高职高专规划教材

数学应用技术

邓光　刘长太　主编

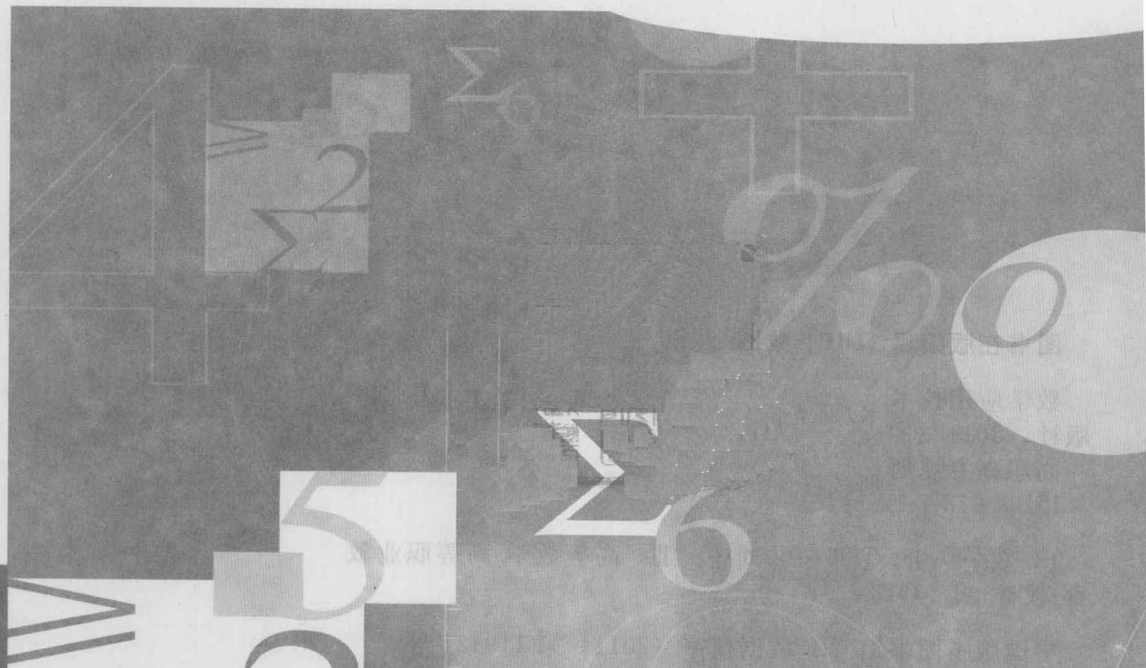
SHUXUE YINGYONG JISHU

化学工业出版社

高职高专规划教材

数学应用技术

邓光 刘长太 主编



SHUXUE YINGYONG JISHU

化学工业出版社

·北京·

本教材主要介绍数学方面的一些基本理论以及在实际生活中的应用，包括：函数及其应用，极限与连续，导数、微分及其应用，积分及其应用，常微分方程及其应用，拉普拉斯变换及其应用，向量代数与空间解析几何简介，多元函数微积分及其应用，无穷级数及其应用，行列式、矩阵与线性方程组及其应用，概率统计及其应用，数学建模与数学实验。每章配有相关的实际应用案例、习题、名人名言及阅读材料。

本教材可作为高职高专高中起点化工、机械、电子、信息、土建及经管等各大类专业数学公共基础课数学用书，也可作为专科层次成人教育、自学考试等参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

数学应用技术/邓光，刘长太主编．—北京：化学工业出版社，2011.8

高职高专规划教材

ISBN 978-7-122-11589-8

Ⅰ．数…　Ⅱ．①邓…②刘…　Ⅲ．高等数学-高等职业教育-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 119421 号

责任编辑：高　钰　提　岩　　　　文字编辑：薛　维

责任校对：蒋　宇　　　　装帧设计：韩　飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张 19　字数 489 千字　　2011 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　　售后服务：010-64518899

