普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE （上册）

张峰荣 主 编

全贤唐 范东梅 李明芳 副主编

（第二版）

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（上册）

（第二版）

主　编　张峰荣
副主编　全贤唐　范东梅　李明芳
编　写　良　燕　张　洪　田秋野
　　　　全长河　潘淑霞　金喜子
　　　　吕文砚　王儒济
主　审　刘　红

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材。全书分上、下两册。本书为上册，共分6章，主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及应用等。此外，每节配有适量习题；每章设有知识总结和解题方法总结，有利于巩固所学知识；每章的自测题，可供学生自己检查学习效果；书末附习题参考答案，以供参考。本书内容安排上循序渐进、由浅入深、通俗易懂。

本书可作为普通高等院校高等数学课程教材，也可作为远程、函授等成人教育或高职高专用书，还可作为自学考试的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/张峰荣主编．—2版．—北京：中国电力出版社，2014.8

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5123-6161-4

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第147170号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号　100005　http://www.cepp.sgcc.com.cn）

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2009年8月第一版

2014年8月第二版　　2014年8月北京第六次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　14印张　340千字

定价 **28.00** 元

前　言

21世纪的远程教育与函授教育得到迅速的发展，数学作为工程类、经济类重要的基础理论课，受到人们的广泛关注。而教材，在教学实践中，直接关系到教学质量，在引导教学教法、理论联系实际、指导实践等方面具有重要作用。为了培养出具有一定科学素质和职业技能的优秀人才，需要提供适合其发展的教材。但是现阶段适合远程教育与函授教育的教材很少。本教材紧密衔接初等数学，从特殊到一般，从具体到抽象，注重基本概念、基本定理的讲述，并从实际例子出发，内容深入浅出，易于接受。本教材具有以下特点。

(1) 由于远程教育与函授教育的学生基础相差比较大，所以本书注重高等数学与初等数学的紧密衔接。在书中对初等数学知识作了较多的介绍，并在书末附录中加入了初等数学中的常用公式，这样使教材具有系统的伸缩性和可选性，以适应不同层次教学的实际需要。

(2) 由于教学方式不是面授，所以教学内容与课后的训练应方便学生的自修，以发挥学生作为学习主体的积极作用。本书每章后面配有小结，归纳了学习内容，给出了解题技巧；每章设有自测题，书后还配有3套模拟试题，可供学生检查学习效果用。

(3) 由于远程教育与函授教育的学生多数在工作岗位，教材的内容要体现工作实践的应用性，所以教材中选择了较多的应用问题，而对理论验证性的推导内容进行了适量缩减。

本书由北京科技大学张峰荣担任主编，全贤唐、范东梅，李明芳担任副主编。北京科技大学良燕、北京联合大学张洪、北京城市学院田秋野、中国人寿保险公司全长河、吉林医药学院潘淑霞、东北师范大学金喜子、聚宝中学吕文砚、陈经纶中学王儒济参加了本书的编写工作。

本书由首都医学院刘红担任主审。在编写过程中，还参考了一些文献资料。在此一并致谢。

限于编者水平，书中难免有不妥和疏漏之处，希望广大读者批评指正。

编　者

2014年6月

目　　录

第一章　函　　数

函数是数学中的一个最基本的概念，也是高等数学研究的主要对象. 在各个领域中涉及大量的数量关系都可以用函数来表示. 本章将讨论函数的概念及其基本性质，重点是讨论基本初等函数、复合函数、初等函数及其图形等.

第一节　集　　合

集合是现代数学的一个最基本的概念，数学的各个分支普遍地运用集合的方法和符号，所以必须熟悉集合的概念.

一、集合的基本概念

集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的总体，是一种描述式定义. 组成集合的一个个对象，称为集合的**元素**. 集合一般用大写英文字母 A，B，C 等表示，用小写字母 a，b，c 等表示集合的元素；如果 a 是集合 A 的元素，记为 $a \in A$，读作 a 属于 A 或 a 在 A 中；若 a 不是集合 A 的元素，记为 $a \overline{\in} A$，读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中.

二、集合的表示法

集合的表示方法一般有两种. 一种是列举法，即按任意顺序列出集合的所有元素，并用大括号 $\{\}$ 括起来，用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不能遗漏，不能重复. 例如集合 A 由 4 个元素 a，b，c，d 组成，表示为 $A=\{a, b, c, d\}$；由方程 $x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合 B，表示为 $B=\{2, 3\}$.

