

高职高专规划教材

数学应用技术

邓光 刘长太 主编

SHUXUE YINGYONG JISHU



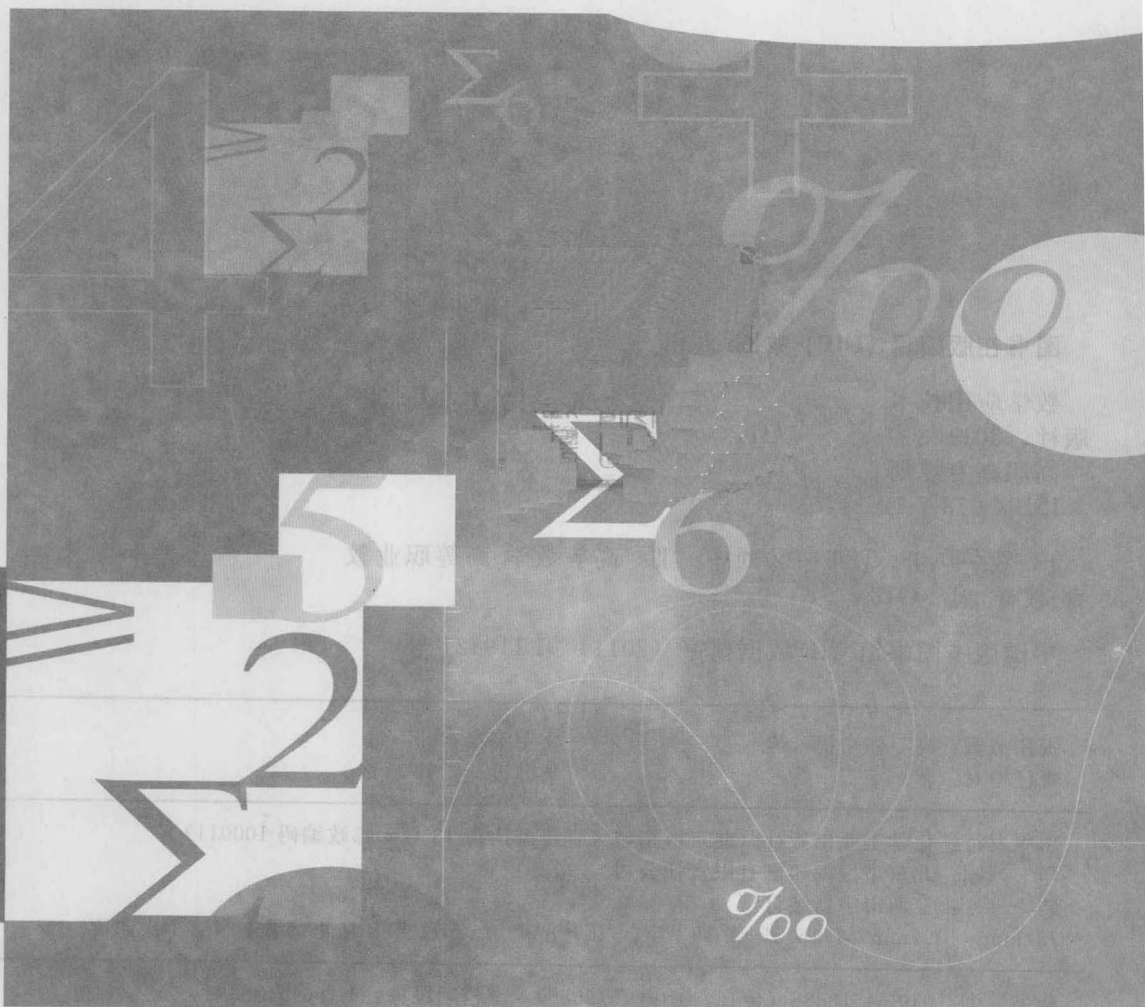
化学工业出版社

高职高专规划教材

数学应用技术

邓光 刘长太 主编

SHUXUE YINGYONG JISHU



化学工业出版社

· 北京 ·

定价: 35.00元

本教材主要介绍数学方面的一些基本理论以及在实际生活中的应用,包括:函数及其应用,极限与连续,导数、微分及其应用,积分及其应用,常微分方程及其应用,拉普拉斯变换及其应用,向量代数与空间解析几何简介,多元函数微积分及其应用,无穷级数及其应用,行列式、矩阵与线性方程组及其应用,概率统计及其应用,数学建模与数学实验。每章配有相关的实际应用案例、习题、名人名言及阅读材料。

