高等院校经济管理学科**数学**基础教材

应用
线性代数

YingYong XianXing DaiShu

主编 黄秋灵 宋 浩

经济科学出版社
Economic Science Press

◎ 高等院校经济管理学科数学基础教材 ◎

应用线性代数

主　编　黄秋灵　宋　浩
副主编　郭　磊　蔺厚元
　　　　徐鹏晓　王玉霞

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

应用线性代数/黄秋灵，宋浩主编．—北京：经济科学出版社，2014.8

ISBN 978 - 7 - 5141 - 4961 - 6

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①黄…②宋…　Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材　Ⅳ.①O151

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 194493 号

责任编辑：柳　敏　李晓杰
责任校对：靳玉环
责任印制：李　鹏

应用线性代数

主　编　黄秋灵　宋　浩
副主编　郭　磊　蔺厚元
　　　　徐鹏晓　王玉霞

经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：010 - 88191217　发行部电话：010 - 88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
北京季蜂印刷有限公司印装
710×1000　16 开　15.5 印张　330000 字
2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷
印数：0001—5000 册
ISBN 978 - 7 - 5141 - 4961 - 6　定价：28.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010 - 88191502）

前 言

线性代数是高等学校经济类、管理类各本科专业的学科基础课,是学习后续课程的基础。线性代数起源于处理线性关系问题,它是代数学的一个分支,由于线性问题广泛存在于科学技术领域、工农业生产和国民经济各部门,且某些非线性问题在一定的条件下也可转化为线性问题来处理,所以线性代数的理论和方法有着广泛的应用性。从人才素质培养方面来讲,线性代数同时也是培养大学生理性思维品格和思辨能力的重要载体,是开发大学生潜在能动性和创造力的重要基础。因此,线性代数知识是大学生应必备的文化修养之一。

本教材是根据教育部颁布的财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲、教学改革的需要以及教学实际情况编写而成,是我校教研课题"独立学院经管类专业数学课程的教学改革与实践"研究成果之一,是作者依据多年丰富的教学实践经验和对高校经济管理类专业培养应用型人才的教学改革的认识,并汲取了国内外优秀教材的优点编写而成。

本书的编写以基础为主、够用为度、学以致用的原则,力求使学生在较为系统地掌握线性代数的概念、思想和方法的同时,掌握线性代数的基本理论及其简单应用,为今后的工作与学习打下必要的数学基础和良好的数学素养。

本书在内容安排和编写形式上,充分考虑应用型本科院校学生的特点,我们在概念的引入、理论的展开、篇章的过渡,尽可能从学生熟知的实例出发,并选择恰当的切入点,由浅入深,循序渐进,融会贯通。由于多数学生更容易接受形象化的概念,本书对主要概念都给出了几何解

释,较多的图形增强了本书的几何趣味。本书既重视理论基础,又注重实际应用,对于多数理论证明作了适当的弱化处理,代之以简单直观的举例验证或归纳说明,并在众多学科中选用了一些实际应用的例子,以激发学生的学习兴趣,使学生在掌握线性代数的基本概念、基本理论和基本方法的同时,能够了解线性代数这一数学工具在工程技术、经济管理等领域中的实际作用。

本书主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和二次型。本书每节后配置相应的思考题和练习题,每章后配置复习题。在习题的配置上,既注意选编体现基本方法的计算题和需要思考的概念题,又注意选编体现线性代数在解释基本原理、简化计算等方面的应用题。

本书适合作为高等院校经济管理类各专业该课程的教材或参考书,也适合报考经济学和管理学门类硕士研究生的读者参考。讲授全书共需68学时,还可根据专业需要和不同的教学要求删减部分内容,供51学时讲授使用。

本书由山东财经大学黄秋灵、宋浩任主编,由刘贵基教授审定和统稿。参加编写的人员还有郭磊、蔺厚元、徐鹏晓、王玉霞。在编写过程中,参考和借鉴了国内外的有关资料,得到了同行专家的帮助以及经济科学出版社的大力支持,在此谨致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中难免有不足之处,我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正,使本书在教学实践中能够不断完善。

编　者

2014年6月

目　录

第一章
行　列　式

本书前三章以线性方程组为主线展开讨论,它是线性代数的核心. 线性方程组应用广泛,超过百分之七十五的科学研究和工程应用中的数学问题都涉及求解线性方程组. 线性代数的研究最初出现于对行列式的研究上,行列式当时被用来求解线性方程组. 本章介绍行列式的定义、性质,行列式的计算及克莱姆法则.