在数学上经常使用的另一种方法是描述法. 设集合 M 为具有某种特征的元素 x 所组成，则记为

$$M=\{x \mid x\text{ 所具有某种特征}\}.$$

例如设 B 为方程 $x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合，则 $B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$. 如果把全体实数记为 $\mathbf{R}$，则 xoy 面上点的集合可以表示为 $\{(x,y) \mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$.

本书的内容是在实数范围内研究的，今后未加说明的量，都指的是实数.

如果一个集合内有无限个元素，称该集合为**无限集**. 如果一个集合内的元素是有限的，称该集合为**有限集**.

本书中常用的集合是区间. 取实数 a,b ($a<b$)，则：

(1) 开区间：$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$.

(2) 闭区间：$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

(3) 半开区间：$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$.

(4) 无限区间：$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$，$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\}$，

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$，

$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$.

此处"$+\infty$"(读作正无穷大)，"$-\infty$"(读作负无穷大) 是引入的符号，不是数.

有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$ 为区间的长，称为区间的长度.

三、集合的关系

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即“如果 $a\in A$，则 $a\in B$”，则称 A 为 B 的**子集**. 记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

不包含任何元素的集合为**空集**. 空集一般记作 ϕ. 例如 $x^2+1=0$ 的实数根集合为空集.

注意：规定空集是任何集合的子集.

如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$.

例如 $A=\{x\mid x$ 为大于 1 小于 4 的整数$\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，则 $A=B$.

四、集合的运算

1. 集合的并

设 A 与 B 是两个集合，所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的**并集**，记为 $A\cup B$ 或 $B\cup A$.

2. 集合的交

设 A 与 B 是两个集合，所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的**交集**，记为 $A\cap B$ 或 $B\cap A$.

3. 集合的差

设 A 与 B 是两个集合，所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的**差集**，记为 $A-B$.

有时在研究和处理问题时，把所考虑的全体称为全集，并用 U 表示.

设 A 是一个集合，U 为包含 A 的全集，把 $U-A$ 称为 A 的余集，记为 $\overline{A}$.

例如，设集合 $A=[2,6]$，$B=[-1,3)$，全集 $U=(-5,8]$.

则 $A\cup B=[-1,6]$，$A\cap B=[2,3)$，$A-B=[3,6]$，$B-A=[-1,2)$，$\overline{A}=(-5,2)\cup(6,8]$.

五、集合的运算律

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

六、邻域

设 a，δ 为实数，且 $\delta>0$，集合 $\{x\mid |x-a|<\delta,\delta>0\}$ 在数轴上，是一个以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，称为点 a 的 δ **邻域**. a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 记作 $U(a,\delta)$. 如图 1-1 所示.

$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 是在点 a 的 δ 邻域内去掉点 a，其余的点所组成的集合，即 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\overset{0}{U}(a,\delta)$，如图 1-2 所示.

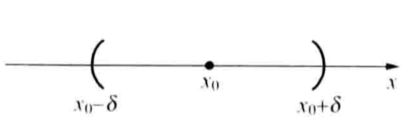

图 1-1

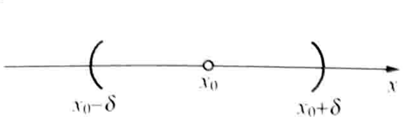

图 1-2

例如区间 $(2.9,3.1)$ 称为点 3 的 0.1 邻域．3 是邻域的中心，0.1 为邻域的半径，区间长度为 0.2，可记为 $U(3,0.1)$．$\overset{0}{U}(1,0.2)$ 称为 1 的去心 0.2 邻域，即区间 $(0.8,1)\cup(1,1.2)$．

习题 1-1

1．是非题（判断下列结论的正误，正确的在括号里面画√，错误的画×）．

(1) 集合 $\{0\}$ 为空集．（　　）

(2) 集合 $\{(x,y)\mid y=2x\}$ 为无限集．（　　）

(3) 集合 $A=\{1,2\}$，集合 $B=\{1,3,4\}$，则 $A-B=\{2,-3,-4\}$．（　　）

(4) 集合 $A=(2,5)$，集合 $B=[1,4]$，则集合 $A\cup B=(2,4]$．（　　）

(5) 集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid y=1\}$，则集合 $A\cap B=\{(-1,1),(1,1)\}$．（　　）

