

触摸数学

魔法无边的小精灵，生活的魔法棒

郝志峰 洪 毅 林健良 陶志穗◎编著

◎台球里也有数学

◎扑克魔术中的数学

◎商人们怎样安全过河

◎竞赛规则与法制

◎彩票的数学期望

◎时钟的指针

◎游戏的最佳策略

◎笔画，哥尼斯堡七桥问题

◎计算机如何识别文字

◎谁的最佳视角更大

◎数学大师——华罗庚教授

◎为何在月球上看不到长城

牛和羊，是朋友还是敌人



广东高等教育出版社

Guangdong Higher Education Press

CHUMO SHUXUE

触摸数学

魔法无边的小精灵，生活的魔法棒

郝志峰 洪 毅 林健良 陶志穗◎编著



广东高等教育出版社

Guangdong Higher Education Press

广州

图书在版编目 (CIP) 数据

触摸数学：魔法无边的小精灵，生活的魔法棒/郝志峰等编著. —广州：广东高等教育出版社，2013. 7

ISBN 978 - 7 - 5361 - 4699 - 0

I. ①触… II. ①郝… III. ①数学 - 青年读物②数学 - 少年读物 IV. ①O1 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 104105 号

广东高等教育出版社出版发行

地址：广州市天河区林和西横路

邮编：510500 电话：87551163 87553335

佛山市浩文彩色印刷有限公司印刷

850 毫米×1168 毫米 32 开本 8.25 印张 207 千字

2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

定价：18.00 元



前 言

数学是最古老的科学。天文学、物理学、化学都是逐步从数学中分出来的科学。欧洲工业革命以来，数学得到了广泛的应用，但主要还是通过天文学、物理学和化学来体现的。在第二次世界大战中，数学被直接应用于军事领域，产生了运筹学这门新的数学分支，从而得到各国政府的重视，战后由于计算机的发展，数学渗入各行各业。生物学、经济学以及其他社会科学，都发生了根本的变化。数学已经不仅是“应用”于各门自然科学和社会科学，数学思想也彻底地改变了各门科学的研究思想和方法。数学已经显示出第一生产力的本性，它不但是支撑其他科学的“幕后英雄”，也是直接活跃在技术革命第一线、屡建奇功的“方面军”。

在我们的教育制度中，从小学到高中，数学是学时最多的课程之一。由于数学的抽象性，它成为公认“难学”的“枯燥”的课程。再加上“应试教育”泛滥，编出种种难题、怪题和偏题，害怕学数学的人就更多了。数学本身就存在一定的“神秘性”，古代的周易、占卦、算命等，无不与数学有一定联系。数学还曾经被野心家利用，作为他们改朝换代的工具。这一切，使得数学成为一个“幽灵”，它无所不在，神通广大，而又使许多平民百姓所害怕。

其实，学习数学是一件极其有趣的事。数学不仅有广泛的应用，而且含有深邃的哲理和内在的美。当你遇到一个难题，你会废寝忘食，当你苦思冥想克服重重困难解决一个难题时，你会感到

“其乐无穷”。

数学这种多面性，使许多人像“瞎子摸象”，只看到数学抽象、枯燥的一面，而不了解它有用的一面，吸引人的一面。我们的这本书，就是想让读者“触摸到”数学的各个方面，对数学有较全面的了解。我们希望通过一个个小故事、小题目，使读者了解到数学是亲切的、有用的，具有内在美的，包含深刻的哲理的，从而对数学从害怕到亲近，从敬而远之到热爱它，能够运用它。

具有中学数学知识的读者应该能够读懂书中的绝大多数内容。即使是小学生，也可以从中找到许多感兴趣的内容。“兴趣”是唯一的要求，每位读者都可以只读感到有兴趣的内容，即使完全不懂其中的数学，也没有关系。特别其中一些较为复杂的计算或艰涩的推理，完全可以跳过去。只要你对数学开始感兴趣，你的收获就很大了。如果你开始动脑筋，那就更好了。大学生或其他文化程度更高的读者，也可以把这本书当作休闲的读物，从中找到一些乐趣。

对管理者，如果他们能从书中了解到数学可以对他们的工作有所帮助，从而开始听取数学工作者的建议，那么我们的目的就达到了。

姜伯驹院士曾经说过：在这数学技术的时代，无论哪个行业的激烈竞争，数学都已成为强者的翅膀。我们希望这本书能使更多的人爱数学、学数学、应用数学，使我们的民族装上数学的翅膀腾飞吧！

