代数体函数的值分布

孙道椿　高宗升　著

科学出版社

代数体函数的值分布

孙道椿　高宗升　著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要介绍代数体函数的值分布，系统地阐述这一领域的基本理论和半个多世纪以来国内外的发展状况和最新研究成果. 其内容包括代数体函数的 Riemann 曲面、Nevanlinna 理论、Ahlfors 覆盖曲面几何理论与特征函数和基本不等式、型函数、充满圆及奇异方向、唯一性定理、正规族等. 为了读者阅读方便，本书最后还有一个附录，对书中涉及较多的覆盖曲面理论和无穷乘积进行介绍.

本书是系统介绍代数体函数值分布的一部专著，主要读者为数学专业高年级本科生、研究生、教师以及相关专业的科技工作者.

图书在版编目(CIP)数据

代数体函数的值分布/孙道椿, 高宗升著. —北京: 科学出版社, 2014.4

ISBN 978-7-03-040384-1

I. ①代… II. ①孙… ②高… III. ①代数体函数-值分布论 IV. ①O174.53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 069768 号

责任编辑: 李 欣 / 责任校对: 赵桂芬
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 5 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2014 年 5 月第一次印刷 印张: 18 3/4
字数: 373 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

在 20 世纪 20 年代，由著名芬兰数学家 R. Nevanlinna 创立的亚纯函数值分布理论，是 20 世纪最重大的数学成就之一，是现代亚纯函数论的基础. Nevanlinna 值分布理论经过半个多世纪的发展以及不断的深化和完善，取得了巨大的进展. 同时，它向复分析以及数学的其他领域逐渐渗透，对复解析动力系统、微分方程解析理论、微分几何、解析数论等学科领域都产生了重要的影响. 经过以杨乐、张广厚为代表的几代中国数学家的努力，我国在该方向的研究处于国际领先水平.

由著名复分析专家 L. V. Ahlfors 在 20 世纪 30 年代建立的覆盖曲面理论，是 20 世纪的重大数学成果之一，它不仅是现代函数论的重要理论基础，也是应用几何方法研究复分析的有力工具. 应用 Ahlfors 覆盖曲面理论不仅可以推出 Nevanlinna 理论的大部分结果，而且它还适用于更加广泛的函数类.

代数体函数是一类多值解析函数，亚纯函数是它的特殊情形. 在 H. Poincaré 最初将其引入时，G. Darboux 就认为它是一种重要函数. 后来 P. Poincaré 在研究常微分方程中遇到了这一函数. 在 1930 年前后，随着 Nevanlinna 理论的建立，G. Valiron, E. Ullrich 和 H. Selberg 等分别用不同的方法对代数体函数建立了相当于亚纯函数的 Nevanlinna 基本定理，开创了代数体函数值分布理论.

由于代数体函数的多值和分支点的复杂性，研究起来比较困难，往往要用到 Riemann 曲面理论、Ahlfors 几何理论等近代数学工具. 以至于像代数体函数有限级 Borel 方向的存在性、充满圆序列的存在性、正规族理论这些亚纯函数中十分成熟的结论，直到 20 世纪 80 年代至 90 年代才得以解决. 关于代数体函数的运算问题，更是近年来才有了系统的结果. 关于代数体函数和它的导数的特征函数之间的界囿关系，不久前才得到完全解决. 在著名数学家 G. Rémoundos, G. Valiron, E. Ullrich 和 H. Selberg 以及我国的熊庆来、杨乐、何育赞、吕以辇、顾永兴、仪洪勋等几代人研究工作的基础上，代数体函数值分布论逐渐成为了复分析的一个重要研究方向.

本书从代数体函数的定义、函数元素开拓、Riemann 曲面最基本的概念出发，向读者介绍半个多世纪以来，代数体函数值分布的基本理论和国内外的发展状况以及最新研究成果. 全书共分八章和一个附录. 第 1 章介绍关于代数体函数的概念、解析开拓、Riemann 曲面等本书中用到的一些基础知识；第 2 章主要介绍代数体函数 Nevanlinna 特征函数、Nevanlinna 第一基本定理和著名的代数体函数分支点定理；第 3 章主要介绍代数体函数的 Nevanlinna 第二基本定理、Valiron 的对数导