本教材可作为高职高专高中起点化工、机械、电子、信息、土建及经管等各大类专业数学公共基础课数学用书,也可作为专科层次成人教育、自学考试等参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

数学应用技术/邓光,刘长太主编. —北京:化学工业出版社, 2011.8

高职高专规划教材

ISBN 978-7-122-11589-8

I. 数… II. ①邓…②刘… III. 高等数学-高等职业教育-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 119421 号

责任编辑:高钰提岩

文字编辑:薛维

责任校对:蒋宇

装帧设计:韩飞

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011)

印刷:北京市振南印刷有限责任公司

装订:三河市宇新装订厂

787mm×1092mm 1/16 印张19 字数489千字 2011年8月北京第1版第1次印刷

购书咨询:010-64518888(传真:010-64519686) 售后服务:010-64518899

网址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

定 价:34.00 元

版权所有 违者必究

前言

本教材是按照教育部《高职高专教育数学课程教学基本要求》，针对高等职业教育“高素质技能型”人才培养目标，结合当前高等职业教育专业建设与课程改革的发展趋势编写的。

高等职业教育作为我国高等教育中的一种“类型”和“层次”，人才培养在满足经济建设所需职业技能的同时，更应重视社会发展对人的综合素质尤其是文化素质的要求。基于此，本教材作为2008年江苏省高校精品课程“数学应用技术”的重要支撑，力求体现“知识，应用，技能，发展”的课程建设理念和融理论与应用、知识与技能为一体的高等职业教育特点，在培养学生逻辑思维能力、掌握数学必要的基础知识与基本方法的同时，着重提高学生应用数学的能力，着重培养学生的科学思想、文化素质和创新能力。

本教材的主要特点是：将传统高等教育中的高等数学与工程数学融为一体，保持内容体系的完整性。同时，在内容处理上，对一些抽象的理论性定义和证明尽可能简略，对一些与专业学习、实际应用密切联系的内容与方法则尽可能详细。考虑到有限的教学时数，教学内容、教学时序采取了统一要求与按需分类的“模块化”思路。

分专业的模块组合与教学时序建议

学期 安排	学习任务	组合 1 化工类	组合 2 机械类	组合 3 电子类	组合 4 土建类	组合 5 经管类
第一学期	1. 函数及其应用	6	6	6	6	6
	2. 极限与连续	8	8	8	8	8
	3. 导数、微分及其应用	18	18	18	18	18
	4. 积分及其应用	20	20	20	20	20
第二学期	5. 常微分方程及其应用	10	10	10	10	14
	6. 拉普拉斯变换及其应用			6		
	7. 向量代数与空间解析几何简介		12	12	12	
	8. 多元函数微积分及其应用	12	12	12	12	
	9. 无穷级数及其应用			12		
	10. 行列式、矩阵与线性方程组及其应用	16	18		18	18
	11. 概率统计及其应用	14				20
	12. 数学建模与数学实验(选学)					
合计		104	104	104	104	104

《数学应用技术》教材于2007年被确定为江苏省高校立项精品教材，2011年被评为江苏省高校精品教材。

本教材第一、二、十和十一章由邓光负责编写，第三、四、五、八章由刘长太负责编写，第六、七章由房广梅负责编写，第九、十二章由徐静负责编写。此外，本教材在编写过程中得到了许多兄弟院校同行的支持和帮助，本校各专业系部及数学教研室的张林男、王伟、周明益、徐娟、耿红梅、朱荣华、徐辉军等教师也给予了大力协助，在此表示衷心的感谢。