2．单项选择题（以下四个选项中只有一个是正确的，把满足条件的选项填在括号里）．

(1) 设集合 $A=\{a,5,6\}$，集合 $B=\{b,2,4,7\}$，则 a,b 取（　　）值时，$A\cap B=\{4,5\}$．

A. $a=4,b=5$　　B. $a=5,b=5$　　C. $a=5,b=4$　　D. $a=4,b=4$

(2) 设集合 $A=\{x\mid 3<x<6\}$，集合 $B=\{x\mid x>5\}$，则 $A\cup B=$（　　）．

A. $\{x\mid x>5\}$　　B. $[5,+\infty)$　　C. $\{x\mid 5<x<6\}$　　D. $(3,+\infty)$

(3) 数集 $\{x\mid 0<|x-5|<1\}$ 用区间表示为（　　）．

A. $[4,6]$　　B. $(4,6)$　　C. $(4,5)\cup(5,6)$　　D. $[4,6)$

(4) 邻域 $U(3,0.2)$ 用区间可表示为（　　）

A. $(2,3)$　　B. $(2.8,3.2)$　　C. $(2.8,3)$　　D. $(2,3.2)$

(5) 集合 $A(2,5)$，集合 $B=[1,6]$，则集合 A 与 B 的关系为（　　）．

A. $A=B$　　B. $A\supset B$　　C. $B\supset A$　　D. 以上都不对

3．填空题（将正确的答案填在横线上）．

(1) 设实数集表示全集，区间 $A=[1,5)$，则 $\overline{A}=$______．

(2) 邻域 $\overset{0}{U}(6,0.5)$ 用区间可以表示为______．

(3) 集合 $A=\{1,2,3\}$，集合 $B=\{1,3,5,6\}$，则 $A-B=$______．

(4) 集合 $A=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\},B=\{(x,y)\mid x\leqslant 0\}$，则 $A\cap B=$______．

(5) 设全集为 $(-\infty,+\infty)$，集合 $A=(-\infty,1)$，则 $\overline{A}=$______．

4．用列举法表示下列集合．

(1) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合．

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 的交点坐标的集合．

(3) 集合 $\{x\mid 0<|x-2|\leqslant 5,x$ 为整数$\}$．

(4) 方程 $2^{x-1}=1$ 的根的集合．

*(5) 方程 $x^3-8x^2+19x-12=0$ 的根的集合．

5．用描述法表示下列集合．

(1) 不大于 6 的所有实数的集合．

(2) 圆 $x^2+y^2=1$ 内部（不包括边界点）的一切点构成的集合．

（3）点 2 的去心 0．1 邻域.

（4）抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 的交点坐标的集合.

第二节 函 数

一、常量与变量

在各种过程中常会遇到两种状态的量：一种量是相对不变的，即在某个过程中，只取一个固定的数值，这种量叫**常量**；另一种量是不断变化的，即在某个过程中可以取不同的值，这种量叫**变量**．初等数学研究的对象基本上是常量，而高等数学则是以变量作为研究对象，着重考察变量之间的依存关系，即所谓的函数关系．

例如，某种商品的价格在一定时期内是相对稳定的，可以看作是常量，商品的销售量和销售额是变化的，可以看作是变量.

需要注意的是，一个量是常量还是变量，并不是绝对的，应根据具体问题具体条件来分析．例如销售某种商品，商品价格是常量，但当商品滞销或商品更新换代时，商品价格也会变化，此时价格就成了变量.

数学中，常量一般用字母 a,b,c 等表示，变量一般用 x,y,z 等表示，而用 x_0,y_0,z_0 表示变量取的某个特定的值．常量与变量可以用数轴上的点表示，如常量 x_0 表示数轴上的一个定点，变量 x 表示为数轴上的动点.

二、函数的概念

1．函数的定义

在各个领域中所遇到的问题往往是几个变量同时在变化，它们之间并不是孤立的，而是相互联系、相互依赖，并按一定规律变化着．变量之间的这种关系就是函数关系.

【例 1-1】 商店以每件 20 元的价格销售某种商品，销售总收入 R 与销售量 Q 之间的数量关系为

$$R=20Q$$

当 $Q=2$ 时，$R=20\times2=40$；当 $Q=10$ 时，$R=20\times10=200$．可见，只要 Q 取一定的数值，R 就有一个确定的值与之对应．关系式 $R=20Q$ 反映了销售总收入 R 与销售量 Q 的数量变化的对应关系.