编者

2012 年于华南理工大学



目 录

第一部分 数学的幽灵	1
1.1 商品的条形码	1
1.2 商品的包装	3
1.3 商品的调价	4
1.4 A4 纸的长宽比	5
1.5 动物的身长与体重	6
1.6 台球里也有数学	8
1.7 珠江的宽度	9
1.8 怎样测量建筑物的高度	10
1.9 在月球上能看到长城吗	13
1.10 扑克魔术中的数学 (1)	15
1.11 扑克魔术中的数学 (2)	17
1.12 音乐与数学	18
1.13 变速自行车的“骗速”问题	20
1.14 电梯的运行方案	21
1.15 商人们怎样安全过河	23
1.16 时钟的指针	26
1.17 一张正方形纸能包多大体积	28
1.18 称地图的面积	31
1.19 洗碗的数学	31

1.20	邮购公司	32
1.21	电工学徒	32
1.22	骑车者和步行者	33
1.23	国旗升起的时刻	33
1.24	宝石的切割	36
1.25	频道的分配	37
1.26	数学谜语	39
第二部分 更高, 更快, 更强——优化模型		40
2.1	食堂买大米的策略	40
2.2	该派几个消防队员	43
2.3	该迈多大步	45
2.4	蜂房的精妙结构	46
2.5	等周问题	49
2.6	珍稀动物饲养场	53
2.7	校址该选在哪里	56
2.8	费尔马点及其应用	57
2.9	人员的调配	61
2.10	谁的最佳视角更大	64
2.11	优选法	65
2.12	数学大师——华罗庚教授	67
2.13	求救的渔船	68
2.14	侦察员的摩托艇	69
2.15	居民点的规划	70
第三部分 神奇的网络——图论模型		73
3.1	一笔画, 哥尼斯堡七桥问题	73



3.2	最小生成树	78
3.3	四色问题	79
3.4	指派问题	83
3.5	该建几个消防站	87
3.6	统筹方法	88
3.7	特征值与巴基球的稳定性	93
3.8	数学家欧拉	94
第四部分 幸运之神何在——随机模型		96
4.1	什么是概率	96
4.2	条件概率和独立性	100
4.3	美国的总统选举	106
4.4	彩票奖金的数学期望	106
4.5	快餐店的奖品	110
4.6	报警器	111
4.7	“公平”的赌场	113
4.8	最佳采购策略	113
4.9	贝特朗 (Bertrand) 悖论	115
第五部分 运筹帷幄之中, 决胜千里之外——决策模型		118
5.1	消费者的选择	119
5.2	考试的策略	120
5.3	生产计划	123
5.4	工作顺序安排问题	124
5.5	机器负荷问题	126
5.6	城市街道交通问题	127
5.7	如何决定生产量	128

5.8	卖报老人的决策	130
5.9	是否投标	130
5.10	抽奖游戏的最佳策略	132
5.11	建服装厂的方案	134
5.12	飞机搜索目标	135
5.13	搜索率	137
5.14	在商船上装高射炮	137
5.15	对付自杀飞机的策略	138
5.16	深水炸弹	139
第六部分 合作与竞争——对策模型		141
6.1	田忌赛马	142
6.2	中国杰出的军事家——孙臆	142
6.3	囚徒的困境	143
6.4	智猪博弈问题	145
6.5	三位妇女买肉的故事	146
6.6	效益的合理分配	147
6.7	欧几里得	150
6.8	名画的分配	150
6.9	投票势力	151
6.10	无偏向对策	153
6.11	竞赛规则与法制	156
6.12	博弈论大师——约翰·纳什	159
6.13	数学奇才、计算机之父——约翰·冯·诺依曼	160
第七部分 简单，但是重要——线性模型		163
7.1	向量与矩阵	164



7.2	差分方程	166
7.3	出租车的转移矩阵	167
7.4	山猫和美洲兔的故事	169
7.5	牛和羊，是朋友还是敌人	171
7.6	动画	173
7.7	人际关系	177
7.8	密码	179
7.9	面貌空间	181
7.10	计算机层析 X 射线照相术	182
7.11	矩阵的起源	183
7.12	解析几何之父——笛卡儿	184
第八部分 科学的皇后		186
8.1	“无穷大”的故事	188
8.2	铺地砖的艺术	195
8.3	最大乘积	197
8.4	计算机如何识别文字	198
8.5	公平的席位分配	200
8.6	黄金分割	204
8.7	斐波那契数列	207
8.8	核武器竞赛	213
8.9	会爬屋顶的金属瓦	217
8.10	四等份一块饼	218
8.11	分蛋糕	220
8.12	圆弧上的点集	222
8.13	公共信息	223

8.14	篮球赛的安排·····	225
8.15	幻方趣谈·····	229
8.16	幻方的构造方法·····	231
8.17	4阶幻方有多少·····	235
8.18	数学悖论与三次数学危机·····	238
8.19	对数的发明·····	244
8.20	分形几何·····	246
8.21	数学界的最高奖·····	249
8.22	数学谜语谜底·····	250
	参考书目·····	251