数定理、作者最近得到的关于应用代数体函数导数的特征函数界囿它的特征函数的庄圻泰型不等式，以及 Ru Min 和作者把代数体函数第二基本定理中常数分别替换成小亚纯函数和小代数体函数的最新结果；第 4 章介绍 Ahlfors 的几何方法，其中包括作者改进的 Ahlfors 基本定理、代数体函数的 Ahlfors 型第一、二基本定理，以及 Ahlfors-Shimizu 特征函数与 Nevanlinna 特征函数的比较等内容；第 5 章介绍型函数及其分类；第 6 章介绍代数体函数的充满圆及奇异方向，其中包括作者证明的代数体函数充满圆的存在性定理、吕以辇和顾永兴证明的有限级代数体函数 Borel 方向的存在性定理，以及作者证明的涉及重值的代数体函数充满圆和 Borel 方向的存在性定理等结果；第 7 章研究代数体函数的唯一性定理，首先介绍作者最近定义的代数体函数的循环运算，接着应用这些运算法则把杨乐、C.C.Yang、仪洪勋得到的关于亚纯函数的唯一性定理分别推广到代数体函数中；第 8 章介绍代数体函数的正规族理论，主要介绍本书作者和杨乐得到的关于代数体函数的一些正规定则；本书的附录主要介绍 Ahlfors 覆盖曲面理论、无穷乘积等内容.

目前，国内外尚未见到专门撰写代数体函数值分布的学术专著出版. 作者对半个多世纪以来的研究成果进行系统的总结和提炼，撰写出国内外第一本关于代数体函数值分布的学术专著. 希望本书的出版有助于推进该方向的进一步研究和应用.

本书的一些内容，作者曾在北京航空航天大学、华南师范大学试讲. 王松敏、玄祖兴、刘慧芳、孔荫莹、张少华、吴昭君、霍颖莹、柴富杰、谭洋、甘会林、张晓梅、郭晓晶、古振东和岳超等为本书提出了很好的意见；孙艳芹绘制了书中所有的插图. 在此一并致谢.

本书在编写过程中，曾得到山东大学仪洪勋教授和中国科学院武汉物理数学研究所欧阳才衡研究员的关心和支持，作者在此表示感谢.

由于作者水平所限，书中难免有这样或那样的不足，希望读者指正，以便再版时改正.

作 者

2013 年 8 月 1 日

目　录

第 1 章　代数体函数

本章主要介绍涉及代数体函数的一些基本知识. 主要内容有结式及重因子、Riemann 曲面、解析开拓、完全解析函数及解析图像、分支点、代数体函数的运算等.

1.1　结式及公因子

1.1.1　多项式的结式

记区域 $D \subset C$ 上的所有解析函数之集 (包含全体复数) 为 $A = A(D)$. $A(D)$ 是以 1 为单位元的可交换环.

记区域 D 上的全体亚纯函数之集 (包含全体复数) 为 $M = M(D)$. $M(D)$ 是一个可交换的体, 是 D 上的亚纯函数域.

环 $A(D)$ 上的全体多项式

$$P(W) = \sum_{t=0}^{k} A_t w^t = A_0 w^0 + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots + A_k w^k$$

的集合为 $A(D)$ 上 W 的多项式环, 记为 $A[W]$. 它是一个可换环, 其中 $A_t = A_t(z) \in A(D)(t = 0, 1, 2, \cdots, k)$ 称为系数; 若 $A_k \neq 0$, 称 k 为 $P(W)$ 的次数, 记为 $d = d(P)$. 当 $d(P) = 0$ 时, 则零次多项式 $P(W) \in A(D)$ 是一个 D 上的解析函数或复数.

类似地, 记体 $M(D)$ 上的多项式环为 $M[W]$. 它也是一个可换环.

体 $M(D)$ 上的两个不全是零次的多项式:

$$P(W) = A_k(z)W^k + A_{k-1}(z)W^{k-1} + \cdots + A_0(z),$$

$$Q(W) = B_j(z)W^j + B_{j-1}(z)W^{j-1} + \cdots + B_0(z)$$

的结式是一个 $k + j$ 阶行列式

$$R(P,Q)=\begin{vmatrix} A_k & A_{k-1} & \cdots & A_2 & A_1 & A_0 & & & \\ & A_k & A_{k-1} & \cdots & A_2 & A_1 & A_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & & A_k & A_{k-1} & \cdots & A_2 & A_1 & A_0 \\ B_j & B_{j-1} & \cdots & B_1 & B_0 & & & & \\ & B_j & B_{j-1} & \cdots & B_1 & B_0 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & B_j & B_{j-1} & \cdots & B_1 & B_0 \end{vmatrix}. \tag{1.1.1}$$

式 (1.1.1) 上半部是由 j 行 $P(W)$ 的亚纯系数组成, 下半部是由 k 行 $Q(W)$ 的亚纯系数组成. 因此结式 $R(P,Q)=R(P,Q)(z)$ 是 D 上的一个亚纯函数. 它或者恒等于零, 或者仅有弧立的零点.