由于编者的水平所限，教材中难免存在错误或不足，敬请读者给予批评和指正。

编者
2011年5月

目 录

第一章 函数及其应用	1
第一节 函数概述	2
一、常量、变量与增量	2
二、函数的概念	2
三、函数的图像	4
四、函数的一般性质	4
五、基本初等函数	6
六、分段函数、复合函数和初等函数	9
习题 1-1	10
第二节 函数的应用	11
【应用 1-1】 个人所得税问题	11
【应用 1-2】 银行储蓄问题	12
【应用 1-3】 住房贷款问题	13
习题 1-2	14
阅读材料 中国女数学家王小云成功破译“白宫密码”	15
第二章 极限与连续	17
第一节 函数的极限	18
一、两个常用术语与一组记号	18
二、函数极限的概念	19
三、无穷小与无穷大	22
四、函数极限的运算	23
五、两个重要极限	25
习题 2-1	27
第二节 函数的连续性	28
一、函数连续性的概念	28
二、闭区间上连续函数的性质	30
习题 2-2	30
阅读材料 人民的数学家——华罗庚	31
第三章 导数、微分及其应用	33
第一节 导数及其运算	34
一、导数的概念	34
二、导数的运算（函数的求导）	38
习题 3-1	44

第二节 微分及其运算	45
一、微分的概念	45
二、微分的运算	46
习题 3-2	48
第三节 导数与微分的应用	49
【应用 3-1】 利用导数求极限	49
【应用 3-2】 导数的运动学意义	50
【应用 3-3】 函数图像的描绘	50
【应用 3-4】 最大值、最小值的计算	56
【应用 3-5】 曲线曲率的计算	57
【应用 3-6】 弧微分的计算	59
【应用 3-7】 微分在近似计算中的应用	60
【应用 3-8】 微分在误差估计中的应用	61
习题 3-3	62
阅读材料 我国著名数学家陈景润——“1+2”的选择	65
第四章 积分及其应用	67
第一节 不定积分及其运算	68
一、不定积分的概念	68
二、不定积分的运算	69
习题 4-1	75
第二节 定积分及其运算	76
一、定积分的概念	76
二、定积分的运算	79
习题 4-2	83
第三节 定积分的应用	85
【应用 4-1】 平面图形的面积	85
【应用 4-2】 旋转体的体积	86
【应用 4-3】 平面曲线的弧长	87
【应用 4-4】 变力做功问题	88
【应用 4-5】 液体压力问题	88
【应用 4-6】 连续函数的均值	89
习题 4-3	89
阅读材料 多才多艺的莱布尼兹	91
第五章 常微分方程及其应用	94
第一节 一阶线性微分方程	95
一、微分方程的概念	95
二、一阶线性微分方程的概念及解法	97
习题 5-1	100
第二节 二阶线性微分方程	101
一、二阶线性微分方程的概念	101

二、二阶常系数齐次线性微分方程	103
三、二阶常系数非齐次线性微分方程	104
习题 5-2	107
第三节 常微分方程的应用	107
【应用 5-1】 运动轨迹问题	107
【应用 5-2】 化学反应问题	108
【应用 5-3】 生产成本问题	108
【应用 5-4】 动力学问题	109
【应用 5-5】 电振荡问题	109
习题 5-3	110
阅读材料 常微分方程的起源与发展	111
第六章 拉普拉斯变换及其应用	113
第一节 拉普拉斯变换	114
一、拉普拉斯变换的概念与性质	114
二、拉普拉斯变换的逆变换	116
习题 6-1	118
第二节 拉普拉斯变换的应用	118
【应用 6-1】 利用拉氏变换求解常微分方程	118
【应用 6-2】 利用拉氏变换解常微分方程组	119
【应用 6-3】 化工应用之连续搅拌反应罐 (CSTR) 的清洗问题	120
【应用 6-4】 自动控制系统中常用的两个函数	121
习题 6-2	122
阅读材料 拉普拉斯简介	122
第七章 向量代数与空间解析几何简介	125
第一节 向量代数	126
一、空间直角坐标系	126
二、向量的概念及表示	127
三、向量的运算	129
四、向量的应用	131
【应用 7-1】 做功问题	131
【应用 7-2】 面积问题	131
习题 7-1	132
第二节 空间解析几何	133
一、平面及其方程	133
二、空间直线方程	135
三、空间二次曲面	137
习题 7-2	140
阅读材料 人生几何 几何人生——记著名数学家陈省身	140

