的方向	13
1.3 研究意义	14
1.4 研究内容、技术路线和本书结构	15
1.4.1 研究内容	15
1.4.2 技术路线	16
1.4.3 本书结构	17
1.5 本章小结	19
第2章 传统动态 $\bar{X}$ 控制图的设计	20
2.1 引言	20
2.2 动态 $\bar{X}$ 控制图的描述	21

2.2.1	模型假设	21
2.2.2	动态 $\bar{X}$ 控制图描述	22
2.3	动态 $\bar{X}$ 控制图的性能指标	23
2.4	马尔可夫链模型	25
2.5	动态 $\bar{X}$ 控制图的统计性能分析	27
2.6	动态 $\bar{X}$ 控制图的经济性能分析	32
2.6.1	平均的生产周期长度	32
2.6.2	平均费用	33
2.6.3	控制图经济性能比较	34
2.6.4	敏感性分析	36
2.7	本章小结	45
第3章 带有B&L转换规则的动态$\bar{X}$控制图的设计		47
3.1	引言	47
3.2	带有B&L转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图描述	48
3.2.1	模型假设	48
3.2.2	控制图的运行方式	48
3.3	带有B&L转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的转移概率	49
3.3.1	初始概率 p_0	50
3.3.2	状态转移概率 p_{ij}	50
3.4	带有B&L转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的统计性能分析	52
3.4.1	与Bai和Lee的研究结果做比较	52
3.4.2	带有B&L转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的统计性能分析	54
3.4.3	带有B&L转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的参数选取	56
3.5	带有B&L转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的经济性能分析	57
3.5.1	控制图经济性能比较	58
3.5.2	敏感性分析	59
3.6	本章小结	64

第 4 章 带有 A&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的设计	66
4.1 引言	66
4.2 带有 A&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图描述	67
4.2.1 模型假设	67
4.2.2 控制图的运行方式	68
4.3 带有 A&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的转移概率	69
4.3.1 初始概率 p_0	70
4.3.2 状态转移概率 p_{ij}	71
4.4 带有 A&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的统计性能分析	73
4.4.1 与 Bai 和 Lee 的研究结果做比较	73
4.4.2 带有 A&L 转换规则的 VP $\bar{X}$ 控制图的统计性能	74
4.5 带有 A&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的经济性能分析	77
4.5.1 经济性能比较	78
4.5.2 最优解和敏感性分析	80
4.6 本章小结	83
第 5 章 带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的设计	84
5.1 引言	84
5.2 带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图描述	85
5.2.1 模型假设	85
5.2.2 控制图的运行方式	85
5.3 带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的转移概率	86
5.3.1 初始概率 p_0	87
5.3.2 状态转移概率 p_{ij}	87
5.4 带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的统计性能分析	89
5.4.1 与 Bai 和 Lee 的研究结果比较	89
5.4.2 带有 M&N 转换规则的 VP $\bar{X}$ 控制图统计性能比较	91
5.4.3 带有 M&N 转换规则的 VP $\bar{X}$ 控制图参数的选取	94
5.5 带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 控制图的经济性能分析	96

5.5.1	经济性能比较	96
5.5.2	基于遗传算法的最优参数设计	97
5.6	本章小结	99
第 6 章	带有转换规则的动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的设计	100
6.1	引言	100
6.2	传统动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的设计	101
6.2.1	模型假设	101
6.2.2	控制图的运行方式	102
6.2.3	马尔可夫链模型	103
6.2.4	控制图的统计性能分析	105
6.2.5	控制图的经济性能分析	112
6.3	带有 B&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的设计	115
6.3.1	带有 B&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的运行方式 ...	115
6.3.2	带有 B&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的转移概率 ...	116
6.3.3	带有 B&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的 统计性能分析	118
6.3.4	带有 B&L 转换规则的动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的经济性能分析 ...	125
6.4	带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的设计	127
6.4.1	带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的运行方式	127
6.4.2	带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的转移概率	128
6.4.3	带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的统计性能分析 ...	132
6.4.4	带有 M&N 转换规则的动态 $\bar{X}$ 和 R 联合控制图的经济性能分析 ...	141
6.5	本章小结	141
第 7 章	带有 B&L 转换规则的 SVSSI $\bar{X}$ 控制图的设计	142
7.1	引言	142
7.2	传统 SVSSI $\bar{X}$ 控制图的设计	143
7.2.1	SVSSI $\bar{X}$ 控制图的运行方式	143