第一部分 数学的幽灵

一个幽灵，数学的幽灵，在地球上游荡。它借助互联网，将最阴暗的角落里发生的最卑鄙的勾当暴露在光天化日之下；它在股市上呼风唤雨，一会儿创造出天文数字的财富，一会儿又使这些财富神秘地消失。人人对它又敬畏又恐惧，祈求它带来财富和好运，又害怕它会带来可怕的灾难。政治家利用它登上权力的宝座；企业家利用它堆起金山银山；将军们利用它致敌死命；赌徒、股民、彩民都想利用它圆其亿万富翁的美梦。它能把火箭送上太空，揭开生命的秘密……这个幽灵到底有什么神通，既能给人类带来和平与繁荣，也能给人类带来战争与灾难。其实，它就在我们每个人身边，可以说每个人都非常熟悉。正确利用它，它就成为你的好朋友（当然，能圆发财梦的是极少数人），否则它可能给你带来灭顶之灾。下面，我们来揭示它的面纱，看看它的真面目，和它做个好朋友吧。

1.1 商品的条形码

在超市里，商品的包装上，一般都印有一个小长方形，上面有粗细不等的竖条形，下面有与其对应着的阿拉伯数字，这就是商品条形码（如图 1.1）。

商品条形码的编码遵循唯一性原则，以保证商品条形码在全世界范围内不重复，即一个商品项目只能有一个代码，或者说一

个代码只能标识一种商品项目。不同规格、不同包装、不同品种、不同价格、不同颜色的商品只能使用不同的商品代码。通俗地说条形码就是商品的身份证。商品有了条形码，营业员就可利用扫描仪读取该商品的有关数据，帮助营业员快速结账。

条形码中那些竖条的含义与下面的数字是相同的，只是为了方便扫描仪阅读。每个条形码的数码是由 13 位数字组成。从左到右看，前 3 位称为前缀码，代表生产国家，前缀码是 690 ~ 694 的商品表示是中国生产的，接下来的 4 位数是制造商代码，再接下来的 5 位是商品代码，最后一位数字是校验码。



图 1.1



图 1.2

在 4 位制造商代码中，每个数字都可取 0 ~ 9 这 10 个数字中的任一个，故可以供一万个不同的制造商使用。同理，5 位商品代码可以表示同一个制造商的十万种不同商品。

条形码中的校验码又是如何确定的呢？它是根据前 12 位数确定的。我们从左到右看，把前 12 位数的奇数位上的各数之和记为 U ，偶数位数的各数之和记为 V ，校验码记为 X ，则要求 $U + 3 \times V + X$ 为 10 的倍数。换言之，若 $U + 3 \times V$ 的个位数是 0，则 $X = 0$ ，否则， X 等于用 10 减去 $U + 3 \times V$ 的个位数。例如，计算图 1.1 的条形码中的校验码，



$$U = 6 + 0 + 8 + 6 + 6 + 7 = 33, V = 9 + 1 + 2 + 8 + 8 + 4 = 32,$$

$$U + 3 \times V = 33 + 3 \times 32 = 129,$$

故应取 $X = 10 - 9 = 1$, 便算出 $U + 3 \times V + X = 130$, 就是 10 的倍数。校验码就是 1。

校验码是一个安全装置。获得输入时, 机器会自动根据校验码进行验算, 当条形码受损或营业员输入数字有误时, 验算不正确, 机器就会发出报警声, 大大减少出错的机会。

对于图书类商品, 前缀码规定为“978”。条形码上方还有 ISBN (国际标准书号, International Standard Book Number)。2007 年以后出版的书, ISBN 与条形码是一致的 (如图 1.2), 也是 13 位 (以前的 ISBN 只有 10 位)。

第 4 位数字“7”代表中国出版物, 第 5~8 位数字是出版社代号, 第 9~12 位数字是出版社给的出版书的序号。

1.2 商品的包装

通常大包装的商品与小包装的商品比较, 前者的单位重量价格较便宜。例如, 某牌号的洗衣粉小包装每包 1 kg 卖 5 元, 大包装每包 2 kg 价格必定小于 10 元。这主要是受商品的包装材料成本影响的。

现设商品的包装材料成本 C 与其表面积 S 成正比, 商品的包装呈圆柱形, 底面直径 D 与高 h 的关系为 $h = 2D$, 下面作一些分析。

商品的体积 $V = \frac{\pi}{4} D^2 h = \frac{\pi}{2} D^3$, 因重量与体积成正比, 设比

例系数为 k , 则商品的重量 $W = \frac{k\pi}{2} D^3$, 从而

$$D = \left(\frac{2W}{k\pi} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (1)$$

而包装的表面积为

$$S = 2\pi \frac{D^2}{4} + \pi Dh = \frac{5}{2}\pi D^2, \quad (2)$$

把 (1) 式代入 (2) 式得

$$S = \frac{5}{2}\pi D^2 = \frac{5}{2}\pi \left(\frac{2W}{k\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = pW^{\frac{2}{3}}, \quad (3)$$

