全国大学生文化素质教育“十二五”规划教材

全国高职高专学生文化基础素质培养精品教材

高等数学

QUANGUO DAXUESHENG WENHUA SUZHI JIAOYU

GAODENG SHUXUE

周孝康　唐绍安　刘秀红　主　编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

全国大学生文化素质教育“十二五”规划教材

全国高职高专学生文化基础素质培养精品教材

高等数学

QUANGUO DAXUESHENG WENHUA SUZHI JIAOYU

GAODENG SHUXUE

周孝康　唐绍安　刘秀红　主　编

宋立温　谭和平　涂立刚　宋秀英　副主编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／周孝康，唐绍安，刘秀红主编．—北京：北京师范大学出版社，2011.8
（全国大学生文化素质教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-303-13246-1

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①周…②唐…③刘…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第160570号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京市易丰印刷有限责任公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：184 mm × 260 mm
印　　张：19.5
字　　数：406千字
版　　次：2011年8月第1版
印　　次：2011年8月第1次印刷
定　　价：29.00元

策划编辑：姚贵平　　责任编辑：姚贵平
美术编辑：高　霞　　装帧设计：天泽润
责任校对：李　菡　　责任印制：孙文凯

出版说明

高等职业教育是新世纪我国高等教育大众化进程中的一个亮点，正由规模扩张转向内涵发展。高等职业教育内涵发展的核心是课程建设。只有有一套充分体现高等职业教育规律、符合高职学生学习特点、与职业岗位或职业岗位群相匹配的课程体系，才能有效发挥高等职业教育的特长，为社会各行各业培养具备全面素质和良好综合职业能力的高层次、应用型人才。

北京师范大学出版社是教育部职业教育教材出版基地之一，有着20余年的职业教育教材出版历史，积累了丰富的高等职业教育教材编辑出版经验。近年来，在教育部高等教育司、职业教育与成人教育司以及北京师范大学的支持下，北京师范大学出版社汇聚教育界、出版界的专家及高等职业院校的优秀教师组建了“全国职业教育教材改革与出版领导小组”，具体负责指导职业教育教材研发工作，以为高等职业教育的课程建设贡献一份力量。目前，我社按照“就业导向、能力本位、任务驱动”等职业教育新理念的要求，研发了高职高专文化基础课、专业主干课教材600余个品种，其中30余种被列为国家级“十一五”普通高等教育规划教材。这些教材具有如下特点：

1. 紧密结合高等职业教育改革与发展的需求。这批教材依据教育部或相关行业协会颁布的课程标准或教学纲要，针对高等职业教育的培养目标，以就业导向、能力本位为指导，以综合职业能力培养为重点，以为学生职业生涯发展服务为目的，设计教材体系、选择教材内容，体现出先进性、科学性和时代性的特点。

2. 针对高职学生的学习特点精心设计教材的栏目。这批教材注重学生学习兴趣的激发，在表现形式上力求灵活多样、新颖精致，既体现教材内容的特点，又与高职高专院校学生的学习习惯、认知能力和相应的职业岗位群的要求相适应。各书有选择地设计了以下栏目：