7.2.2 费用函数	143
7.2.3 性能指标	144
7.2.4 SVSSI $\bar{X}$ 控制图的性能分析	146
7.3 带有 B&L 转换规则的 SVSSI $\bar{X}$ 控制图	149
7.3.1 带有 B&L 转换规则的 SVSSI $\bar{X}$ 控制图的运行方式	149
7.3.2 带有 B&L 转换规则的 SVSSI $\bar{X}$ 控制图的转移概率	150
7.3.3 带有 B&L 转换规则的 SVSSI $\bar{X}$ 控制图的统计性能分析	155
7.3.4 带有 B&L 转换规则的 SVSSI $\bar{X}$ 控制图的经济性能分析	159
7.4 本章小结	160
第 8 章 应用研究	161
8.1 问题描述	161
8.2 参数设计	163
8.3 对比分析	164
8.4 控制图的应用	166
8.5 最优设计	170
8.6 本章小结	171
第 9 章 总结与展望	172
9.1 总结	172
9.2 本书的创新之处	174
9.3 今后的研究方向	175
参考文献	177
后 记	189

第1章 绪 论

1.1 研究背景

21 世纪作为“质量的世纪”^[1]，产品质量的控制和管理理念已风靡世界。在企业运营的千头万绪中，质量的管理与改进成为永恒不变的主题。伴随着 21 世纪和全球经济一体化的到来，以质量为重点的市场竞争日益激烈。一个产品如果没有过硬的质量，就很难在竞争激烈的市场中立足。于是，关于提高和控制产品质量的核心技术与方法就得到了广泛的应用和发展。统计过程控制 (Statistical Process Control, SPC)^[2,3]作为产品质量控制的核心工具，应用数理统计方法在生产过程的各个阶段捕捉质量异常波动的先兆，能有效地监测生产过程是否受控，并解决生产过程中出现的某些问题，从而提高产品质量。

统计过程控制是在 20 世纪 20 年代发展起来的。在 1924 年 5 月，Bell 电话实验室的 Shewhart 博士画出第一张控制图。Dodge 博士、Roming 博士、Jennett 博士以及其他人士迅速地继续了研究。在 1931 年，Shewhart 博士将一篇关于新技术的论文递交给英国 Royal Statistical Society，在英国引起广泛关注。^[4]之后在第二次世界大战中，SPC 在美国和英国的军工业中得到广泛应用和发展，但是在战后的和平时期，SPC 在美国工业中的应用却衰落了。然而，作为战败国的日本意识到了产品质量的重要性，从美国请来了 W. E. Deming 等人担任顾问，推行质量管理，加强过程控制，从西方引进了 SPC 技术，这对 20 世纪 50 年代日本经济的发展起到了重要的作用。SPC 在日本工业得到了广泛的应用和发展。^[5,6]事实证明，SPC 不仅省钱，还可以吸引更多的消费者，可以说，SPC

为日本工业产品迅速占领国际市场起到了巨大的推动作用。^[4]20 世纪 90 年代, 迫于日本产品竞争的压力, SPC 在美国工业中获得复兴。

目前, 随着我国市场经济体制的完善以及全球经济一体化的深入, 我国经济正在逐步融入世界经济, 如果我国工业产品不在质量上下功夫, 单靠低成本和低价格的竞争策略是无法使企业获得长远发展并创造卓越的品牌价值的。事实上, 日本的成功充分表明好的产品可以导致巨大的生产力。因此, 我国必须要加强产品质量的监督与管理, 在提升产品质量、降低生产成本上下功夫, 而 SPC 在这方面扮演着重要的角色。控制图是 SPC 的主要工具之一。