网　　址：http：//www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：34.00 元

前 言

本教材是按照教育部《高职高专教育数学课程教学基本要求》，针对高等职业教育“高素质技能型”人才培养目标，结合当前高等职业教育专业建设与课程改革的发展趋势编写的。

高等职业教育作为我国高等教育中的一种“类型”和“层次”，人才培养在满足经济建设所需职业技能的同时，更应重视社会发展对人的综合素质尤其是文化素质的要求。基于此，本教材作为2008年江苏省高校精品课程“数学应用技术”的重要支撑，力求体现“知识，应用，技能，发展”的课程建设理念和融理论与应用、知识与技能为一体的高等职业教育特点，在培养学生逻辑思维能力、掌握数学必要的基础知识与基本方法的同时，着重提高学生应用数学的能力，着重培养学生的科学思想、文化素质和创新能力。

本教材的主要特点是：将传统高等教育中的高等数学与工程数学融为一体，保持内容体系的完整性。同时，在内容处理上，对一些抽象的理论性定义和证明尽可能简略，对一些与专业学习、实际应用密切联系的内容与方法则尽可能详细。考虑到有限的教学时数，教学内容、教学时序采取了统一要求与按需分类的“模块化”思路。

分专业的模块组合与教学时序建议

学期安排	学习任务	组合1 化工类	组合2 机械类	组合3 电子类	组合4 土建类	组合5 经管类
第一学期	1. 函数及其应用	6	6	6	6	6
	2. 极限与连续	8	8	8	8	8
	3. 导数、微分及其应用	18	18	18	18	18
	4. 积分及其应用	20	20	20	20	20
第二学期	5. 常微分方程及其应用	10	10	10	10	14
	6. 拉普拉斯变换及其应用			6		
	7. 向量代数与空间解析几何简介		12	12	12	
	8. 多元函数微积分及其应用	12	12	12	12	
	9. 无穷级数及其应用			12		
	10. 行列式、矩阵与线性方程组及其应用	16	18		18	18
	11. 概率统计及其应用	14				20
	12. 数学建模与数学实验(选学)					
合计		104	104	104	104	104

《数学应用技术》教材于2007年被确定为江苏省高校立项精品教材，2011年被评为江苏省高校精品教材。

本教材第一、二、十和十一章由邓光负责编写，第三、四、五、八章由刘长太负责编写，第六、七章由房广梅负责编写，第九、十二章由徐静负责编写。此外，本教材在编写过程中得到了许多兄弟院校同行的支持和帮助，本校各专业系部及数学教研室的张林男、王伟、周明益、徐娟、耿红梅、朱荣华、徐辉军等教师也给予了大力协助，在此表示衷心的感谢。

由于编者的水平所限，教材中难免存在错误或不足，敬请读者给予批评和指正。

编者

2011年5月

目 录

一种科学只有在成功地运用数学时，
才算是达到了真正完善的地步。

——德国伟大的政治家、哲学家、革命理论家
卡尔·马克思（1818～1883年）

第一章 函数及其应用

函数是微积分研究的基本对象，也是用数学语言描绘现实世界的主要工具。本章将对函数的有关知识做进一步的复习巩固、加深理解和拓展学习。

本章要点：

- 基本初等函数的形式、图像与性质
- 分段函数的概念
- 复合函数的复合过程
- 函数的简单应用

第一节 函数概述

一、常量、变量与增量

1. 常量与变量

在自然现象或技术过程中不起变化或保持一定数值的量叫做**常量**。而在过程中变化着的或可以取不同数值的量叫做**变量**。

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力则取得越来越大的数值，所以它们是变量。一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出分析。