第八章 多元函数微积分及其应用	143
第一节 多元函数	144
一、多元函数的概念	144
二、二元函数的极限与连续	145
习题 8-1	146
第二节 多元函数微分及其应用	146
一、多元函数的偏导数与全微分	146
二、多元函数微分的应用	150
【应用 8-1】 空间曲线的切线与法平面	150
【应用 8-2】 空间曲面的切平面与法线	150
【应用 8-3】 全微分在增量近似计算中的应用	151
【应用 8-4】 全微分在函数近似计算中的应用	151
【应用 8-5】 多元函数的极值	152
【应用 8-6】 多元函数的最值	153
习题 8-2	154
第三节 二重积分及其应用	155
一、二重积分的概念及性质	155
二、二重积分的计算	157
三、二重积分的应用	160
【应用 8-7】 平面图形的面积	160
【应用 8-8】 空间立体图形的体积	160
【应用 8-9】 空间曲面的面积	161
习题 8-3	162
阅读材料 数学天才——伽罗华	163
第九章 无穷级数及其应用	165
第一节 常数项级数	166
一、常数项级数的概念及性质	166
二、常数项级数的审敛法	168
习题 9-1	170
第二节 幂级数	170
一、幂级数的概念	170
二、幂级数的敛散性	171
三、幂级数的运算	172
四、幂级数的展开	173
习题 9-2	174
第三节 傅里叶级数	175
一、傅里叶级数的概念	175
二、傅里叶级数的展开	175
习题 9-3	178
第四节 级数的应用	178

【应用 9-1】 函数的近似计算	178
【应用 9-2】 定积分的近似计算	179
习题 9-4	179
阅读材料 朱熹平——为庞加莱猜想“封顶”的人	180
第十章 行列式、矩阵与线性方程组及其应用	182
第一节 行列式	183
一、行列式的概念	183
二、行列式的性质	185
三、行列式的计算	187
四、克莱姆法则	189
习题 10-1	191
第二节 矩阵	192
一、矩阵的概念	192
二、矩阵的运算	194
三、矩阵的秩与矩阵的初等变换	195
四、矩阵的逆	196
习题 10-2	198
第三节 线性方程组	199
一、线性方程组的概念及矩阵表示	199
二、线性方程组的解	200
三、线性方程组的求解	202
习题 10-3	206
第四节 行列式、矩阵与线性方程组的应用	206
【应用 10-1】 招投标问题	206
【应用 10-2】 生产计划问题	207
【应用 10-3】 建筑工程计算	208
【应用 10-4】 化工浓度确定	209
【应用 10-5】 利润最大问题	209
习题 10-4	210
阅读材料 一代数学宗师——欧拉 (Euler)	211
第十一章 概率统计及其应用	213
第一节 概率及其应用	214
一、随机事件	214
二、概率	216
三、概率的应用	219
【应用 11-1】 生日问题	219
【应用 11-2】 会面问题	219
【应用 11-3】 布丰 (Buffon) 投针试验	219
【应用 11-4】 责任追究问题	220
【应用 11-5】 可靠性问题	220

习题 11-1	221
第二节 随机变量及其分布	223
一、随机变量的概念	223
二、离散型随机变量	224
三、连续型随机变量	227
四、随机变量的分布函数	229
五、随机变量的数字特征	231
习题 11-2	235
第三节 统计及其应用	237
一、总体、个体、样本及样本统计量	237
二、参数估计	238
三、假设检验	240
习题 11-3	242
阅读材料 居高声自远	242
第十二章 数学建模与数学实验	245
第一节 数学建模简介	246
一、数学建模的概念	246
二、数学建模举例	246
三、全国大学生数学建模竞赛	251
第二节 Mathematica 软件使用基础	254
一、Mathematica 的启动和运行	254
二、数学表达式的输入	256
三、Mathematica 的联机帮助系统	256
第三节 数学实验	258
一、函数极限	258
二、导数与微分	259
三、不定积分与定积分	262
四、常微分方程	265
五、向量与空间解析几何	268
六、重积分(多变量函数的积分)	270
七、无穷级数	272
八、线性代数	273
习题	276
阅读材料 钱学森与“钱学森之问”	278
附表	281
附表一 简易积分表	281
附表二 常用函数的拉普拉斯变换表	289
附表三 随机变量分布表	289
参考文献	291



科学只有成功地运用数学时，
才算是达到了真正完善的地步。

——德国伟大的政治家、哲学家、革命理论家
卡尔·马克思 (1818~1883 年)