随着计算机技术的快速发展和生产线的广泛应用, 质量控制图技术也得到快速发展和广泛应用。控制图的主要作用是分析判断生产过程的稳定性, 统计控制状态; 及时发现生产过程中的异常现象和缓慢变异, 预防不合格品发生。因此, 研究控制图的主要目的就是不断改善控制图的性能, 提升其监测过程异常原因的能力。Reynolds 等^[7]提出可变抽样区间 (Variable Sampling Interval, VSI) $\bar{X}$ 控制图, 研究结果表明, 可变抽样区间的设计可以显著地提高控制图对异常波动的检测速度, 因此在控制图研究领域萌生了新的研究思路, 希望探索类似的性能改善措施。近年来, 变化参数的思想已经广泛地应用到了各种类型控制图的设计和操作上, 动态控制图成为了一个十分活跃的研究领域。随着计算机科技的发展, 动态控制图在现实中的应用成为可能, Baxley^[8]给出了 VSI 控制图在实际中的应用, 其效果相当不错。因此, 对动态控制图的统计设计和经济设计的研究成为了近年来研究的热点。

1.2 国内外研究现状综述

动态控制策略的思想首先是由 Reynolds 等^[7]提出的, 是运用过程中的样本信息对控制图进行柔性设置, 这种设计方法可以提高控制图的经济和统计性能。近年来, 动态均值控制图的研究成果非常丰富。根据改变参数种类的不同, 动态均值控制图分别被称为可变抽样区间均值控制图、可变样本容量 (Variable Sampling Size, VSS) 均值控制图、联合可变样本容量和抽样区间

(Variable Sampling Size and Sampling Interval, VSSI) 均值控制图、联合可变样本容量和控制限 (Variable Sampling Size and Control Limits, VSSCL) 均值控制图以及全可变参数 (Variable Parameters, VP) 均值控制图。Tagaras^[9]、王兆军^[10-11]给出了动态控制图研究成果的综述。

控制图运用的一个重要因素就是控制图的设计, 即通过一定规则选择控制图的3个参数(抽样区间、样本容量、控制限系数)。在不同的控制参数的组合下, 动态控制图会有不同的性能。文献中常见的设计方法有统计设计和经济设计两种。

1.2.1 关于动态 $\bar{X}$ 控制图的统计设计的研究

统计设计主要从统计性能的角度来分析。常见的统计性能指标有平均运行长度 (Average Run Length, ARL)、平均报警时间 (Average Time to Signal, ATS)、调整平均报警时间 (Adjusted Average Time to Signal, AATS)、报警所需的平均样本数 (Average Number of Sample to Signal, ANSS)、报警所需的平均监测值数 (Average Number of Observations to Signal, ANOS) 和平均转换次数 (Average of Number of Switches, ANSW)。

Reynolds 等运用 VSI $\bar{X}$ 控制图, 首次考虑了动态过程控制。他们认为可以凭借直观感觉选择抽样区间, 其取样策略是, 当样本点靠近目标值时, 认为是没有过程波动的标志, 因此间隔较长的时间抽取下一个样本, 即采用长的抽样区间 h_1 ; 如果样本点靠近, 但依然落在控制限内, 则认为有过程波动的指示, 应该尽快地抽取下一个样本, 即运用短的抽样区间 h_2 。同时, 他们建议短抽样区间 h_2 的取值应该尽可能的小。如果关注小的过程波动, 长抽样区间 h_1 应该取大值, 而如果关注大的过程波动, 长抽样区间 h_1 则应该取小值。Runger 和 Pignatiello^[12]给出了单边控制的详细分析。他们描述了双等待时间程序, 表明了最优化更容易在实际中应用。Reynolds 和 Arnold^[13]研究了单边 VSI $\bar{X}$ 控制图的最优设计。Runger 和 Montgomery^[14]研究了 VSI $\bar{X}$ 控制图的稳态性能, 而且与以前的控制图进行了比较分析。Reynolds^[15]运用马尔可夫链推导出 VSI $\bar{X}$ 控制图的性能指标 ARL。Baxley^[8]表明了 VSI EWMA 控制图在 Pensacola, Florida

的 Monsanto 尼龙化纤工厂的应用。Mahadik 和 Shirke^[16]分析了 VSI 控制策略的优越性,给出了针对任意的区间长度, VSI 控制策略均优越于固定抽样区间控制策略的充分条件,而且他们的研究表明常见的分布如正态分布、T 分布、Laplace 分布均满足充分条件,除此之外, χ^2 分布、F 分布、Beta 分布条件满足充分条件的前提是偏度系数比较小。同时他们指出,如果充分条件得不到满足,这种优越性是不能保证的。郭宝才和孙利荣^[17]研究的过程波动是随机的 VSI $\bar{X}$ 控制图的性能,他们假定过程波动服从瑞利分布。