学习目标：简明扼要地指出各章的学习方向，引导学生有的放矢地学习。

案例分析：以实例创设学习情境，引导学生学习新知识，形成新技能。

提 个 醒：告诉学生在学习相关内容的过程中应注意的问题，以提高学习的效率和效益。

小 思 考：用有趣而有效的问题，启迪学生的思维。

小 资 料：提供相关材料或背景资料，拓展学生的视野。

小 知 识：生动而有趣的知识点，帮助学生吃透学习内容，增强学习兴趣。

本章小结：概括本章的主要内容，有助于学生从整体上把握知识结构和复习巩固所学内容。

思考与练习：精心设计各种类型的练习题，供学生复习、实践使用，以全面提升学生的综合能力。

3. 紧密结合行业发展动态。这批教材充分吸收了行业的新知识、新技术、新工艺、新规范，并注重根据行业的发展及时更新教材的内容，突出教材的职业性与实践性。

4. 形成了立体化、网络化的资源。我们在组织教材研发的过程中，配套研发了电子教案、课件或实验、实习指导材料等。

综合看，这些教材理念先进、内容丰富、形式新颖、语言通俗，注重理论知识的“必需、够用”，更强化以实践能力、创新能力为重点的综合职业能力的培养。

高职高专教材建设是一项复杂的、系统的工作。我们将在未来的日子里，与高等职业教育的改革同行，致力出版精品教材，服务并促进高等职业教育的发展。

全国职业教育教材改革与出版领导小组

前　言

教材建设是高等职业教育工作的重要组成部分. 本书结合高等职业教育的办学特色和《高等数学》教学的实践，既注重数学学科本身的科学性与系统性，又注重高等职业教育的特殊性，力求体现如下特点：

➢ 遵循“以应用为目的，以‘必需、够用为度’”的编写原则.

➢ 联系实际、注重应用，适度论证、重视创新.

➢ 以实用为原则，“教、学、做”融为一体，内容体系整体优化，使学生实现由知识向能力的转化.

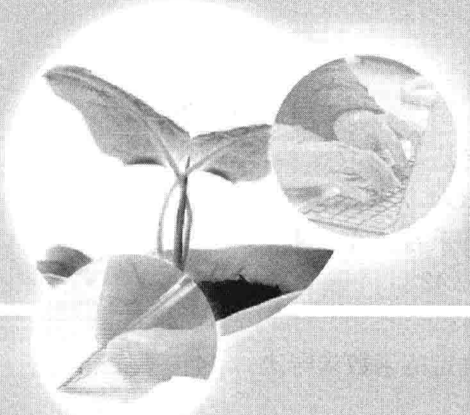
➢ 重视培养学生的数学能力和素质，引导学生学会认识问题、分析问题、解决问题.

➢ 在教学计划编排和授课内容的取舍上，各专业可结合本专业的培养目标进行适当的调整.

本教材由四川航天职业技术学院周孝康、唐绍安和四川电力职业技术学院刘秀红任主编并制订编写计划和大纲、统稿；由宋立温、谭和平、涂立刚、宋秀英任副主编；由唐建玉、何淑芬任主审；由周孝康、刘秀红、唐绍安、谭和平、罗礼敏、涂立刚、文帮云、宋秀英、郭小林、宋立温参与编写.

由于编者水平有限，书中难免存在不足或疏漏之处，恳请各位读者批评指正.

编　者



目　录 contents

第1章　函数　极限　连续 / 1

1.1　**基本初等函数与初等函数** / 1

1.1.1　函数的概念 / 1

1.1.2　函数的简单性态 / 4

1.1.3　基本初等函数 / 4

1.1.4　复合函数、初等函数 / 4

习题 1.1 / 5

1.2　**函数的极限** / 7

1.2.1　极限的概念 / 7

1.2.2　极限的四则运算 / 11

1.2.3　无穷小与无穷大 / 13

1.2.4　两个重要极限 / 16

习题 1.2 / 18

1.3　**初等函数的连续性** / 20

1.3.1　函数连续性的定义 / 20

1.3.2　初等函数的连续性 / 22

1.3.3　闭区间上连续函数的性质 / 23

习题 1.3 / 24

本章小结 / 25

复习题 1 / 27

第2章　一元函数微分学及其应用 / 28

2.1　**导数的概念** / 29

2.1.1　导数的定义 / 29

2.1.2　导数的几何意义 / 33

2.1.3 可导与连续的关系 /34
习题2.1 /35
2.2 **求导法则** /36
2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则 /36
2.2.2 复合函数的求导法则 /37
2.2.3 反函数的求导法则 /40
2.2.4 基本初等函数的求导公式 /42
2.2.5 隐函数的导数 /42
2.2.6 对数求导法 /43
2.2.7 由参数方程所确定的函数求导法 /44
2.2.8 高阶导数 /45
习题2.2 /47
2.3 **微 分** /47
2.3.1 微分的定义 /47
2.3.2 微分的几何意义 /49
2.3.3 微分的运算法则 /50
2.3.4 微分在近似计算中的应用 /51
习题2.3 /53
2.4 **中值定理与洛必达法则** /53
2.4.1 中值定理 /53
2.4.2 未定式的定值法——洛必达法则 /55
习题2.4 /59
2.5 **函数的单调性与极值** /60
2.5.1 函数的单调性 /60
2.5.2 函数的极值 /61
2.5.3 函数的最值与极值的应用 /65
习题2.5 /67
2.6 **曲线的凹向与拐点** /68
2.7 **函数图形的描绘** /70
2.7.1 曲线的渐近线 /70
2.7.2 函数图形的作法 /72
习题2.7 /73
本章小结 /74
复习题2 /75
第3章 一元函数积分学及其应用 /81
3.1 **定积分的基本概念** /81
3.1.1 定积分概念的引入 /81