§1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　二阶和三阶行列式

对于含两个未知量两个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1}$$

利用加减消元法,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,方程组(1)有唯一解:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

为了便于记忆上述解的公式(2),我们引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{3}$$

它的横排叫行、竖排叫列，$a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示它在第 i 行，叫作行标；第二个下标 j 表示它在第 j 列，叫作列标．二阶行列式表示的代数和可根据图 1－1 来记忆，即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积（见图 1－1）：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

图 1－1

利用二阶行列式的概念，式(2)中的分母、分子可分别记为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

于是得，当 $D\neq0$ 时，方程组(1)有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}.$$

容易看出，D 是由方程组(1)的未知量的系数按原来顺序排列所确定的二阶行列式，称为方程组(1)的系数行列式．D_1 是 D 中 x_1 的系数所在列对应换成常数项所得二阶行列式，D_2 是 D 中 x_2 的系数所在列对应换成常数项所得二阶行列式．本节后面讨论的三元线性方程组情形类似，不再说明．

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2=3, \\ 3x_1-4x_2=-2. \end{cases}$$

解 由方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=1\times(-4)-(-2)\times3=2$$

得方程组有唯一解．又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -16, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -11,$$

所以,方程组的解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -8, x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{11}{2}.$$

为了三元线性方程组的求解需要,我们引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$,称为**三阶行列式**,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式所表示的代数和可按图 1－2 中的 6 条连线记忆:实线上三个元素相乘得到的积前冠以"+"号,虚线上 3 个元素相乘得到的积前冠以"－"号,这称为三阶行列式的**对角线法则**.①

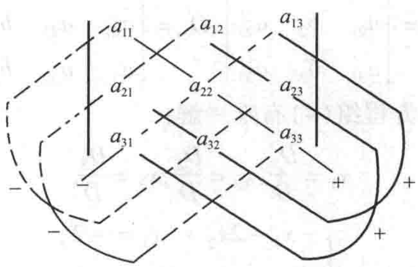

图 1－2

例 2 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times0\times6 + 2\times5\times(-1) + 3\times4\times0 \\ -1\times5\times0 - 2\times4\times6 - 3\times0\times(-1) \\ = -58.$$

① 对角线法则是由法国数学家萨鲁斯(P. F. Sarrus,1798 ~ 1861)引入的. 萨鲁斯在行列式计算法则、函数最大值及微分方程可积性条件方面做了许多工作.

例 3 设 $D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,求当 a,b 满足什么条件时,有 $D=0$.

解 $$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a\times a\times 1+b\times 0\times 1+0\times(-b)\times 0$$
$$-a\times 0\times 0-b\times(-b)\times 1-0\times a\times 1$$
$$=a^2+b^2,$$
因此,当 $a=b=0$ 时,$D=0$.

类似于二元线性方程组的结论,对于三元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{4}$$
记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$
若系数行列式 $D\neq 0$,则方程组(4)有唯一解:
$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 4 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

解 由方程组的系数行列式
$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0,$$
得方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\1&1&-3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&0&-1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-5,$$

所以,方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

在实际问题中,遇到的线性方程组往往含有更多的未知量,在理论上就要讨论含有 n 个未知量的线性方程组的求解问题,我们希望可以得到与二元、三元线性方程组类似的结论. 为此,引入 n 阶行列式的概念.

1.1.2 n 阶行列式

1. 排列与逆序

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组,称为一个 n 级**排列**.

例如,2431 是一个 4 级排列;45321 是一个 5 级排列;$123\cdots n$ 是一个 n 级排列,且它的数是按从小到大的顺序排列的,称为 n 级自然排列.

由 $1,2,\cdots,n$ 一共可以组成 $n!$ 个 n 级排列,即 n 级排列的总数为 $n!$. 例如,3 级排列的总数为 $3!=6$,它们是 123,231,312,132,213,321.

定义 1.1.1 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 前面($i_s>i_t$),则称 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**(inverse order). 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数称为它的**逆序数**,记作 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**,逆序数为奇数的排列称为**奇排列**. 规定逆序数是零的排列为偶排列.

例如,$N(2431)=4$,于是排列 2431 是偶排列;$N(45321)=9$,故排列 45321 是奇排列;$N(123\cdots n)=0$,因而排列 $123\cdots n$ 为偶排列.

一般地,排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数可如下求出:

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=k_1+k_2+\cdots+k_{n-1},$$

其中 $k_j(j=1,2,\cdots,n-1)$ 表示排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中 i_j 后面比 i_j 小的数的个数.

例 1 求 $N(n(n-1)\cdots 321)$.

解 $N(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$

$$=\frac{n(n-1)}{2}.$$

例 2 求 $N(347986512)$.

解 $N(347986512)=2+2+4+5+4+3+2+0=22.$

定义 1.1.2 在排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,若把某两个数 i_s 与 i_t 的位置互换,而其余的数位置不动,就得到另外一个新排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,这种变换称为**对换**,记作对换$(i_s,i_t)$.

例如,排列 2431 经对换(2,1)就变成排列 1432. 注意到排列 2431 为偶排列,而排列 1432 为奇排列,一般地,我们有下面定理.