常量通常用字母 a、b、c 等表示，变量通常用字母 x、y、t 等表示。任何一个变量总有一定的变化范围，如果变量的变化是连续的，则常用区间来表示变量的变化范围。

2. 变量的增量

设变量 x 从它的初值 x_1 变到终值 x_2，终值与初值的差 x_2-x_1 就叫做变量 x 的增量，记作 Δx，即

$$\Delta x=x_2-x_1$$

增量 Δx 可以是正的，可以是负的，也可以是零。记号 Δx 并不表示某个量 Δ 与变量 x 的乘积，而是一个整体不可分割的记号。

例如，平面上的动点 P，其起点坐标为 $(1,-2)$，终点坐标为 $(5,8)$，那么关于坐标 x、y 的增量则分别是 $\Delta x=5-1=4$ 和 $\Delta y=8-(-2)=10$。

二、函数的概念

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集的某个子集，若对于 x 在 D 中的每个取值，变量 y 按照一定的法则或对应关系总有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**[1]，记作

$$y=f(x)$$

x 叫做**自变量**，数集 D 叫做函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的**值域**，定义域和对应关系是构成函数的两个要素。

在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求对于自变量 $x\in D$ 都有确定的 $y\in M$ 与它对应。因此，常量 $y=C$ 也符合函数的定义，因为当 $x\in R$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C。

2. 函数的符号

y 是 x 的函数可以记作 $y=f(x)$，但在同一个问题中，如果出现几个不同的函数，为区别起见，可采用不同的函数记号来表示。例如，以 x 为自变量的函数可以表示为

---

[1] 中国清代数学家李善兰（1811～1882 年）翻译的《代数学》一书中首次用中文把“function”翻译为“函数”，此译名沿用至今。

$$F(x),\ g(x),\ \varphi(x),\ \cdots$$

函数 $y=f(x)$ 当 $x=x_0\in D$ 时，对应的函数值可以记为 $f(x_0)$。

例 1 设 $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f(a)$。

解： $f(0)=\arcsin 0=0$

$f(-1)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$

$f(a)=\arcsin a$，$a\in[-1,1]$

例 2 若 $f(x+1)=x^2+x$，求 $f(x)$。

解： 令 $x+1=u$，则 $x=u-1$

$$f(x+1)=f(u)=(u-1)^2+(u-1)=u^2-u$$

故 $$f(x)=x^2-x$$

3. 函数的定义域

研究函数时，必须注意函数的定义域。函数的定义域由函数表达式或函数所涉及的实际问题来确定。若从函数表达式本身来确定函数的定义域，一般可从以下几个方面考虑：

① 在分式中，分母不能为零；

② 在根式中，负数不能开偶次方根；

③ 在对数式、三角函数、反三角函数中，要符合相关函数的定义域；

④ 函数表达式中有分式、根式、对数式、三角函数式和反三角函数式时，要取其交集。

例 3 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\frac{1}{x^2-2x}+\sqrt{3-x}$

解： 由 $\begin{cases}x^2-2x\neq 0\\ 3-x\geqslant 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 2\\ x\leqslant 3\end{cases}$

故该函数的定义域为

$$(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,3]$$

(2) $y=\arcsin\frac{x+1}{3}$

解： 由 $-1\leqslant\frac{x+1}{3}\leqslant 1$ 得 $-4\leqslant x\leqslant 2$

故 该函数的定义域为

$$[-4,2]$$

函数的定义域可以用区间或集合来表示。

4. 相同函数

两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才被认为是相同的。例如，函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$，由于它们的定义域和对应关系都相同，所以它们是相同

函数。又如，函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$，虽然定义域相同，但由于对应关系不同，所以它们是不同的函数。

5. 反函数

设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M。若对于 M 中的每一个 y 值（$y\in M$），都可以从 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值（$x\in D$），则根据函数的定义，x 也可以称为是 y 的函数，叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 M，值域为 D。

