"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

工程数学

线性代数

第六版

同济大学数学系 编

高等教育出版社

"十二五"普通高等教育

工程数学
线性代数
第六版

同济大学数学系 编

GONGCHENG SHUXUE XIANXING DAISHU

高等教育出版社·北京

内容提要

本书由同济大学数学系多位教师历经近两年时间反复修订而成。此次修订依据工科类本科线性代数课程教学基本要求（以下简称教学基本要求），参照近年来线性代数课程及教材建设的经验和成果，在内容的编排、概念的叙述、方法的应用等诸多方面作了修订，使全书结构更趋流畅，主次更加分明，论述更通俗易懂，因而更易教易学，也更适应当前的本科线性代数课程的教学。

本书内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换六章，各章均配有相当数量的习题，书末附有习题答案。一至五章(除用小字排印的内容外)完全满足教学基本要求，教学时数约34学时。一至五章中用小字排印的内容供读者选学，第六章带有较多的理科色彩，供对数学要求较高的专业选用。

本书可供高等院校各工程类专业使用，包括诸如管理工程、生物工程等新兴工程类专业，也可供自学者、考研者和科技工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.线性代数/同济大学数学系编.--6版.--北京:高等教育出版社,2014.6
ISBN 978-7-04-039661-4

Ⅰ.①工… Ⅱ.①同… Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第099716号

策划编辑 王强　责任编辑 蒋青　封面设计 王凌波　版式设计 余杨
插图绘制 宗小梅　责任校对 宗小梅　责任印制 韩刚

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 保定市中画美凯印刷有限公司
开本 787mm×960mm 1/16
印张 11.25
字数 200千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版次 2007年5月第1版
2014年6月第6版
印次 2014年6月第1次印刷
定价 17.10元

物料号 39661-00

第六版前言

这次修订的主要工作是:(1) 适当调整一些章节的编排和内容,使全书结构更趋合理;(2) 对一些较为深刻且重要的概念增加了一些引导性和解说性的文字,增强了可读性;(3) 弥补了几处疏漏,使推理、解题更为顺畅;(4) 习题也作了少量的增删。总之,这次修订在保持原有体系和框架的基础上,在满足工科类本科数学基础课程教学基本要求的前提下,使本书更加易教易学,更加贴近于当前的教学实践。

这次修订工作由同济大学数学系骆承钦、胡志庠、靳全勤三位同志承担。

同济大学邵嘉裕教授和单海英、张莉同志以及同济大学浙江学院潘雪军同志对本书第五版提出了许多修改意见,谨在此对他们表示深切的谢意。

本书已入选第一批“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。对于教育部有关部门、高等教育出版社和同济大学有关部门对本书的关心和扶植,谨在此表示衷心的感谢。

编　者

2013 年 4 月

第五版前言

本书第五版是在第四版的基础上，参照近期修订的工科类本科数学基础课程教学基本要求（以下简称教学基本要求），并考虑当前教学的实际情况，进行修订而成的。

这次修订的主导思想是：在满足教学基本要求的前提下，适当降低理论推导的要求，注重解决问题的矩阵方法。为此，除第六章仍加＊号而外，对第一章至第五章中的部分内容（例如：为证明行列式的基本性质而引入的排列对换的知识，为证明矩阵初等变换的基本性质而引入的初等矩阵的知识，以及某些定理的证明）改为用小字排印，以表明它们为非必读内容，从而有利于在限定的学时内更好地掌握教学基本要求所规定的内容。这些用小字排印或加＊号的内容，供有较高要求的读者选学。此外，修订时对例题和习题也作了适当的调整。

这次修订工作仍由同济大学骆承钦同志承担。

在教育部高教司和高等教育出版社的支持下，本书列入普通高等教育"十一五"国家级规划教材。同时，本书也列入高等教育出版社"高等教育百门精品课程教材建设"项目和同济大学教材建设规划。对于教育部高教司、高等教育出版社和同济大学有关部门对本书的关心和扶植，谨在此表示衷心的感谢。