【例 1-2】 为了进行市场预测，调查了某企业 1～6 月份某种商品的销售量分别为 100，105，110，115，111 和 120 件．表 1-1 列出了月份 t 与销售量 Q 的数量对应关系．

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6
销售量 Q	100	105	110	115	111	120

表 1-1 确定了月份 t 与某种商品销售量 Q 之间的数量对应关系．当 t 取定 1～6 整数中的任意一个值时，Q 就有一个确定的数值与之对应.

【例 1-3】 设某地区某天的气温 T 用自动记录仪记录．其记录曲线如图 1-3 所示．则此图反映了时刻 t 与气温 T 之间的相互依存关系，对于时刻 t_0，在图上就能找到此时刻 t_0 的气温 T_0.

上面的几个例子所反映的问题虽然各不相同，但是却有一个共同的特点，就是在每一个问题中都有两个变量，这两个变量不是孤立的，而是具有依赖关系，即当其中一个变量在一定范围内取定一数值时，按照某种对应法则，另一个变量就有一个确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系，就是函数概念的实质. 通过以上分析，概括出函数的定义.

定义 1.1 设 x 和 y 若是两个变量，D 是一个非空实数集合，如果按照对应规则 f，对于每一个 $x \in D$，都有确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的函数. 记为

$$y = f(x), x \in D.$$

式中：x 称为**自变量**；y 称为**因变量**；集合 D 称为函数**定义域**.

当 x 取定值 $x_0 \in D$ 时，与之对应的 y 值称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**. 记作

$$f(x_0) \text{ 或 } y|_{x=x_0}.$$

当自变量 x 取遍定义域的所有数值时，对应的全体函数值所组成的集合 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$，称为函数的**值域**.

如果对定义域内的每一个 x 值，都有唯一确定的 y 值与它相对应，这种函数称为**单值函数**. 例如函数 $y = x^3$ 为单值函数.

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，对任意取定的 $x \in D$，对应的函数值为 $y = f(x)$. 这样以 x 为横坐标，y 为纵坐标就在 oxy 平面上确定一点 (x, y). 当 x 取遍 D 上的每一个数值，就得到点 (x, y) 的一个集合 C：$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$，这个点集 C 称为函数 $y = f(x)$ 的图形（见图 1-4），图中的 W 表示函数 $y = f(x)$ 的值域.

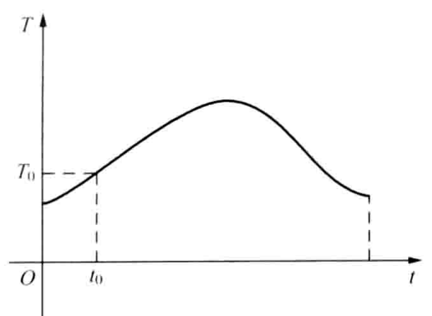

图 1-3

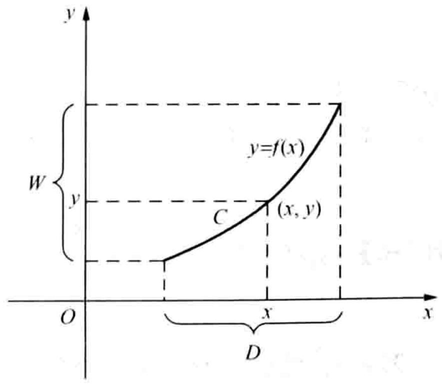

图 1-4

注意：(1) 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的函数关系，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上也常用记号 $f(x)$ 或 $y = f(x)$ 来表示函数. 例如给定如下的对应法则 f：对任一 $x \in D$，$y = x^2 + \sqrt{x} + 4$，则由此对应法则所确定的函数 f 通常就记作

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4, x \in D,$$

或

$$y = x^2 + \sqrt{x} + 4, x \in D.$$

函数的记号 f 也可改用其他字母，例如 φ、F 等，相应地，函数可记作 $y = \varphi(x)$、$y = F(x)$，等等. 有时还直接利用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y = y(x)$. 这时字

母 y 既表示因变量，又表示函数．

（2）函数的定义域.

