第19～23届

“希望杯”全国数学邀请赛

试题 审题要津 详细评注

（初二、初三版）

周国镇　主编

$\sum_{1}^{5} kx_k = a$

$\sum_{1}^{5} k^3x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k^5x_k = a^3$

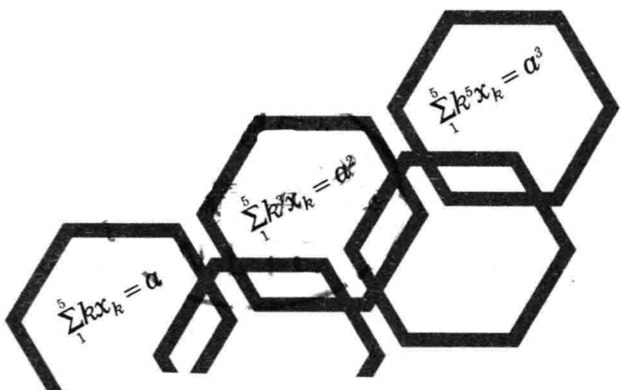
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

第19～23届“希望杯”全国数学邀请赛

试题 审题要津详细评注

（初二、初三版）

● 周国镇 主编



HITP 哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书汇集了第19~23届“希望杯”全国数学邀请赛初二以及第23届“希望杯”全国数学邀请赛初三的试题及解答，引导学生迅速发现解题入口，使读者“知其然，又知其所以然”.

本书适合于初中生、初中教师以及广大数学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

第19~23届“希望杯”全国数学邀请赛试题、审题要津、详细评注．初二、初三/周国镇主编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014．3

ISBN 978-7-5603-4639-7

Ⅰ．①第… Ⅱ．①周… Ⅲ．①中学数学课-初中-题解Ⅳ．①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第047853号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘家琳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张17.5　字数195千字
版　　次　2014年3月第1版　2014年3月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4639-7
定　　价　38.00元

编委会

（按姓氏笔画排列）

◎序言

1 一项好活动

崔健说:“年轻人没有超过老人,也是老人的失败.”中国古代数学曾达到了非凡的高度,可以说是独步天下.但宋元之后逐渐式微,其中落后的数学教育(姑且这样称.因为从严格意义上中国古代并没有今天所谓的数学教育)是一个原因.正如邓小平提出:“学电脑要从娃娃抓起.”数学也是一样,一个师傅带一个徒弟是不行的,要更广泛、更普及、更有效率.

《环球人物》杂志曾为此访问过《中国童话》的作者——台湾作家黄永松.他说:“台湾物理学家沈君山老师给我讲过一件事,他说围棋高手吴清源和日本人木谷实是‘瑜亮’之争,后来木谷实回日本乡下,吴清源很不解.1952年,吴清源在台湾收了弟子林海峰,林海峰很争气,拿了好几个冠军.就在林海峰要步入巅峰时,突然发现周围出现了很多年轻高手,这些都是木谷实的学生.原来,当年木谷实回

乡下后，专收8岁的孩子做学生，成立了木谷门.这对我启发很大，你想明天更好，就要从孩子入手.小孩子觉得好会记住，甚至影响他一辈子.”

“希望杯”全国数学竞赛以初一为起点，始于20世纪90年代，是由时任北京人大附中数学教师的周国镇先生发起的.

据《中国青年报》在1984年的一项调查显示，当年最受人们欢迎的职业的前三名分别是：出租车司机、个体户和厨师，而最后三名则分别是：科技工作者、医生和教师.

可见当年教师的社会地位是很低的，甚至可以说是边缘化的.但是“希望杯”竞赛活动一经启动便得到了全国各地的热烈响应.大有“星星之火，可以燎原”之势.20多年过去了，“希望杯”全国数学邀请赛这把火终于燃遍了中国，甚至还走出了国门.

有作家说，当社会迷茫的时候，知识分子应当先清醒；当社会过于功利的时候，知识分子应该给生活一些梦想.

笔者有幸参加了第1届“希望杯”的全国会议，会议是在颐和园中的龙王庙内召开的.来自全国各地的参加者精神振奋，因为终于有了一个属于普通学生的大众型数学竞赛.以往的全国联赛都是精英型的，只有少数极优秀且有一定数学天赋的学生才能参加.笔者初中一直任数学课代表，考到了省重点高中后竟连数学课外小组都进不去，更何况参加全国数学联赛了，所以总在想：那时要有“希望杯”竞赛就有希望了.