编　者

2007 年 1 月

第四版前言

本书第三版自1999年出版以来,广大读者和使用本书的同行们对于它的编写体系,即先建立线性方程组理论、后讨论向量组的线性相关性的体系,都表示赞同,认为这样的编排有利于理解线性代数的抽象知识,降低了学习本课程的难度。因此在这次修订时,我们保留了原来的体系,仅对其中几处作了次序的调整,以使叙述更加顺畅;在文字上也作了少许修改,并增加了一些解说性的段落,以使论述更加通俗易懂;此外还调整并增加了部分例题和习题,其中有些选自近年研究生入学考试的试题。

这次修订工作仍由同济大学骆承钦同志承担。

编　者

2003年2月

第三版前言

本书第二版自1991年出版以来，广大读者和使用本书的同行们对本书提出了许多修改意见，我们谨在此向关心本书和对本书提出宝贵意见的同志们表示衷心的感谢。

这次修订，在第一章增加了二阶与三阶行列式，以加强与中学教学内容的衔接；第二章增加了少量关于矩阵及其运算的实际背景的内容；第三、四两章作了彻底更换理论体系的修改。新的第三章先引进矩阵的初等变换和秩的概念，证明了初等变换不改变矩阵的秩，然后藉此建立线性方程组有惟一解和有无穷多解的充分必要条件，解决了线性方程组的求解问题。新的第四章讨论向量组的线性相关性，由于有了矩阵和线性方程组的理论，使这一讨论大为简化，从而达到化难为易的目的。

这次修订工作仍由同济大学骆承钦同志承担。

天津大学齐植兰教授和北京理工大学史荣昌教授详细审阅了本修订稿，并提出了许多改进的意见，谨在此表示衷心的感谢。此外，还要感谢教育部高教司教材处和高等教育出版社对本书的关心和扶植。

编　者

1998年8月

第二版前言

本书第一版自1982年出版以来，我们采用它作为教材，已经经历了多次的教学实践。这次我们根据在实践中积累的一些经验，并吸取使用本书的同行们所提出的宝贵意见，将它的部分内容作了修改，成为第二版。

这次修订，对第三章和第四章改动稍大，第一、二、五章也有改动，并增加了少量习题。此外，对超出国家教委于1987年审定的高等工业学校“线性代数课程教学基本要求”的内容加了 * 号。这次修订工作仍由同济大学骆承钦同志承担。

北京印刷学院盛祥耀教授详细审阅了本修订稿，并提出了许多改进的意见，谨在此表示衷心的感谢。此外，我们还向关心本书和对本书第一版提出宝贵意见的同志们表示深切的谢意。

编　者

1990年12月

第一版前言

同济大学数学教研室主编的《高等数学》(1978 年第 1 版)年前决定修订再版,其中的第十三章线性代数决定单独成书,以便应用。为此,由同济大学骆承钦同志把《高等数学》第十三章改编成本书。在改编时,对原教材作了较多的修改与补充,以期能较为符合 1980 年制订的教学大纲的要求。

本书介绍线性代数的一些基本知识,可作为高等工业院校工程数学"线性代数"课程的试用教材和教学参考书。本书前五章教学时数约 34 学时,第六章较多地带有理科的色彩,供对数学要求较高的专业选用。各章配有少量习题,书末附有习题答案。

参加本书审稿的有上海海运学院陆子芬教授(主审),浙江大学盛骤、孙玉麟等同志。他们认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心感谢。

编　者

1981 年 11 月

目　　录

第1章　行　列　式

行列式是线性代数中常用的工具.本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法.

§1　二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为消去未知数 x_2,以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,求得方程组(1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

(2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得,其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1)的四个系数确定的,把这四个数按它们在方程组(1)中的位置,排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}, \end{matrix} \tag{3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(3)所确定的二阶行列式,并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

数 a_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为行列式(4)的元素或元.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行;第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j

列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(4)的 (i,j) 元.