第一章

函数及其应用

函数是微积分研究的基本对象，也是用数学语言描绘现实世界的主要工具。本章将对函数的有关知识做进一步的复习巩固、加深理解和拓展学习。

本章要点：

- ◆ 基本初等函数的形式、图像与性质
- ◆ 分段函数的概念
- ◆ 复合函数的复合过程
- ◆ 函数的简单应用

第一节 函数概述

一、常量、变量与增量

1. 常量与变量

在自然现象或技术过程中不起变化或保持一定数值的量叫做常量。而在过程中变化着的或可以取不同数值的量叫做变量。

例如,把一个密闭容器内的气体加热时,气体的体积和气体的分子个数保持一定,它们是常量;而气体的温度和压力则取得越来越大的数值,所以它们是变量。一个量是常量还是变量,要根据具体情况作出分析。

常量通常用字母 a 、 b 、 c 等表示,变量通常用字母 x 、 y 、 t 等表示。任何一个变量总有一定的变化范围,如果变量的变化是连续的,则常用区间来表示变量的变化范围。

2. 变量的增量

设变量 x 从它的初值 x_1 变到终值 x_2 , 终值与初值的差 $x_2 - x_1$ 就叫做变量 x 的增量,记作 Δx , 即

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

增量 Δx 可以是正的,可以是负的,也可以是零。记号 Δx 并不表示某个量 Δ 与变量 x 的乘积,而是一个整体不可分割的记号。

例如,平面上的动点 P , 其起点坐标为 $(1, -2)$, 终点坐标为 $(5, 8)$, 那么关于坐标 x 、 y 的增量则分别是 $\Delta x = 5 - 1 = 4$ 和 $\Delta y = 8 - (-2) = 10$ 。

二、函数的概念

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量, D 是实数集的某个子集, 若对于 x 在 D 中的每个取值, 变量 y 按照一定的法则或对应关系总有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数^①, 记作

$$y = f(x)$$

x 叫做自变量, 数集 D 叫做函数的定义域, 当 x 取遍 D 中的一切实数值时, 与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的值域, 定义域和对应关系是构成函数的两个要素。

在函数的定义中, 并没有要求自变量变化时函数值一定要变, 只要求对于自变量 $x \in D$ 都有确定的 $y \in M$ 与它对应。因此, 常量 $y = C$ 也符合函数的定义, 因为当 $x \in R$ 时, 所对应的 y 值都是确定的常数 C 。

2. 函数的符号

y 是 x 的函数可以记作 $y = f(x)$, 但在同一个问题中, 如果出现几个不同的函数, 为区别起见, 可采用不同的函数记号来表示。例如, 以 x 为自变量的函数可以表示为

^① 中国清代数学家李善兰 (1811~1882 年) 翻译的《代数学》一书中首次用中文把 “function” 翻译为 “函数”, 此译名沿用至今。

$F(x), g(x), \varphi(x), \dots$

函数 $y=f(x)$ 当 $x=x_0 \in D$ 时, 对应的函数值可以记为 $f(x_0)$ 。

例 1 设 $f(x)=\arcsin x$, 求 $f(0), f(-1), f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), f(a)$ 。

解: $f(0)=\arcsin 0=0$

$$f(-1)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

$$f(a)=\arcsin a, a \in [-1, 1]$$

例 2 若 $f(x+1)=x^2+x$, 求 $f(x)$ 。

解: 令 $x+1=u$, 则 $x=u-1$

$$f(x+1)=f(u)=(u-1)^2+(u-1)=u^2-u$$

故

$$f(x)=x^2-x$$

3. 函数的定义域

研究函数时, 必须注意函数的定义域。函数的定义域由函数表达式或函数所涉及的实际问题来确定。若从函数表达式本身来确定函数的定义域, 一般可从以下几个方面考虑:

- ① 在分式中, 分母不能为零;
- ② 在根式中, 负数不能开偶次方根;
- ③ 在对数式、三角函数、反三角函数中, 要符合相关函数的定义域;
- ④ 函数表达式中有分式、根式、对数式、三角函数式和反三角函数式时, 要取其交集。

例 3 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x)=\frac{1}{x^2-2x}+\sqrt{3-x}$$

$$\text{解: 由 } \begin{cases} x^2-2x \neq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