前岳麓书社总编辑、出版家钟书河说：“从自由度上讲，现在比20世纪80年代进步了，但是我们的人不

行了."他说,现在的人肯定是越来越聪明了,但是"没有理念了".

进入21世纪后,特别是近些年,数学联赛逐渐演变成了一块进入全国重点大学的"敲门砖".许多人并不擅长也并不喜爱数学,在功利心日重的家长们的精心安排下,学生们从小学就杀进了奥数大军中,于是乎被社会上唯利是图的教育机构所利用,逐步演变成了一场全民的梦魇.而贴近课本的"希望杯"一直保持着平民本色.考好了没什么优先政策,考砸了也没有什么大不了,下次再来.

蔡元培说:"知教育者,与其守成法,毋宁尚自然,与其求化一,毋宁展个性."教育面对的是千千万万极具个性的个体,其数学素养及水平自然参差不齐,如果举办数学竞赛,就需要有多个层次,以适应不同水平的选手参加.美国这方面就做得比较好,除了人所共知的美国数学奥林匹克(USAMO),还有美国大学生参加的普特南数学竞赛(PTN)、美国数学邀请赛、美国中学生数学竞赛等等,仅中学生参加的就有五个层次之多,与此同时,还不断产生新的竞赛.近年在美国,每年有数千名初中学生和高中一年级学生会参加全国中学生数学竞赛(Mathcounts).这项竞赛是在1983年由美国国家专业工程师协会(National Society of Professional Engineers)、国家数学教师委员会(National Society of Teachers of Mathematics)和CNA保险公司共同创立的.比赛的目的是为孩子们创造一个机会,来磨炼他们的数学技艺,并鼓励他们与其他孩子相互竞争,就像拼字比赛(Spelling bees)一样,是要奖励那些在压力之下成绩出众的人.在美国中学生数学竞赛中,每所学校派

出由四名学生组成的代表队，首先参加地区级比赛（通常包括一个城市及其郊区），得分最高的队伍和个人再参加州级比赛，然后每个州成绩最好的四名选手组成一支队伍，进入到全国范围的角逐.

在笔者写此序言之际，收到了这样一则微信，原文如下：

中国从 1985 年开始派选手参加国际数学奥林匹克竞赛（IMO），至今共参加 25 届，共有 154 人参赛，其中 120 人获得金牌，取得的成绩令世人瞩目，傲视群雄. 奥数竞赛在选拔人才、增强自信心和激发数学学习兴趣上成绩斐然，功不可没. 但是同时很多专家认为，随着奥数成为普及型、大众性的活动，它的作用已逐渐被异化. 原本是培养学生对数学的学习兴趣、提高学生的逻辑推理能力、发现和选拔数学精英的竞赛，却变成了比拼解题技巧、机械大量做题的强化训练. 这种强迫式的学习，最后不仅不会让学生爱数学，反而会恨数学. 达到目的以后，数学就会在他们的追求中“退场”. 在数学奥赛上获奖以后，却很少有人继续从事数学研究. 据统计，我国 154 位国际数学奥林匹克竞赛参赛者中，将数学作为终身研究职业的仅在 10 位左右，其中一多半在国外发展. 中国为什么会有“钱学森之问”？为什么建国 60 多年了，创新还是难题？原因就是我们的教育对于创新型人才的培养是不利的. 中国的青少年几乎是世界上学习负担最重、最没有欢笑的. 让青少年长期处于慢性压力之中，是损害青少年身心健康的. 过早的慢性压力逐渐抹杀了青少年学习数学的兴趣，导致他们到了大学后劲不足. 但奥数竞赛的功利性并非与生俱来，美国、俄罗斯以及

欧洲各国都没有这种现象.

美国"数学大联盟杯赛"竞赛试题灵活、生动，富有趣味性和挑战性,同时贴近生活. 让学生理解数学、欣赏数学,激励学生创新，激发学生学习数学的兴趣，培养学生主动探索的精神. 使孩子们体会到学习数学会使人有创造性和灵感,会使用逻辑推理，有理性，灵活、快乐地生活、工作和做决策.

在美国和加拿大每年有超过一百万名学生参与，对比美国和加拿大的学生总数,这是一个相当大的数字，由此可见美国"数学大联盟杯赛"影响之广泛. 对中小学生来讲,参与和兴趣是最重要的. 在中国推广美国"数学大联盟杯赛"可以让中国的学校、老师、学生、家长、教育工作者领略美国最为普及、最受欢迎的数学竞赛的原貌，希望对中国教育制度改革的探索、提高学生素质和创新能力的培养贡献一份力量.