3.1.2 定积分的定义 /83
3.1.3 定积分的几何意义 /84
习题 3.1 /85
3.2 **定积分的性质** /85
3.2.1 有关积分限的性质 /85
3.2.2 定积分的线性性质 /85
3.2.3 定积分的比较 /86
3.2.4 定积分估值定理 /86
3.2.5 定积分中值定理 /86
3.2.6 积分均值 /86
习题 3.2 /87
3.3 **微积分基本定理与原函数** /87
习题 3.3 /88
3.4 **不定积分的概念与性质** /89
3.4.1 不定积分的概念 /89
3.4.2 不定积分的性质 /90
3.4.3 基本积分公式表 /90
习题 3.4 /92
3.5 **常用积分方法** /92
3.5.1 换元积分法（Ⅰ） /92
3.5.2 换元积分法（Ⅱ） /95
3.5.3 分部积分法 /98
习题 3.5 /101
3.6 **广义积分** /102
3.6.1 函数在无限区间上的积分 /102
3.6.2 无界函数的积分 /103
习题 3.6 /104
3.7 **定积分的应用** /104
3.7.1 直角坐标系下的面积公式 /105
3.7.2 极坐标系下的面积公式 /107
3.7.3 已知平行截面面积的立体体积 /107
3.7.4 旋转体的体积 /108
3.7.5 平面曲线的弧长 /109
习题 3.7 /110
本章小结 /110
复习题 3 /113

第 4 章 无穷级数 / 115
4.1 **级数的基本概念** / 115
4.1.1 级数的概念 / 115
4.1.2 级数的性质 / 118
习题 4.1 / 120
4.2 **常数项级数的审敛法** / 121
4.2.1 正项级数的审敛法 / 121
4.2.2 交错级数的审敛法 / 124
4.2.3 绝对收敛与条件收敛 / 124
习题 4.2 / 125
4.3 **幂 级 数** / 126
4.3.1 函数项级数 / 126
4.3.2 幂级数的定义 / 127
4.3.3 幂级数的收敛性 / 128
4.3.4 幂级数的运算 / 131
习题 4.3 / 133
4.4 **函数的幂级数展开式** / 134
4.4.1 泰勒级数 麦克劳林级数 / 134
4.4.2 函数展开为幂级数的直接方法 / 135
4.4.3 函数展开为幂级数的间接方法 / 136
4.4.4 幂级数的应用 / 138
习题 4.4 / 141
4.5 **傅立叶级数** / 142
4.5.1 三角级数 三角函数系的正交性 / 142
4.5.2 以 2π 为周期的函数的傅立叶级数 / 144
4.5.3 正（余）弦级数 / 148
习题 4.5 / 150
4.6 **周期为 T 的函数的傅立叶级数和定义在有限区间上的函数的傅立叶级数** / 151
4.6.1 周期为 T 的函数的傅立叶级数 / 151
4.6.2 定义在有限区间上的函数的傅立叶级数 / 153
习题 4.6 / 157
4.7 **傅立叶级数的复数形式** / 158
习题 4.7 / 160
本章小结 / 161
复习题 4 / 162