另一类研究集中在样本容量可变的控制图上。VSS $\bar{X}$ 控制图是由 Parabhu 等^[18]和 Costa^[19]首先研究的。其操作规则和 VSI $\bar{X}$ 控制图非常类似。如果样本点落在警戒区域,则通过增大下一个样本的样本容量,选取大样本容量 n_2 加强控制图对过程异常的检测能力。如果样本落在中心区域,由于没有证据表明过程需要调整,则下一个样本选取小的样本容量 n_1 。他们建议,如果针对的是大的过程波动,小样本容量 n_1 应该取小值,大样本容量 n_2 应该取大值。Zimmer 等^[20]构造了拥有 3 个样本容量参数的可变样本容量 $\bar{X}$ 控制图,他们发现 3 个样本容量参数的控制策略仅微微优于两个样本容量参数的策略,而且复杂度增强,因此在应用中两个样本容量参数的控制策略已经足够了。

联合可变样本容量和抽样区间的 $\bar{X}$ 控制图也已经做了研究。Prabhu 等^[21]研究了 VSSI (或者称为 VSR) $\bar{X}$ 控制图,运用了一组抽样区间、一组样本容量、静态的控制限以及一组警戒限来决定控制图参数的选择。如果当前样本点落在警戒区域,则采用大的样本容量和短的抽样区间抽取下一个样本。如果当前样本点落在中心区域,则采用小的样本容量和长的抽样区间抽取下一个样本。研究表明,在检测中等过程波动时, VSSI $\bar{X}$ 控制图优于 VSS 和 VSI $\bar{X}$ 控制图。有研究者针对 VSSI $\bar{X}$ 控制图研究了两组不同的警戒限,分别用来决定抽样区间和样本容量的参数转换。研究表明,具有两组警戒限的控制图性能与一组警戒限的控制图相比,并没有显著性差异 (Park 和 Reynolds^[22])。Costa^[23]研究了过程开始于受控状态的 VSSI $\bar{X}$ 控制图,他假定过程受控时间服从指数分布,把过程的状态分为 4 个状态:状态 1 为过程处于受控状态样本容量取小的情况;状态 2 为过程处于受控状态样本容量取大的情况;状态 3 和状态 4 分别

为过程处于失控状态样本容量取小和大的情况。运用马尔可夫链方法推导出 VSSI $\bar{X}$ 控制图的统计性能指标。Faraz 和 Saniga^[24]指出 Costa^[23]在构造状态空间时认为, 状态 2 到状态 3 或状态 4 的概率为 0, 这个是不正确的, 他们修正了转移概率, 对 VSSI 控制策略重新进行了分析。Zimmer 等^[25]分别构造了 4 个和 3 个状态的动态样本容量和抽样区间 $\bar{X}$ 控制图。他们的研究表明, 附加的第 3 和第 4 状态策略可以改善控制图的性能, 而且这种改善是相对适当的。Mahadik^[26]把 VSSI 的思想和 VSI 控制思想相结合, 采用了两个抽样区间和 3 个样本容量, 把受控区域划分成 3 个区间, 构造了特殊的 VSSI (SVSSI) $\bar{X}$ 控制图。他的研究表明, SVSSI $\bar{X}$ 控制图检测大的过程波动和小的过程波动的能力分别与 VSI、VSSI $\bar{X}$ 控制图的能力非常相近。

关于联合可变样本容量和控制限的控制图的研究成果比较少, 仅有 Lin 和 Chou^[27]对其统计性能进行了分析。他们的研究表明, 当过程波动比较小时, 相比 VSS 控制图, VSSCL $\bar{X}$ 控制图的 AATS 值更小, 能更快地检测到过程的异常; 但是, 当过程波动比较大时, VSSCL $\bar{X}$ 控制图的 AATS 和 ANOS 值都相对比较大, 会导致更高的取样费用。