1）对于实际问题得到的函数，其定义域由实际问题具体确定.

例如：圆面积公式 $S=\pi r^2$，由实际意义，r 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

2）对于未说明实际意义的函数表达式，如果给出自变量的取值范围，定义域就自然确定了.

例如 $y=\ln(1+x), x\in[1,2]$，这个函数的定义域为 $[1,2]$.

如果没有给出自变量的取值范围，则约定函数的定义域就是自变量所能取的使表达式有意义的所有实数组成的集合．一般称为函数的自然定义域.

例如函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的自然定义域为 $[-1,1]$.

（3）函数相等．定义域和对应法则是确定函数的两个要素，如果两个函数的定义域和对应法则相同，那么这两个函数是相同的．至于自变量和因变量用什么字母表示，则无关紧要．例如函数 $y=f(x)$ 与 $u=f(v)$ 就是相同的函数.

【例 1-4】 设函数 $y=x^2+2x-1$，求 $f(0), f(-1), f(-x), f(x^2)$.

解 $f(0)=0^2+2\times0-1=-1$,

$f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)-1=-2$,

$f(-x)=(-x)^2+2(-x)-1=x^2-2x-1$,

$f(x^2)=(x^2)^2+2(x^2)-1=x^4+2x^2-1$.

【例 1-5】 设 $f(x+1)=(x-1)x$，求 $f(x)$.

解 方法一　将 $f(x+1)=(x-1)x$ 的右边凑成 $x+1$ 为变量的形式.

因为
$$f(x+1)=(x-1)x=(x+1-2)(x+1-1),$$
所以
$$f(x)=(x-2)(x-1).$$

方法二　换元法.

设 $x+1=u$，则 $x=u-1, f(u)=(u-1-1)(u-1)=(u-2)(u-1)$,

所以
$$f(x)=(x-2)(x-1).$$

【例 1-6】 求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 定义域.

解 要使原函数有意义，必须满足 $\begin{cases}3x-2>0\\3x-2\neq1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x>\dfrac{2}{3}\\x\neq1\end{cases}$,

所以原函数的定义域是 $\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$.

【例 1-7】 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 定义域.

解 要使原函数有意义，必须满足 $\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant1\\x^2<25\end{cases}$，解得 $\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant6\\-5<x<5\end{cases}$.

所以原函数的定义域是 $[-4,5)$.

【例 1-8】 函数 $y=x$ 与函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是否为相同的函数.

解 函数 $y=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对应法则为 $y=x$；

函数 $y=\frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，对应法则为 $y=x$；

由于定义域不同，所以不是相同的函数.

2. 函数表示法

表示函数的方法，常见的有**解析法**、**表格法**、**图形法**.

解析法就是用数学式子表示两个变量之间的函数关系的方法，是数学中常用的方法，如［例 1-1］；

表格法就是将自变量的一系列取值与对应的函数值列成表格，如［例 1-2］；

图形法就是用坐标系中的图像来反映函数关系，如［例 1-3］.

用解析法表示的函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为**分段函数**. 分段函数是用几个式子来表示一个函数，而不是表示几个函数.

【例 1-9】 函数 $f(x)=\operatorname{sng}x=\begin{cases}1,当\ x>0\\0,当\ x=0\\-1,当\ x<0\end{cases}$，称为符号函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{-1,0,1\}$，函数图像如图 1-5 所示.

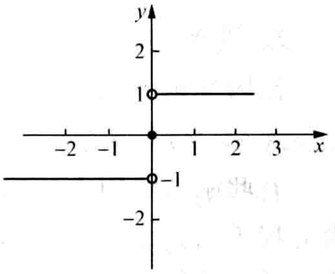

图 1-5

【例 1-10】 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数，记作 $[x]$，如 $[-1,2]=-2$，$[0,1]=0$，$[3]=3$. $[\sqrt{2})=1$. 函数 $f(x)=[x]$ 称为取整函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 它的图形称为阶梯曲线，如图 1-6 所示.

对于分段函数要注意以下两点：

(1) 分段函数是用几个式子表示同一个函数，而不是几个函数；

(2) 分段函数的定义域是各个式子定义域的“并”.

【例 1-11】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<0\\2, & x=0\\1+x, & 0<x\leqslant 3\end{cases}$，求出 $f(x)$ 的定义域，画出函数图形并计算 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$.