第 5 章 常微分方程 / 165

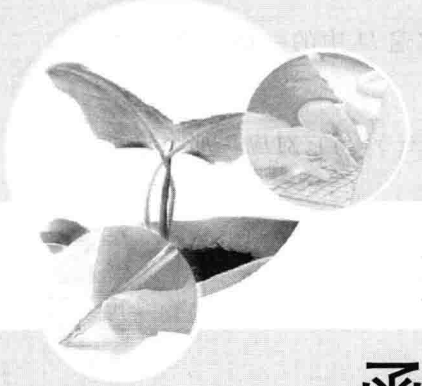
5.1 微分方程的基本概念 / 165
习题 5.1 / 168
5.2 可分离变量的微分方程 / 169
5.2.1 可分离变量的微分方程 / 169
5.2.2 齐次方程 / 172
习题 5.2 / 173
5.3 一阶线性微分方程 / 174
5.3.1 一阶线性齐次微分方程的解法 / 174
5.3.2 一阶线性非齐次微分方程的解法 / 175
习题 5.3 / 178
5.4 可降阶的二阶微分方程 / 178
5.4.1 $y''=f(x)$ 型 / 178
5.4.2 $y''=f(x, y')$ 型 / 179
5.4.3 $y''=f(y, y')$ 型 / 179
习题 5.4 / 180
5.5 二阶线性微分方程及其解的结构 / 181
习题 5.5 / 183
5.6 二阶常系数线性齐次微分方程 / 183
习题 5.6 / 186
5.7 二阶常系数线性非齐次微分方程 / 187
5.7.1 $f(x)=p_m(x)e^{\lambda x}$ 型 / 187
5.7.2 $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$ / 190
习题 5.7 / 192
本章小结 / 192
复习题 5 / 194

第 6 章 多元函数微分学 / 197

6.1 预备知识 / 197
6.1.1 空间解析几何简介 / 197
6.1.2 平面上的区域 / 204
习题 6.1 / 204
6.2 多元函数的基本概念 / 205
6.2.1 多元函数的概念 / 205
6.2.2 二元函数的极限 / 206
6.2.3 二元函数的连续性 / 207
习题 6.2 / 209
6.3 偏导数 / 209

6.3.1 偏导数的概念及其计算 /209
6.3.2 高阶偏导数 /212
习题 6.3 /213
6.4 全微分及其应用 /213
6.4.1 全微分的概念 /213
6.4.2 全微分与偏导数的关系 /214
习题 6.4 /215
6.5 多元复合函数的求导法则 /216
6.5.1 复合函数微分法 /216
6.5.2 隐函数的微分法 /219
习题 6.5 /220
6.6 二元函数的极值与最值 /220
6.6.1 二元函数的极值 /220
6.6.2 二元函数的最值 /222
6.6.3 条件极值与拉格朗日乘数法 /223
习题 6.6 /226
本章小结 /226
复习题 6 /228
第 7 章 多元函数积分学 /231
7.1 二重积分的概念与性质 /231
7.1.1 二重积分的概念 /231
7.1.2 二重积分的定义 /233
7.1.3 二重积分的性质 /233
习题 7.1 /235
7.2 二重积分的计算 /235
7.2.1 在直角坐标系中计算二重积分 /235
7.2.2 在极坐标系中计算二重积分 /239
习题 7.2 /241
7.3 二重积分的应用举例 /242
7.3.1 平面图形的面积 /242
7.3.2 立体图形的体积 /243
7.3.3 平面薄片的质量 /244
习题 7.3 /244
本章小结 /244
复习题 7 /246
第 8 章 线性代数初步 /248
8.1 行列式 /248

8.1.1 行列式的定义 /248
8.1.2 行列式的性质 /253
8.1.3 行列式的计算 /258
8.1.4 克莱姆法则 /260
习题 8.1 /264
8.2 **矩 阵** /265
8.2.1 矩阵的概念 /265
8.2.2 矩阵的运算 /266
8.2.3 矩阵的应用 /271
习题 8.2 /273
8.3 **矩阵的初等行变换** /274
8.3.1 初等行变换的定义 /274
8.3.2 初等矩阵 /274
8.3.3 阶梯矩阵与行简化阶梯矩阵 /275
习题 8.3 /277
8.4 **矩阵的秩** /278
8.4.1 矩阵秩的定义 /278
8.4.2 用初等行变换求矩阵的秩 /279
习题 8.4 /280
8.5 **逆矩阵** /280
8.5.1 逆矩阵的定义 /280
8.5.2 可逆矩阵的判定 /280
8.5.3 用初等行变换求逆矩阵 /282
习题 8.5 /284
8.6 **线性方程组** /285
8.6.1 线性方程组概述 /285
8.6.2 齐次线性方程组 /287
8.6.3 非齐次线性方程组 /289
8.6.4 线性方程组的应用实例 /291
习题 8.6 /293
本章小结 /294
复习题 8 /294