远水难解近渴,"希望杯"就是我们身边的"数学大联盟杯赛".

"希望杯"竞赛也分初赛和决赛,但有所不同的是它的民间色彩更浓. 这暗合了"十八大"所提倡的鼓励民间力量发展壮大的思路.

2　一份好试题

音乐人高晓松曾说:"每天都很'有意义',但是有意义常常没意思."

数学竞赛的一个重要功能是激发学生对数学的兴趣,就是让他觉得有意思. 如果一个学生觉得数学题今

天做了明天还得做，那就是勉强在学，觉得没意思. 如果一个学生觉得数学题今天刚刚做完明天还想做，那就不一样了，那他就是觉得数学有意思.

一项数学赛事，试题是关键. 一份好的试题应该是既有趣味又有高深背景的.

"希望杯"的试题出得好. 说它好是因为它"顶天立地". 往上追溯可以到数学的前沿，因此说它"顶天"."希望杯"的试题又很亲民，只要你把课本学会，半数以上的题你也能得心应手，所以很接地气，故此说它"立地".

例如1991年第2届"希望杯"全国数学邀请赛高中二年级第1试的最后一题是:

解方程 $x^3-\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}=x^2+3=0$ 的非负根.

作为压轴题，这里涉及的是大家所不熟悉的一元三次方程. 但此题有一个妙解:

解 将原方程化为 $x+\frac{3}{x^2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}$，即 $x+\frac{3}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}$，当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{3}{x^2}$ 时等号成立，故方程一定有一个根为 $\sqrt[3]{6}$.

剩下的二次方程就好解了. 此解法既在情理之中，又在意料之外，当作试题再合适不过了.

再如1991年第2届"希望杯"全国数学邀请赛初中二年级第1试第12题:

计算: $2^{2\,013}-2^{2\,012}-2^{2\,011}-\cdots-2^2-2-1=$ ________.

解 原式 $=2\times2^{2\,012}-2^{2\,012}-2^{2\,011}-\cdots-2^2-2-$

$1=2^{2012}-2^{2011}-\cdots-2^2-2-1=2^{2011}-\cdots-2^2-2-1=\cdots=2^3-2^2-2-1=2^2-2-1=2-1=1.$

本题简易而不呆板.孩子们做起来,自然是乐在其中.

又如2013年第24届“希望杯”全国数学邀请赛初中三年级第1试第15题:

若一个三角形的三边的长是$\sqrt{2}$,$\sqrt{13}$,$\sqrt{17}$,则此三角形的面积是________.

解 如用“海伦公式”求解,则不胜其繁.若注意到$(\sqrt{2})^2=1^2+1^2$,$(\sqrt{13})^2=3^2+2^2$,$(\sqrt{17})^2=1^2+4^2$,即可如图1所示,在已知三角形周边拼接三个直角三角形并形成一个矩形,从而由$S_{\triangle ABC}=S_{矩形}-(S_1+S_2+S_3)=\dfrac{5}{2}$完成所求.

该题恰到好处地体现了“希望杯”活而不难,巧而不偏的命题立意.

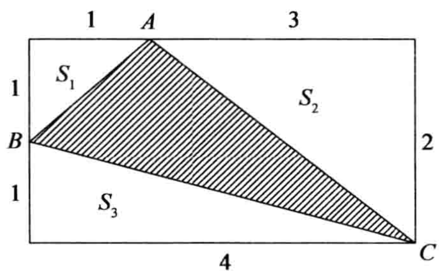


图1

再如2012年第23届“希望杯”全国数学邀请赛高中一年级第2试第17题:

四面体$ABCD$的三组对棱分别相等,长度分别为3,4,x,那么x的取值范围是________.

（提示：将其嵌入一长、宽、高分别为 a,b,c 的长方体中，进而利用 $a^2\geqslant 0,b^2\geqslant 0,c^2\geqslant 0$ 求解，详见本系列丛书高一卷）

仅从如上几例不难看出，“希望杯”试题不仅独具亲和力，也是中考、高考复习中查缺补漏的绝好素材.