习惯上，函数的自变量都用 x 表示，所以，反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$。

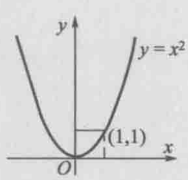
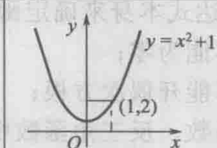
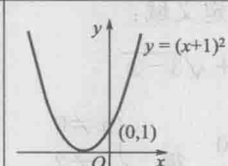
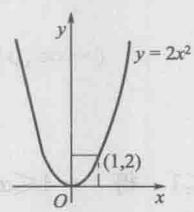
函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。（想一想：能否说“函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称”?）

并不是每一个函数在其定义域上都有反函数。简单地说，反函数存在的条件就是 x 与 y 必须满足一一对应的关系。

三、函数的图像

表示函数通常有公式法、表格法和图像法三种方法。图像法是了解函数基本特征的一种直观方法。掌握函数图像随函数式而变化的基本规律，对于快速描绘函数图像、了解变量间的变化规律和函数特征具有重要的意义。例如表 1-1。

表 1-1

<table>
<tr><th>函数</th><th>图　像</th><th>函数式变化</th><th>图像变化</th><th>图像变化特点</th></tr>
<tr><td rowspan="6">$y=x^2$</td><td rowspan="6">
</td><td>$y=x^2+1$</td><td>
</td><td>将函数 $y=x^2$ 的图像沿 y 轴方向整体向上平移 1 个单位</td></tr>
<tr><td>$y=x^2-1$</td><td>略</td><td>略</td></tr>
<tr><td>$y=(x+1)^2$</td><td>
</td><td>将函数 $y=x^2$ 的图像沿 x 轴方向整体向左平移 1 个单位</td></tr>
<tr><td>$y=(x-1)^2$</td><td>略</td><td>略</td></tr>
<tr><td>$y=2x^2$</td><td>
</td><td>将函数 $y=x^2$ 的图像每个横坐标所对应的纵坐标扩大为原来的 2 倍</td></tr>
<tr><td>$y=\frac{1}{2}x^2$</td><td>略</td><td>略</td></tr>
</table>

四、函数的一般性质

1. 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**。

若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**。

若函数 $f(x)$ 既非奇函数，也非偶函数，则称 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**。

例如，$f(x)=\sin x$ 是奇函数，$f(x)=\cos x$ 是偶函数，而 $f(x)=\sin x+\cos x$ 则是非奇非偶函数。

奇函数的图像是关于原点对称的（如图 1-1 所示），偶函数的图像是关于 y 轴对称的（如图 1-2 所示）。不论是奇函数还是偶函数，它们的定义域必须关于原点对称。

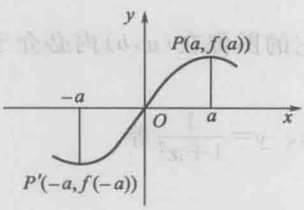


图 1-1

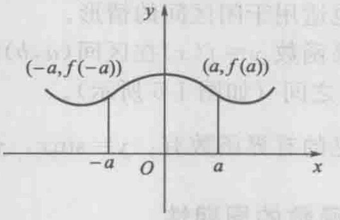


图 1-2

进一步地，可以得出结论：任何一个定义域关于原点对称的函数一定能够表示为一个奇函数和一个偶函数的和。即

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

2. 函数的单调性

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 的增大而增大，即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，有

$$当\ x_1<x_2 时，f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加的**，函数 $f(x)$ 叫做**单调增函数**，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调增加区间。单调增函数的图像特征是沿横坐标轴正向上升（如图 1-3 所示）。

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 的增大而减小，即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，有

$$当\ x_1<x_2 时，f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减小的**，函数 $f(x)$ 叫做**单调减函数**，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调减小区间。单调减函数的图像特征是沿横坐标轴正向下降（如图 1-4 所示）。