第 1 章

函数　极限　连续

学习目标

1. 理解函数的概念.
2. 掌握基本初等函数的性质和图像.
3. 熟练掌握复合函数的复合过程.
4. 理解函数极限、函数左、右极限以及极限存在的充要条件.
5. 熟练掌握函数极限的计算方法.
6. 掌握无穷小与无穷大的关系.
7. 理解无穷小与极限之间的关系，会用无穷小的性质求极限.
8. 掌握运用两个重要极限计算极限的方法.
9. 理解函数在一点连续和在区间连续的概念.
10. 会求初等函数的间断点并判断间断点的类型，掌握分段函数在分界点上的连续性.

1.1　基本初等函数与初等函数

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

定义 1　设 D 是一个实数集，如果对于 D 中的每一个数 x，变量 y 按照某种对应法则 f，总有确定的值与之对应，那么就称 y 为定义在数集 D 上的 x 的函数，记做 $y=$

$f(x)$，x 称为自变量，数集 D 称为函数的定义域．当 x 取定 x_0 时，与 x_0 对应的值称为函数在点 x_0 的函数值，记做 $y_0=y\Big|_{x=x_0}=f(x_0)$．当 x 取遍 D 中的一切实数值时，对应的函数值的集合 M 叫做函数的值域．

在函数的定义中，如果对于每一个 $x\in D$，都有唯一的 $y\in M$ 与它对应，那么这种函数称为单值函数，否则称为多值函数．

以下如不作特别说明，则研究的都是单值函数．

2. 函数的两个基本要素

函数的对应法则 f 和定义域 D 称为函数的两个基本要素．

(1)对应法则 f

例 1 函数 $f(x)=3x^2-2x+5$，f 确定的对应规律为：

$$f(x)=3(\quad)^2-2(\quad)+5.$$

解 如 $f(3)=3(3)^2-2(3)+5$.

$f(a+b)=3(a+b)^2-2(a+b)+5$.

$f(x^2+1)=3(x^2+1)^2-2(x^2+1)+5$.

(2)定义域

函数的定义域就是自变量的取值范围．在实际问题中，应根据实际意义来确定定义域．

例 2 求下列函数的定义域．

①$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$.　　②$y=\lg\dfrac{x}{x-1}$.

解 ①因为 $4-x^2\neq 0$，所以 $x\neq\pm 2$．因为 $x+2\geqslant 0$，所以 $x\geqslant -2$．函数的定义域为$(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

②因为$\dfrac{x}{x-1}>0$，所以 $x<0$ 或 $x>1$．函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

两个函数只有当它们的定义域和对应法则完全相同时，这两个函数才认为是相同的．

例 3 下列函数是否相同，为什么?

①$y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$；

②$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$；

③$y=x^2$ 与 $y=u^2$.

解 ① $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$ 是相同的函数，因为对应法则和定义域都是相同的．

②$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$ 不是相同的函数，因为定义域不同．

③$y=x^2$ 与 $y=u^2$ 是相同的函数，因为对应法则和定义域均相同．

3. 函数与函数值的记号

y 是 x 的函数，可记为 $y=f(x)$，但在同一个问题中，如需要讨论几个不同的函数，就要用不同的函数记号来表示，如 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=y(x)$，$y=s(x)$等.

当 x 取定 x_0 时，与 x_0 对应的 y_0 值称为函数在点 x_0 的函数值，记做 $y_0=y\mid_{x=x_0}=f(x_0)$.

若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义.

例 4　设 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$，$f(x^2+1)$.