故该函数的定义域为

$$(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 3]$$

$$(2) y=\arcsin \frac{x+1}{3}$$

$$\text{解: 由 } -1 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1 \text{ 得 } -4 \leq x \leq 2$$

故 该函数的定义域为

$$[-4, 2]$$

函数的定义域可以用区间或集合来表示。

4. 相同函数

两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时, 这两个函数才被认为是相同的。

例如, 函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$, 由于它们的定义域和对应关系都相同, 所以它们是相同

函数。又如, 函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$, 虽然定义域相同, 但由于对应关系不同, 所以它们是不同的函数。

5. 反函数

设函数 $y=f(x)$, 其定义域为 D , 值域为 M 。若对于 M 中的每一个 y 值 ($y \in M$), 都可以从 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值 ($x \in D$), 则根据函数的定义, x 也可以称为是 y 的函数, 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$, 它的定义域为 M , 值域为 D 。

习惯上, 函数的自变量都用 x 表示, 所以, 反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$ 。

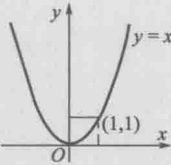
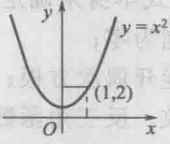
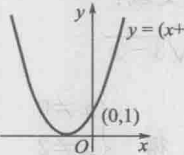
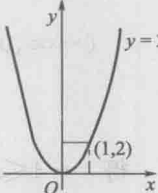
函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。(想一想: 能否说“函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称”?)

并不是每一个函数在其定义域上都有反函数。简单地说, 反函数存在的条件就是 x 与 y 必须满足一一对应的关系。

三、函数的图像

表示函数通常有公式法、表格法和图像法三种方法。图像法是了解函数基本特征的一种直观方法。掌握函数图像随函数式而变化的基本规律, 对于快速描绘函数图像、了解变量间的变化规律和函数特征具有重要的意义。例如表 1-1。

表 1-1

函数	图 像	函数式变化	图像变化	图像变化特点
$y=x^2$		$y=x^2+1$		将函数 $y=x^2$ 的图像沿 y 轴方向整体向上平移 1 个单位
		$y=x^2-1$	略	略
		$y=(x+1)^2$		将函数 $y=x^2$ 的图像沿 x 轴方向整体向左平移 1 个单位
		$y=(x-1)^2$	略	略
		$y=2x^2$		将函数 $y=x^2$ 的图像每个横坐标所对应的纵坐标扩大为原来的 2 倍
		$y=\frac{1}{2}x^2$	略	略

四、函数的一般性质

1. 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 且对任意 x , 都有

若函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为奇函数。

若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意 x ，都有

$$f(-x) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数。

若函数 $f(x)$ 既非奇函数，也非偶函数，则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数。

例如， $f(x) = \sin x$ 是奇函数， $f(x) = \cos x$ 是偶函数，而 $f(x) = \sin x + \cos x$ 则是非奇非偶函数。

奇函数的图像是关于原点对称的（如图 1-1 所示），偶函数的图像是关于 y 轴对称的（如图 1-2 所示）。不论是奇函数还是偶函数，它们的定义域必须关于原点对称。

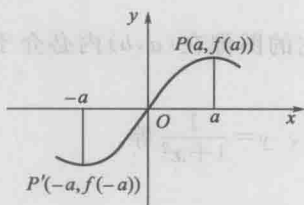


图 1-1

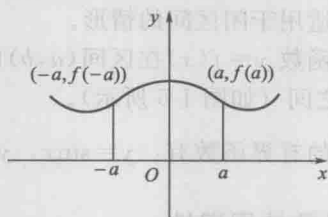


图 1-2

进一步地，可以得出结论：任何一个定义域关于原点对称的函数一定能够表示为一个奇函数和一个偶函数的和。即

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

2. 函数的单调性

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 的增大而增大，即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 和 x_2 ，有当 $x_1 < x_2$ 时， $f(x_1) < f(x_2)$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加的，函数 $f(x)$ 叫做单调增函数，区间 (a, b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调增加区间。单调增函数的图像特征是沿横坐标轴正向上升（如图 1-3 所示）。