解 函数图形如图 1-7 所示，其定义域为 $[-2,3]$.

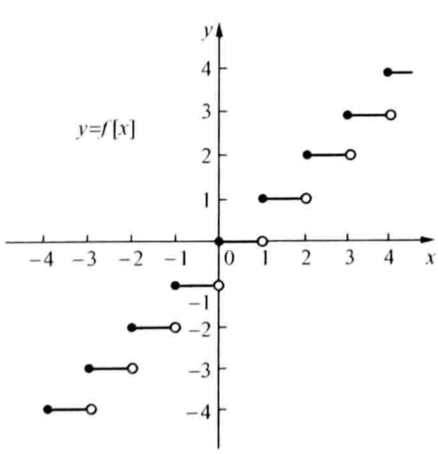

图 1-6

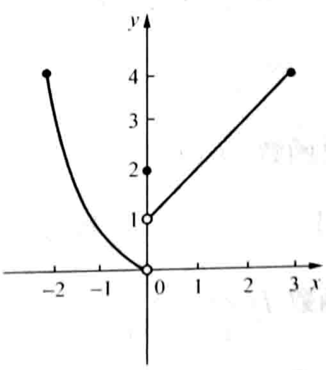

图 1-7

因为当 $-2 \leqslant x < 0$ 时，$f(x) = x^2$，所以 $f(-1) = (-1)^2 = 1$；

同理可得 $f(0) = 2, f(2) = 1 + 2 = 3$.

【例 1-12】 已知 $f(x) = \begin{cases} x+2, 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2, 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$，求 $f(x-1)$.

解 $f(x-1) = \begin{cases} (x-1)+2, 0 \leqslant x-1 \leqslant 2 \\ (x-1)^2, 2 < x-1 \leqslant 4 \end{cases} = \begin{cases} x+1, 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ (x-1)^2, 3 < x \leqslant 5 \end{cases}$.

【例 1-13】 某运输公司规定货物的吨公里运价为：不超过 a 公里，每公里 k 元；超过 a 公里，超过部分每公里为 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 间的函数关系.

解 运价 m 和里程 s 间的函数关系为

$$m = \begin{cases} ks, & 0 < s \leqslant a \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a), & s > a. \end{cases}$$

3. 隐函数

把因变量 y 用含有自变量 x 的解析式直接表示出来的函数，称为显函数. 例如 $y = x^2 + \sin x, y = \sqrt{x+1}$ 等.

有些函数的因变量与自变量的对应法则是由一个二元方程 $F(x,y) = 0$ 确定的，称这种由方程 $F(x,y) = 0$ 确定的函数 $y = f(x)$ 为隐函数. 例如方程 $y + x^2 = x$ 确定了 y 是 x 的隐函数. 若解出 y，得到显函数 $y = x - x^2$，这个过程叫做隐函数的**显化**. 隐函数的显化有时候是困难的，甚至是不可能的. 在以后的学习中经常遇到隐函数，且不要求显化.

习题 1-2

1. 是非题（判断下列结论的正误，正确的在括号里面画√，错误的画×）.

(1) 函数 $f(x) = x$ 与函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$ 是相同的函数. （ ）

(2) 函数 $f(x) = x + 1$ 与函数 $f(u) = u + 1$ 是相同的函数. （ ）

(3) 式子 $y = \lg(-x^2 - 1)$ 是函数表达式. （ ）

(4) 函数 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 的定义域为 $[-1, +\infty)$. （ ）

(5) 函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. （ ）

2. 单项选择题（以下四个选项中只有一个正确的，把满足条件的选项填在括号里）.

(1) 下列函数为隐函数的是（ ）.

A. $y = 2x - 1$ B. $y = 2^x$ C. $y = \sin(x+y)$ D. $y = \frac{1}{1+x^2}$

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$，则 $f(1) =$（ ）.

A. -1 B. 1 C. 0 D. 无定义

(3) 函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ x^2, & x \geqslant 1 \end{cases}$ 的定义域为（ ）.

A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-1,1) \cup (1, +\infty)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

(4) 函数 $y=e^{\frac{1}{x}}$ 的定义域是（ ）.

A. $(-\infty,+\infty)$ B. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ D. $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

(5) 函数 $y=\sqrt{5-x}+\ln(x-1)$ 的定义域是（ ）.