定理 1.1.1 对换改变排列的奇偶性.

定理的意思是,奇排列经过一次对换变成偶排列,偶排列经过一次对换变成奇排列.

证明从略.

定理 1.1.2 在 $n!$ 个 n 级排列中,奇排列、偶排列的个数相等,各为$\frac{n!}{2}$ $(n\geqslant 2)$.

证明从略.

2. n 阶行列式的定义

首先考察三阶行列式的定义,从三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1}$$

可以看出,式(1)右边是由位于不同行不同列的 3 个元素按行标排成自然顺序的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$(所有这样的乘积都出现在式(1)的右边),并且冠以符号 $(-1)^{N(j_1j_2j_3)}$,得到形如

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{2}$$

的项的和,其中 $j_1j_2j_3$ 为 3 级排列. 当 $j_1j_2j_3$ 取遍所有 3 级排列(共 3! 个)时,由式(2)即得式(1)右端中的所有项.

根据上面分析,式(1)可写为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有3级排列求和.

对于二阶行列式进行类似的分析,可得相同的结论. 至此,不难定义 n 阶行列式.

定义 1.1.3 n 阶行列式①为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{3}$$

式(3)左边通常称为 n 阶行列式的记号,有时简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$,它的横排称为行,竖排称为列,共 n 行 n 列. $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的元素,共 n^2 个. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示它在第 i 行,称为行标;第二个下标 j 表示它在第 j 列,称为列标. 式(3)右边称为 n 阶行列式的展开式,按照展开式计算得到的结果称为行列式的值. $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ ($j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列)是行列式展开式中项的一般形式,它是取自不同行不同列的 n 个元素按行标排成自然顺序乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,并冠以符号 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时,就得到 n 阶行列式展开式中的所有项(共 $n!$ 项). $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

一阶行列式 $|a|$ 就是数 a,即 $|a|=a$.

常用字母 D 来表示行列式,在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中,元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 所在的斜线位置称为 D 的**主对角线**.

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 按行列式的定义,D 的展开式中共有 $4!=24$ 项,其一般形式为:

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}, \quad (j_1j_2j_3j_4\text{ 为一个 4 级排列})$$

其中 $a_{ij_i}(i=1,2,3,4)$ 表示取自第 i 行第 j_i 列的元素. 显然,只有 $j_1=4$、$j_2=3$、

① 行列式(determinant)的概念要追溯到德国数学家莱布尼兹(G. W. Leibniz,1647~1716年). 克莱姆(G. Cramer)是第一个(1750年)发表有关这个主题的人. 行列式的基础理论奠基于 A. Vandermonde, P. Laplace, A. L. Cauchy, C. G. J. Jacobi 等人的工作. "行列式"这个名词首先(1801年)由 C. F. Gauss 使用. 现代意义的行列式概念和符号是由法国数学家柯西(A. L. Cauchy,1789~1857年)于1841年创立的,行列式的理论完善于19世纪.

$j_3=2$、$j_4=1$ 时，这一项不为零，其余所有项均为零．因此，

$$D=(-1)^{N(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=(-1)^6\times1\times2\times3\times4=24.$$

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解 按行列式的定义，D 的展开式中每一项的因子必有第 1 行的一个元素，也就是必有一个因子为 0，从而展开式中的所有项均为 0，所以 $D=0$.

一般地，我们有下面结论：若行列式的某行（列）元素全为 0，则此行列式的值等于 0.

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解 按行列式的定义，D 的展开式中共有 $n!$ 项，其一般形式为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},\quad (j_1j_2\cdots j_n\text{ 为一个 }n\text{ 级排列})\tag{4}$$

其中 $a_{ij_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 表示取自第 i 行第 j_i 列的元素．因含有因子 0 的项都等于零，故只需将那些可能不为零的项找出来．在式(4)中，a_{1j_1} 取自第 1 行，显然只有当 $j_1=1$ 时，式(4)才可能不为零，即可能不为零的项的形式为

$$(-1)^{N(1j_2j_3\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n},\quad (1j_2j_3\cdots j_n\text{ 为一个 }n\text{ 级排列})\tag{5}$$

在式(5)中，a_{2j_2} 取自第 2 行，而 j_2 不能取 1（因 a_{21} 与 a_{11} 同列），又当 $j_2=3,4,\cdots,n$ 时，$a_{2j_2}=0$，因此只有当 $j_2=2$ 时，式(5)才可能不为零，即可能不为零的项的形式为：

$$(-1)^{N(12j_3\cdots j_n)}a_{11}a_{22}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n},\quad (12j_3\cdots j_n\text{ 为一个 }n\text{ 级排列})$$

这样推下去，可得只有

$$(-1)^{N(123\cdots n)}a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

这一项可能不为零，于是

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{N(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$