解　$f(2)=0$，$f(-2)=\dfrac{|-4|}{-1}=-4$，$f(0)=\dfrac{|-2|}{1}=2$，

$f(a)=\dfrac{|a-2|}{a+1}$，$f(a+b)=\dfrac{|a+b-2|}{a+b+1}$，$f(x^2+1)=\dfrac{|x^2-1|}{x^2+2}$.

4. 函数的表示法

表示函数的方法常用的有公式法(也称解析法)、表格法(也称列表法)、图像法(也称图示法)3 种.

有时，一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的解析式表示，如：

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$是定义在$(-\infty, +\infty)$内的一个函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$，当$x<0$时，$f(x)=-x$，如图 1-1 所示.

在定义域不同的区间上用不同的解析式来表示的函数称为分段函数.

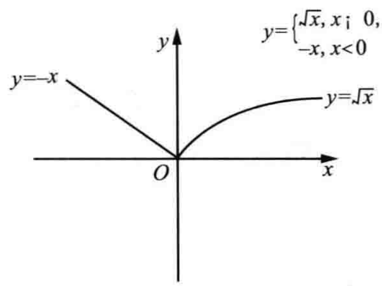


图 1-1

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的解析式中进行计算.

如：在上面的分段函数中，$f(4)=\sqrt{4}=2$，$f(-4)=-(-4)=4$.

5. 反函数

定义 2　设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于 M 中的每一个 y 值($y\in M$)，都可以从 $y=f(x)$确定唯一的 x 值($x\in D$)与之对应，那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$或 $x=f^{-1}(y)$叫做函数 $y=f(x)$的反函数，它的定义域为 M，值域为 D，$y=f(x)$称为直接函数.

习惯上，函数的自变量用 x 表示，所以反函数也可写为 $y=\varphi(x)$或 $y=f^{-1}(x)$. 称 $y=\varphi(x)$或 $y=f^{-1}(x)$为 $y=f(x)$的矫形反函数；称 $x=\varphi(y)$或 $x=f^{-1}(y)$为 $y=f(x)$的直接反函数.

1.1.2 函数的简单性态

1. 单调(增、减)性

定义 3 如果函数 $f(x)$对定义区间 I 内的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上单调增加，区间 I 称为单调增区间；若总有$f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在 I 上单调减少，区间 I 称为单调减区间. 单调增区间或单调减区间统称为单调区间.

2. 奇偶性

定义 4 如果函数 $f(x)$对关于原点对称的定义区间 I 内的任意一点 x，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；若总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

3. 有界性

定义 5 如果函数 $f(x)$对定义区间 I 内任意 x，总有 $|f(x)|\leqslant M$，其中 M 是一个与 x 无关的常数，则称 $f(x)$在区间 I 上有界，反之称为无界.

4. 周期性

定义 6 函数 $f(x)$，若存在一个常数 $T\neq 0$，对定义区间 I 上任意 x，有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数. 通常所说的函数的周期是指其最小正周期.

1.1.3 基本初等函数

我们学过的常数函数 $y=C$(C 为常数)，幂函数 $y=x^\mu$(μ 为常数)，指数函数$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)，对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$，$x>0$)，三角函数$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$ 统称为基本初等函数.

这些函数的定义域、值域、图像和性质，以后会经常用到.

1.1.4 复合函数、初等函数

1. 复合函数

在实际应用中，常会遇到由几个简单的函数组合而成的较为复杂的函数. 如自由落体的动能 E 是速度 v 的函数$E=\dfrac{1}{2}mv^2$，而速度 v 又是时间 t 的函数$v=gt$. 因而，动能 E 通过速度 v 的关系，构成关于 t 的函数关系式为 $E=\dfrac{1}{2}m(gt)^2$. 类似地，由三角函数 $y=\sin u$ 与幂函数 $u=x^2$ 可构成函数 $y=\sin x^2$.

定义 7 如果 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$的值域全部或部分包含在函数 $y=f(u)$的定义域内，那么 y(通过 u 的关系)也是 x 的函数，则称这样的函数为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称为复合函数. 记做 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**.

复合函数的概念可以推广到多个中间变量的情形.

正确分析复合函数的构成，是掌握微积分方法的关键.