在“希望杯”竞赛初中卷中几何试题较多. 正如菲尔兹奖得主丘成桐所指出：平面几何所提供的不单是漂亮而重要的几何定理，更重要的是它提供了在中学期间唯一的逻辑训练，是每一个年轻人所必需的知识……将来无论你是做科学家，是做政治家，还是做一个成功的商人，都需要有系统的逻辑训练. 我希望我们中学把这种逻辑训练继续下去. 中国科学的发展都与这个有关.（丘成桐在北京师范大学附属中学的演讲）

如果非要将“希望杯”竞赛与其他竞赛做一个比较的话，那么注重计算也应该算是它的一个显著特点. 按一般人的理解，似乎证明能力比计算能力更高级一点，其实不然，许多著名数学家的计算能力都是超强的. 华罗庚、陈省身这样的大家都有非常强的计算能力. 他们不仅敢于计算，而且还非常善于计算，像华罗庚与王元合作搞起来的利用数论的方法进行积分的数值计算开辟了计算数学的一个新方法. 像冯康先生首创的有限元法也是计算数学领域的一大成就. 像为美国原子弹研制做出重大贡献的费米更是一位计算高手，他曾推导出了现在通称的托马斯－费米方法（Thomas-Fermimethod）. 对于这个方法中的微分方程，费米用一个小而原始的计算尺求出了其数值解，此项计算也许花了他一个星期. 马约拉纳（E. Majorana）是一位计算速度极快而又不轻信人言的人，他决定来验

证费米的结果. 他把方程式转换为黎卡蒂方程(Riccati Equation),再求其数值解. 所得结果和费米得到的完全符合.

费米喜欢用计算器,不论是小的还是大的计算器他都喜欢用. 那些当时在芝加哥的研究生们都看到了他这个特点而且都很信服. 显然在事业的早期,他就已爱上了计算器,并且这个爱好一直延续到他的晚年.

有人说一千个人读莎士比亚就有一千个哈姆雷特. "希望杯"试题也是一样. 随着数学修养的不同,看试题和解试题的角度也不同.

如 2012 年第 23 届"希望杯"全国数学邀请赛高中一年级第 2 试最后一题为:

已知函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足:

(1) $f(m+n)=f(m)+f(n)-1$;

(2) 当 $x>0$ 时, $f(x)>1$.

解答以下问题:

(1) 求证: $f(n)$ 是增函数;

(2) 若 $f(2\ 012)=6\ 037$, 解不等式 $f(a^2-8a+13)<4$.

解法一 本题如将其视为抽象函数,那么其单调性便不能用通常的导数方法,只能用定义.

设

$$x_2-x_1=\Delta x>0, x_2=x_1+\Delta x$$

由条件(1)得

$$f(x_2)=f(x_1+\Delta x)=f(x_1)+f(\Delta x)-1$$

再由条件(2)知

$$f(\Delta x)>1$$

故 $f(x_2)>f(x_1)$ 成立. 即 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

解法二 其实我们可以由柯西(Cauchy)方法将 $f(x)$ 解出来,变成一个具体函数.

将条件(1)变形为

$$f(m+n)-1=[f(m)-1]+[f(n)-1] \quad ①$$

设 $g(x)=f(x)-1$,则条件(1)可变为

$$g(m+n)=g(m)+g(n)$$

由柯西方程解法知

$$g(x)=cx$$

由 $c=g'(0)=1$,故 $g(x)=x$. 所以 $f(x)=x+1$,它显然是增函数. 且问题(2)也变成简单的计算.

后一种方法应用面更广,下面再举一个例子.

已知函数 $f(t)$ 对任意实数 x,y,都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y+2)+k(x+y)+3$,$k$ 为常数,且 $f(1)=1$,$f(2)=17$. 求 $f(x)$ 的解析式.

解 利用柯西方程可令 $x=1,y=1$,得

$$f(2)=f(1)+f(1)+12+2k+3$$

由 $f(1)=1$,$f(2)=17$ 得 $k=0$. 所以

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y+2)+3$$

将其变形为

$$f(x+y)-(x+y)^3-3(x+y)^2+3$$
$$=[f(x)-x^3-3x^2+3]+[f(y)-y^3-3y^2+3]$$

设

$$g(x)=f(x)-x^3-3x^2+3$$

则上式可变为

$$g(x+y)=g(m)+g(y)$$

由柯西方程可知

$$g(x)=g(1)x$$

由 $f(1)=1$ 知 $g(1)=0$,故 $f(x)=x^3+3x^2-3$.