上述二阶行列式的定义,可用对角线法则来记忆. 参看图 1.1,把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线,a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

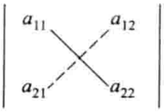

图 1.1

利用二阶行列式的概念,(2)式中 x_1,x_2 的分子也可写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么(2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组(1)的系数所确定的二阶行列式(称系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第 1 列的元素 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第 2 列的元素 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

二、三阶行列式

定义 1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{matrix} \tag{5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{6}$$

(6)式称为数表(5)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则:图中有三条实线看做是平行于主对角线的连线,三条虚线看做是平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积冠正号,虚线上三元素的乘积冠负号.

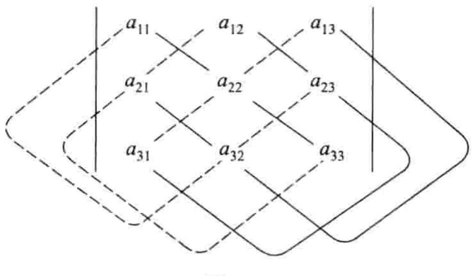

图 1.2

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4- \\ &\quad 1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3) \\ &= -4-6+32-4-8-24=-14. \end{aligned}$$

例 3 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

解　方程左端的三阶行列式

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 = x^2 - 5x + 6,$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$　解得　$x = 2$ 或 $x = 3$.

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,为研究四阶及更高阶行列式,下面先介绍有关全排列的知识,然后引出 n 阶行列式的概念.

§2　全排列和对换

一、排列及其逆序数

把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(也简称排列).

n 个不同元素的所有排列的种数,通常用 P_n 表示,可计算如下:

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上,有 n 种取法;

从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上,有 $n-1$ 种取法;

这样继续下去,直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上,只有 1 种取法. 于是

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

例如用 1,2,3 三个数字作排列,排列总数 $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$,它们是

$$123,\ 231,\ 312,\ 132,\ 213,\ 321.$$

对于 n 个不同的元素,先规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序),于是在这 n 个元素的任一排列中,当某一对元素的先后次序与标准次序不同时,就说它构成 1 个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

下面来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性,不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数,并规定由小到大为标准次序. 设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列,考虑元素 p_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$,如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i. 全体元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n} t_i$$

即是这个排列的逆序数.

例 4　求排列 32514 的逆序数.

解　在排列 32514 中：

3 排在首位，逆序数 $t_1=0$；

2 的前面比 2 大的数有一个(3)，故逆序数 $t_2=1$；

5 是最大数，逆序数 $t_3=0$；

1 的前面比 1 大的数有三个(3、2、5)，故逆序数 $t_4=3$；

4 的前面比 4 大的数有一个(5)，故逆序数 $t_5=1$，于是这个排列的逆序数为

$$t=\sum_{i=1}^{5} t_i=0+1+0+3+1=5.$$

二、对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换. 将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证　仍不妨设元素为从 1 开始的自然数(从小到大为标准次序). 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然，$a_1,\cdots,a_l$；$b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a,b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论　奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数，偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数.

证　由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此知推论成立.　　证毕

§3　n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{6}$$

容易看出：

(i) (6)式右边的每一项都恰是三个元素的乘积,这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此,(6)式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标(行标)排成标准次序 123,而第二个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$,它是 1,2,3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 6 种,对应(6)式右端共含 6 项.

(ii) 各项的正负号与列标的排列对照.

带正号的三项列标排列是 123,231,312;

带负号的三项列标排列是 132,213,321.

经计算可知前三个排列都是偶排列,而后三个排列都是奇排列. 因此各项所带的正负号可以表示为$(-1)^t$,其中 t 为列标排列的逆序数.

总之,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此,可以把行列式推广到一般情形.

定义 2　设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号$(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{7}$$

的项,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(7)式的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$