A. $(0,5]$ B. $(1,5]$ C. $(1,5)$ D. $(1,+\infty)$

3. 填空题（将正确的答案填在横线上）.

(1) 若函数 $f(x)=\lg(x-2)$ 的定义域为______.

(2) 设函数 $f(x)=\sin x+x$，则 $f(x^2)=$______.

(3) $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，则 $f(x-1)$ 的定义域为______.

(4) $f(x)=[x]$，则 $f(-3.2)=$______.

(5) $f(x)=\operatorname{sng}x$，则 $f(-3.2)=$______.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$； (2) $y=\dfrac{1}{\lg(2-x)}+\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

(3) $y=\sqrt[3]{3-x}-\arccos\dfrac{x-2}{3}$； (4) $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{x+2}$；

(5) $y=\begin{cases}x^2+1 & 1<x<2\\ x^3-1 & 2<x\leqslant 4\end{cases}$.

5. 设函数 $y=\arcsin x$，计算 $y|_{x=0}, y|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}, y|_{x=\frac{1}{2}}, y|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}}, y|_{x=1}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, -1<x<0\\ 2, 0\leqslant x<1\\ x-1, 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,

(1) 确定函数定义域，并画出图形；

(2) 求 $f(0), f(2), f(3), f(0.5), f(-0.5), f[f(0)]$.

7. 设矩形的面积为 A，试将周长 s 表示成宽 x 的函数，并写出定义域.

8. 某手表厂生产一只手表的可变成本为 15 元，每天的固定成本为 2000 元. 如果每只手表的售价为 20 元，为了不亏本，该厂每天至少应生产多少只手表？

第三节 函数的简单性质

一、函数的有界性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 定义在实数 D 内，如果存在正数 M，使得对任一 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则函数 $f(x)$ 在 D 内有界；如果不存在这样的正数 M，则函数 $f(x)$ 在 D 内无界. 也就是对于任意给定的一个正数 M（无论多么大），总有某个 $x\in D$，使得 $|f(x)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 D 内无界.

因为 $|f(x)|\leqslant M$，即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，所以有界函数的图形必介于两条平行于 x 轴的直线 $y=-M, y=M$ 之间. 如图 1-8 所示.

例如函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

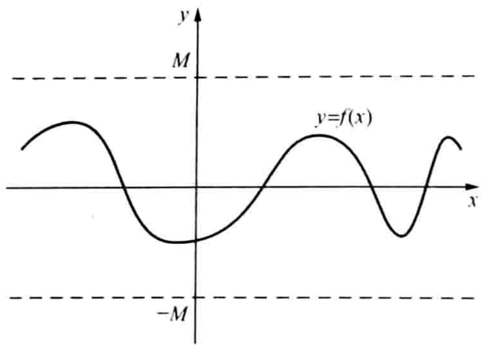

图 1-8

注意：函数的有界性是一个与自变量取值区间有关的概念. 例如 $y = 1/x$ 在 $(0,2)$ 内无界，在 $[1,+\infty)$ 内是有界的.

二、函数的单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义在数集 D 内，如果函数对集合 D 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) < f(x_2)\,[\text{或 } f(x_1) > f(x_2)],$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 内是**单调增加（减少）**的，如图 1-9 和图 1-10 所示.

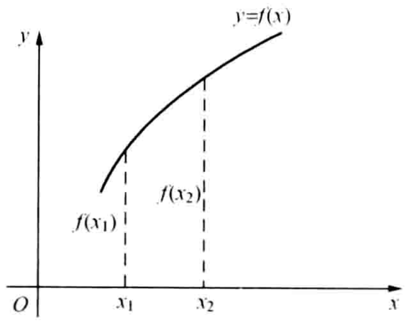

图 1-9

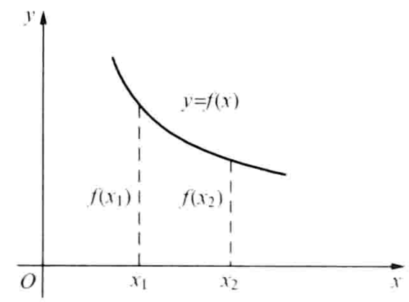

图 1-10

单调增加和单调减少函数称为**单调函数**. 单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的，单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的.

例如函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的，在 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数. 如图 1-11 所示.

又例如函数 $y=x^3$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加函数，如图 1-12 所示.