为了说明这种方法在升学考试中也是有用的，我们再举一个2008年上海交通大学保送生考试中的试题为例.

若函数$f(x)$满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y),f'(0)=1$$

求函数$f(x)$的解析式.

解 依题意有

$$xy(x+y)=(-x)(-y)(x+y)$$

注意到

$$-x-y+(x+y)=0$$

故

$$(-x)^3+(-y)^3+(x+y)^3=3xy(x+y)$$

由

$$\begin{aligned} f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)\Rightarrow f(x+y) \\ =f(x)+f(y)+\frac{1}{3}[(x+y)^3-x^3-y^3] \\ \Rightarrow f(x+y)-\frac{1}{3}(x+y)^3 \\ =f(x)-\frac{1}{3}x^3+f(y)-\frac{1}{3}y^3 \end{aligned} \qquad ②$$

令$g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，则式②化为

$$g(x+y)=g(x)+g(y) \qquad ③$$

由于$f'(0)=1$，则$f(x)$在$x=0$处连续. 由此可知式③是一个柯西方程，其解为$g(x)=ax$(其中$a=g(1)$). 所以

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax$$

所以

$$f'(x)=x^2+a$$

再由 $f'(0)=1$,知 $a=1$,所以

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x$$

3 一个好班底

其实本书的成功有赖于两个优秀的班底. 第一个当然是以周国镇先生为首的竞赛命题委员会,它汇聚了许多数学界的精英,如华罗庚当年推广优选法时的助手:计雷、徐伟宣、那吉生、余其煌等,可谓高端、大气、上档次. 第二个班底就是由"希望杯"天津市组委会负责人王成维老先生组建的写作集体,其中王世堃、余凤冈、孙家文、邵德彪都是津城屈指可数的解题高手. 他们痴迷于数学解题,虽多数人年老体弱但执着认真. 有人曾这样描述 2013 年获诺贝尔物理学奖的 80 岁的英国物理学家希格斯:希格斯确实与众不同,他的生活中没有电视,没有电脑,很少接电话,电子邮件也是别人替他回复. 对他而言,只要有黑胶唱片、物理学刊物以及一支已经削好随时能用的铅笔就够了. 天津这个班底只是年龄比希格斯稍小点,其余的都挺像.

关于在数学人中年轻和年老怎样区分这个问题,20 世纪 80 年代中期,俄罗斯数学家弗拉基米尔·伊戈列维奇跟他的学生谈起过,在不同的社会中,"年轻"(特别是年轻的数学家)的概念是如何的不同. 比如说,莫斯科数学会每年颁奖给一位 30 岁以下的年轻数学家. 著名的菲尔兹奖只颁发给在国际数学家大会开会当年年龄不超过 40 岁的杰出的年轻数学家. 而阿

诺德则这样定义何为“年轻”:“数学家只要还读除他自己以外别人的工作,他就是年轻的!”

而在现代这个老龄化社会中,标准似乎应该是:如果一个人还能工作,还能做有益于社会的人,那他就算年轻人.

1998年,萨缪尔森在为《经济学:一个介绍性分析》出版50年的纪念珍藏本所写的前言中风趣地说:“看到中世纪的三个正在劳动的人,乔瑟问他们在干什么?第一个人说:‘我在挣钱,钱还不少.’第二个人说:‘我在把石头和玻璃雕刻成美妙的形状.’第三个人则声称:‘我在建一座教堂.’当我撰写《经济学》第一版时,我实际上在同时做这三件事,尽管我当时并不知道.”

作为天津“希望杯”组委会的负责人,本书的编写组织者王成维老先生虽已年过古稀,但他身边聚集着一批“最美不过夕阳红”的老年数学工作者.他们以建教堂一样宗教般的热情,连篇累牍地撰写着数学的书籍,从中考到高考.近年来这些书籍在社会上引起了不小的反响.今年他们又向更高的目标迈进,以审题要津和详细评注的模式对历届“希望杯”试题进行了系统地解析和研究.中国出版的各级各类数学考试的解答有一个共同的问题,那就是同质化,大同小异、千篇一律,并且太依赖于命题组给出的标准答案,有的竟一字不改,而且根本看不出解题思路,这与带着什么样的感情去写有关.若是对数学无感情的人,应付是最佳选择,但如果是对数学充满感情那就大不一样了.

而本书的字里行间倾注着编写者对数学的饱满热情和对读者的高度责任感.他们从应当如何审题入手,