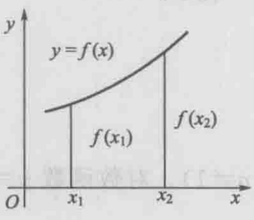


图 1-3

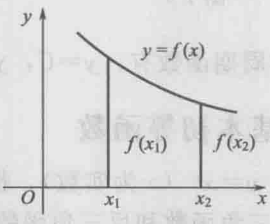


图 1-4

函数的单调增加与单调减小特性统称为**函数的单调性**。有些函数在定义域内具有单调性，而有些函数在定义域内没有单调性，但在定义域的局部区间内却有单调性。例如，函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数，但在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上却是单调增加的，在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 上又是单调减小的。

3. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在一个正数 M，使得对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，对应的函数值 $f(x)$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**有界**；若这样的数 M 不存在，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**无界**。此定义也适用于闭区间的情形。

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是有界的，那么它的图像在 (a,b) 内必介于两平行线 $y=\pm M$ 之间（如图 1-5 所示）。

常见的有界函数有：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$，$y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 等。

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$，若存在一个正数 T，使得对于定义域内的一切 x，等式

$$f(x+T)=f(x)$$

都成立，则称函数 $f(x)$ 是**周期函数**，正数 T 叫做这个函数的**周期**。显然，$2T$，$3T$，…，$nT(n\in N)$ 都是周期，周期的最小正数叫做周期函数的**最小正周期**（这里所说的周期通常是指函数的最小正周期）。

如果一个函数以 T 为周期，那么它的图像在定义域内每隔长度 T 的相邻区间上有相同的形状（如图 1-6 所示）。

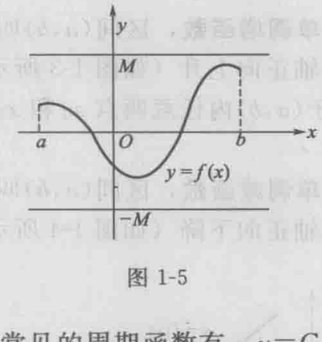


图 1-5

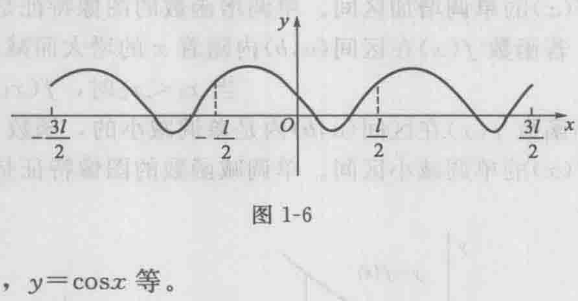


图 1-6

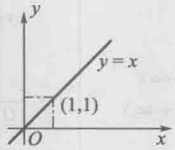
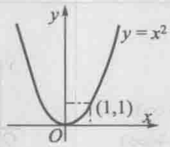
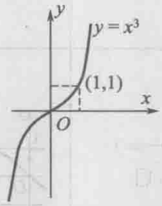
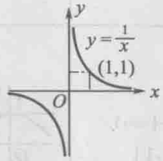
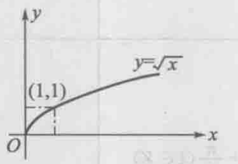
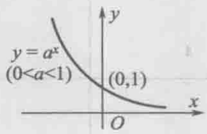
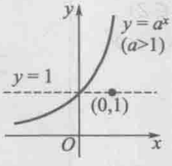
常见的周期函数有：$y=C$，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 等。

五、基本初等函数

幂函数 $y=x^a$（a 为实数）、指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）、对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**。

常用基本初等函数的定义域、值域、图像和特性见表 1-2。

表 1-2

	函　　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,+\infty)$单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$单调减少 在$[0,+\infty)$单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,+\infty)$单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$单调减少 在$(0,+\infty)$单调减少
	$y=\sqrt{x}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		非奇非偶函数 在$[0,+\infty)$单调增加
指数函数	$y=a^x(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		非奇非偶函数 在$(-\infty,+\infty)$单调减少
	$y=a^x(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		非奇非偶函数 在$(-\infty,+\infty)$单调增加