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 的增大而减小，即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 和 x_2 ，有当 $x_1 < x_2$ 时， $f(x_1) > f(x_2)$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调减小的，函数 $f(x)$ 叫做单调减函数，区间 (a, b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调减小区间。单调减函数的图像特征是沿横坐标轴正向下下降（如图 1-4 所示）。

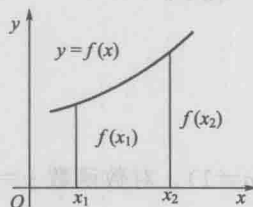


图 1-3

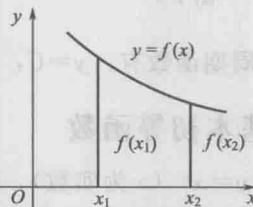


图 1-4

函数的单调增加与单调减小特性统称为函数的单调性。有些函数在定义域内具有单调性,而有些函数在定义域内没有单调性,但在定义域的局部区间内却有单调性。例如,函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数,但在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 上却是单调增加的,在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 上又是单调减小的。

3. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义,若存在一个正数 M ,使得对于区间 (a, b) 内的一切 x 值,对应的函数值 $f(x)$ 都有

$$|f(x)| \leq M$$

则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界;若这样的数 M 不存在,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界。此定义也适用于闭区间的情形。

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内是有界的,那么它的图像在 (a, b) 内必介于两平行线 $y=\pm M$ 之间(如图 1-5 所示)。

常见的有界函数有: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\arctan x$, $y=\frac{1}{1+x^2}$ 等。

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$,若存在一个正数 T ,使得对于定义域内的一切 x ,等式

$$f(x+T)=f(x)$$

都成立,则称函数 $f(x)$ 是周期函数,正数 T 叫做这个函数的周期。显然, $2T, 3T, \dots, nT (n \in \mathbb{N})$ 都是周期,周期的最小正数叫做周期函数的最小正周期(这里所说的周期通常是指函数的最小正周期)。

如果一个函数以 T 为周期,那么它的图像在定义域内每隔长度 T 的相邻区间上有相同的形状(如图 1-6 所示)。

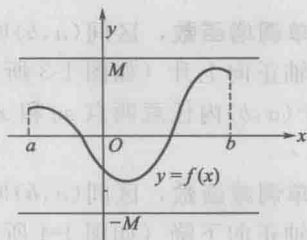


图 1-5

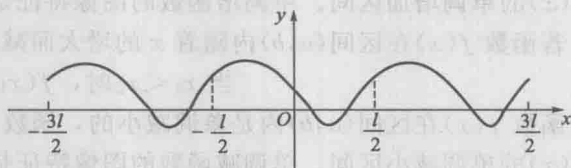


图 1-6

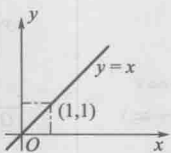
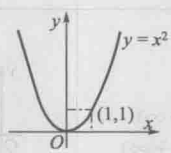
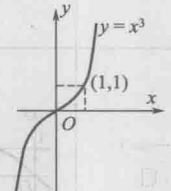
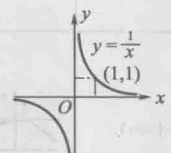
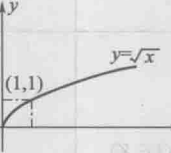
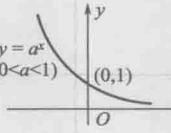
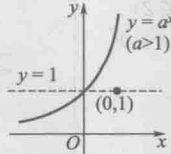
常见的周期函数有: $y=C$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ 等。

五、基本初等函数

幂函数 $y=x^a$ (a 为实数)、指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)、对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

常用基本初等函数的定义域、值域、图像和特性见表 1-2。

表 1-2

函 数	定义域与值域	图 像	特 性
$y=x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加
$y=x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数 在 $(-\infty, 0)$ 单调减少 在 $[0, +\infty)$ 单调增加
幂 函 数 $y=x^3$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加
$y=x^{-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇函数 在 $(-\infty, 0)$ 单调减少 在 $(0, +\infty)$ 单调减少
$y=\sqrt{x}$	$x \in [0, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		非奇非偶函数 在 $[0, +\infty)$ 单调增加
指 数 函 数 $y=a^x (0 < a < 1)$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		非奇非偶函数 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调减少
数 $y=a^x (a > 1)$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		非奇非偶函数 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加