所有参数 (即抽样区间、样本容量和控制限系数) 均是变化的 $\bar{X}$ 控制图称为联合的全可变参数 VP $\bar{X}$ 控制图。Costa^[28]研究了 VP $\bar{X}$ 控制图。在 VP $\bar{X}$ 控制图的操作过程中, 如果样本点落在中心区域, 则有理由放松控制, 应用较长的抽样区间、小的样本容量和小的控制限系数。如果样本点落在警戒区域, 则有理由加紧控制, 运用短的抽样区间、大的样本容量和小的控制限系数。研究表明, VP 均值控制图相比复杂的累计和 (CUSUM) 控制策略, 更具有吸引力。De Magalhães^[29]系统地研究了可变参数的 $\bar{X}$ 控制图, 共 7 种控制图, 研究表明, 针对某些特定大小的过程波动, 变换参数少的 $\bar{X}$ 控制图性能更好。

总体而言, 研究表明, VP $\bar{X}$ 控制图在检测过程小的过程波动方面比 VSI、VSS 和 VSSI $\bar{X}$ 控制图的性能都要好, 但是在检测大的过程波动方面, 则不如 VSI $\bar{X}$ 控制图的能力。而且相比而言, VP $\bar{X}$ 图在操作上比较复杂。在 VSI、VSS、VSSI $\bar{X}$ 控制图中, VSI $\bar{X}$ 控制图检测大漂移的能力最强, 而在检测小的过程波动方面, VSSI $\bar{X}$ 控制图的能力最强。在检测适当大小的过程波动方面, VSI 和 VSSI $\bar{X}$ 控制图的能力几乎相同。在一些研究中, VSSI $\bar{X}$ 控制图检测大的

过程波动的性能甚至要比静态 $\bar{X}$ 控制图的性能差。无论是检测多大的过程波动, VSSI $\bar{X}$ 控制图的性能都一致优于 VSS 控制图的性能。

变化参数的控制思想已经被推广到了其他控制图中, 包括可变参数的 $\bar{X}$ 和 R 控制图 (如 Costa^[30~32])、可变参数的 $\bar{X}$ 和 R 控制图 (如张维铭等^[33~36])、可变参数的不合格品数 Pn 控制图 (如 Zhou 和 Lian^[37]、张维铭^[38]、Liu 等^[39]、Wang 和 Ma^[40]、Wu 和 Luo^[41]、Kooli 和 Limam^[42]、Rafajlowica 和 Steland^[43])、可变参数的缺陷数 C 控制图 (如 Epprecht 等^[44])、可变参数的 CUSUM 控制图 (如 Reynolds 等^[45]、Luo 等^[46]、Annadi 等^[47]、Prabhu 等^[48]、Arnold 和 Reynolds^[49]、Wu 等^[50]、De Magalhães^[51])、可变参数的指数加权移动平均 (EWMA) 控制图 (如丛方媛等^[52,53]、Shamma^[54]、Reynolds^[55]、Machado 和 Costa^[56]、Saccucci 等^[57]、Reynolds 和 Arnold^[58]、Epprecht 等^[59])、可变参数的 Hotelling's T^2 控制图 (如 Aparisi 和 Haro^[60]、Alireza 和 Kamyar^[61]、Aparisi^[62]、Faraz 等^[63]、Mahadik 和 Shirke^[64])、可变参数的选控图 (如 Yang 和 Chen^[65]、Yang^[66]、Yang 和 Su^[67]) 以及可变参数的方差图 (如 Aparisi 等^[68]、Machado 和 Costa^[69])。

1.2.2 关于动态 $\bar{X}$ 控制图的经济设计的研究

另一类研究集中在动态控制图的经济设计。经济设计是通过考虑和过程相关的各种费用参数的影响, 构造费用函数, 通过使费用函数最小化来确定控制图的设计参数。常用的经济指标是单位时间的平均费用 ECTU (Expected Cost Per Time Unit)。普遍认为最早的经济模型是 Girshick 和 Rubin^[70]提出的。Duncan^[71]构造了一个经济模型, 用于 Shewhart 均值控制图参数控制限、样本容量以及样本之间的间隔的选取, Duncan 的费用模型包括取样和监测的费用、生产不合格品的费用、误报的费用、搜索异常原因的费用以及剔除异常原因修正过程的费用。自此, 控制图的经济设计受到了大量的关注。针对 Duncan 的模型, 许多研究者结合各种具体的实际情况做了修正。Lorenzen 和 Vance^[72]以及后来的 Von Collani^[73]给出了可以用于所有控制图的一般的经济设计模型。Lorenzen 和 Vance 一般化后的经济模型, 使得 Duncan 经济模型可以应用到不