其中 $p = \frac{5}{2}\pi \left(\frac{2}{k\pi} \right)^{\frac{2}{3}}$ 为常数, (3) 式反映了 S 与 W 的关系。

因 C 与 S 成正比, 故设 $C = qS$, 其中 q 为比例系数, 则单位重量的包装材料成本为

$$\frac{C}{W} = q \frac{S}{W} = \frac{pq}{W^{\frac{1}{3}}}, \quad (4)$$

(4) 式说明了单位重量的包装成本随重量的上升而下降, 这就可以解释为什么大包装的商品单位重量价格更便宜。

实际上, 为了吸引顾客多购买商品, 商家会把大包装的商品的售价降得更低。

1.3 商品的调价

若把某商品先涨价 10% 后再降价 10%, 所得的价格与原来的价格相比有没有差别? 我们可能会不假思索地脱口而出: 那还用问吗? 肯定不变。

现在让我们来分析一下, 是否果真如此。比如, 设这种商品原价为 100 元, 则涨价 10% 后价格为 $100 \times (1 + 10\%) = 110$ 元, 再降价 10% 就是 $110 \times (1 - 10\%) = 99$ 元, 可见比原先的价格



100 元便宜了。所以我们不能想当然，而应认真思考。

再研究下例：

某商品拟作两次调价，设 $0 < q \leq p < 100$ ，比较下列两种方案：

(A) 先涨价 $p\%$ ，再降价 $q\%$ ；

(B) 先涨价 $q\%$ ，再降价 $p\%$ 。

设该商品原价为 1，采用方案 (A) 和方案 (B) 调价后的商品价格分别为 a 和 b ，则

$$a = (1 + p\%) (1 - q\%) = 1 + \frac{p - q}{100} - \frac{pq}{100^2},$$

$$b = (1 + q\%) (1 - p\%) = 1 + \frac{q - p}{100} - \frac{pq}{100^2},$$

由于 $0 < q \leq p < 100$ ，所以 $a \geq b$ ， $b < 1$ 。从而采用方案 (B) 调价后的商品价格总是小于原价。那么，采用方案 (A) 调价后是否就一定不小于原价呢？请读者自行研究。

1.4 A4 纸的长宽比

大家都知道，我们常用的 A4 纸的长为 297 mm，宽为 210 mm。这数据好像有点复杂，它既不是简单的整数比（如 $2:1$ ， $3:2$ ， $4:3$ ），也不是黄金比例。为什么是这样呢？原因是为了节省纸张。纸的裁剪总是对开的，一点也不浪费。

A 系列纸的原始纸张 A0 纸的面积规定是 $1 \text{ (m}^2\text{)}$ ，A1 纸由 A0 纸对开而成，同理，A2 由 A1、A3 由 A2、A4 由 A3 对开而成（如图 1.3），而且这些大小不同的纸张总是保持相似形，即长宽比不变。

若设 A0 纸的长为 a ，宽为 b ，则 A1 纸的长为 b ，宽为 $\frac{a}{2}$ ，

从而有关系式: $a : b = b : \frac{a}{2}$, 即有 $a^2 = 2b^2$, 故得

$$a : b = \sqrt{2}. \quad (1)$$

因此, A 系列纸的长宽比都是 $\sqrt{2}$ 。又因为 A0 纸的面积

$$ab = 1 \text{ (m}^2\text{)}, \quad (2)$$

由 (1) 式得

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad (3)$$

把 (3) 式代入 (2) 式得 $a^2 = \sqrt{2}$, 从而

$$a = \sqrt{\sqrt{2}} = 1.189 \text{ m} = 1\,189 \text{ mm}, \quad b = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 0.841 \text{ m} = 841 \text{ mm}$$

A4 纸是把 A0 纸对开 4 次而得 (如图 1.3), 故 A4 纸的长为 $\frac{a}{4} = \frac{1\,189}{4} = 297 \text{ mm}$, 宽为 $\frac{b}{4} = \frac{841}{4} = 210 \text{ mm}$ (忽略小数)。

类似地, B 系列纸的原始纸张 B0 的面积规定为 $1.5 \text{ (m}^2\text{)}$, 长宽比仍是 $\sqrt{2}$, B5 纸是把 B0 纸对开 5 次而得, 模仿以上方法可得长为 257 mm、宽为 182 mm。

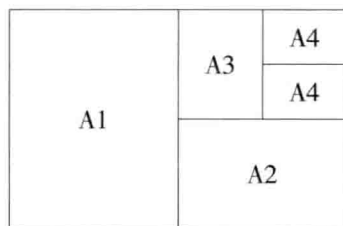


图 1.3

1.5 动物的身长与体重

四足动物的躯干与其体重之间有什么关系? 此问题有一定的