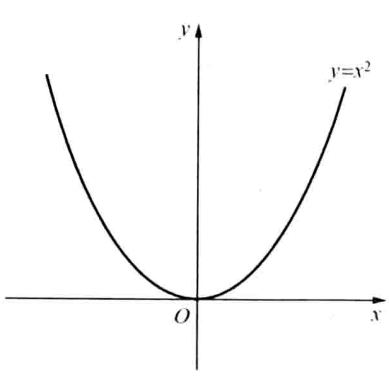

图 1-11

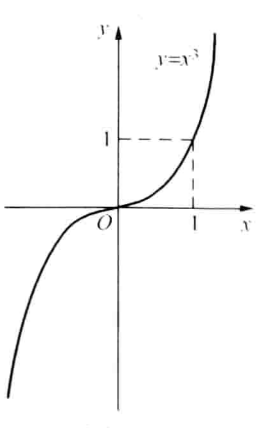

图 1-12

讨论函数单调性需要注意：

(1) 分析函数的单调性，总是在 x 轴上从左向右（即沿自变量 x 增大的方向）看函数值的变化；

(2) 函数可能在其定义域的一部分区间内是单调增加的，而在另一部分区间内是单调减少的，这时函数在整个定义域内不是单调的，例如函数 $y=\sin x$ 在其定义域

$(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

三、函数的奇偶性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于所有的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，称 $f(x)$ 为**偶函数**；若 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，称 $f(x)$ 为**奇函数**.

对于偶函数，因为 $f(-x)=f(x)$，所以点 $P(x,f(x))$ 如果在图像上，则与它关于 y 轴对称的点 $P'(-x,f(x))$ 也在图形上，故偶函数的图形关于 y 轴对称（见图 1-13）；对于奇函数，因为 $f(-x)=-f(x)$，所以点 $Q(x,f(x))$ 如果在图像上，则与它关于原点对称的点 $Q'(-x,-f(x))$ 也在图形上，故奇函数的图形关于原点对称（见图 1-14）.

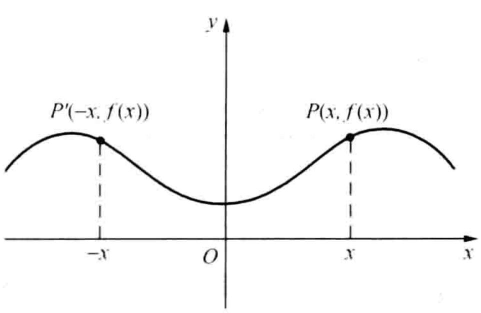

图 1-13

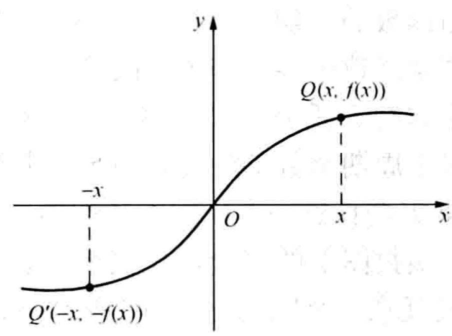

图 1-14

例如 $y=x^4-2x^2$ 为偶函数，其图像关于 y 轴对称；$y=\dfrac{1}{x}$ 为奇函数，其图形关于原点对称；$y=x^3-1$ 为非奇非偶函数.

【例 1-14】 讨论函数 $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ 的奇偶性.

解 原函数的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因为

$$f(-x)=e^{-\frac{1}{(-x)^2}}=e^{-\frac{1}{x^2}}=f(x),$$

所以函数 $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ 为偶函数.

【例 1-15】 讨论函数 $f(x)=x^2\sin x$ 的奇偶性.

解 原函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，因为

$$f(-x)=(-x)^2\sin(-x)=x^2(-\sin x)=-x^2\sin x=-f(x),$$

所以函数 $f(x)=x^2\sin x$ 为奇函数.

【例 1-16】 讨论函数 $f(x)=3x^3+\cos x$ 的奇偶性.

解 原函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，因为

$$f(-x)=3(-x)^3+\cos(-x)=-3x^3+\cos x,$$

又因为

$$f(-x)\neq f(x), f(-x)\neq -f(x),$$

所以函数 $f(x)=3x^3+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

【*例 1-17】 讨论函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性 $(a>0, a\neq 1)$.

解 原函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\log_a\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$