特别地, 若 $P(W)\equiv A_0(z)$, 则结式 (1.1.1) 是 j 阶行列式

$$R(P,Q)(z)=\begin{vmatrix} A_0 & & & \\ & A_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_0 \end{vmatrix}.$$

1.1.2　孤立点定理

引理 1.1.1　两个不全是零次的多项式的结式 (1.1.1) 恒等于零的充要条件是 $P(W),Q(W)$ 有非零次的公因子, 即存在非零次多项式 $H(W)\in M[W](d(H)>0)$, 能整除 $P(W)$ 及 $Q(W)$.

证　(i) 当 $P(W),Q(W)$ 的系数全为零, 则结式 $R(P,Q)\equiv 0$. 这时任一非零多项式均是 $P(W),Q(W)$ 的公因子.

(ii) 当 $P(W),Q(W)$ 的系数不全为零. 若存在公因子 $H(z)\in M[W]$ $(d(H)>0)$. 记

$$a(W):=\frac{P(W)}{H(W)}=a_{k-1}W^{k-1}+a_{k-2}(z)W^{k-2}+\cdots+a_0,$$

$$b(W):=\frac{Q(W)}{H(W)}=b_{j-1}W^{j-1}+b_{j-2}(z)W^{j-2}+\cdots+b_0,$$

则 D 上的亚纯函数 $a_{k-1},a_{k-2},\cdots,a_1,a_0,b_{j-1},b_{j-2},\cdots,b_1,b_0$ 不全恒等于零. 因此除去 D 内一些孤立点外, 对其余的任意一点 z_0(下面简称为"对 D 内几乎所有的点"), $a_{k-1}(z_0)$, $a_{k-2}(z_0),\cdots,a_1(z_0)$,$a_0(z_0)$, $b_{j-1}(z_0)$, $b_{j-2}(z_0),\cdots,b_1(z_0)$, $b_0(z_0)$ 是不全为零的复数. 注意 $a(W),b(W)\in M[W]$ 及 $d(a)<d(P)$, $d(b)<d(Q)$, 且有

$$P(W)b(W)=Q(W)a(W). \tag{1.1.2}$$

反之, 若式 (1.1.2) 成立. 我们先进行质因子分解 $P(W)=\prod_j P_j(W)$, 则每个质因子 $P_j(W)$ 均可整除 $Q(W)a(w)$, 故必可整除 $Q(W)$, $a(w)$ 之一. 这样一个个地除下去. 由于 $d(a)<d(P)$, 必定至少有一个质因子可整除 $Q(W)$. 这就是 $P(W)$, $Q(W)$ 的公因子. 这说明 $P(W),Q(W)$ 有非零次的公因子, 等价于式 (1.1.2) 成立.

(iii) 比较式 (1.1.2) 的系数,

$$
\begin{array}{llllllll}
A_kb_{j-1} & & & = B_ja_{k-1}, & & & \\
A_{k-1}b_{j-1} & +A_kb_{j-2} & & = B_{j-1}a_{k-1} & +B_ja_{k-2}, & & \\
A_{k-2}b_{j-1} & +A_{k-1}b_{j-2} & +A_kb_{j-3} & = B_{j-2}a_{k-1} & +B_{j-1}a_{k-2} & +B_ja_{k-3}, & \\
 & & & \cdots\cdots & & & \\
A_1b_{j-1} & +A_2b_{j-2}+\cdots & +A_jb_0 & = & \cdots & +B_{j-1}a_1 & +B_ja_0,\\
A_0b_{j-1} & +A_1b_{j-2}+\cdots & +A_{j-1}b_0 & = & \cdots & +B_{j-2}a_1 & +B_{j-1}a_0,\\
 & & & \cdots\cdots & & & \\
A_0b_2 & +A_1b_1 & +A_2b_0 & = & B_0a_2 & +B_1a_1 & +B_2a_0,\\
 & A_0b_1 & +A_1b_0 & = & & B_0a_1 & +B_1a_0,\\
 & & A_0b_0 & = & & & B_0a_0,
\end{array}
$$

这说明式 (1.1.2) 成立的充分必要条件是 $k+j$ 元线性方程组

$$
\left\{
\begin{array}{llllllll}
A_kx_1 & & & -B_jx_{j+1} & & & = 0,\\
A_{k-1}x_1 & +A_kx_2 & & -B_{j-1}x_{j+1} & -B_jx_{j+2} & & = 0,\\
A_{k-2}x_1 & +A_{k-1}x_2 & +A_kx_3 & -B_{j-2}x_{j+1} & -B_{j-1}x_{j+2} & -B_jx_{j+3} & = 0,\\
 & & & \cdots\cdots & & & \\
A_1x_1 & +A_2x_2+ & \cdots & +A_jx_j & \cdots-B_{j-1}x_{j+k-1} & -B_jx_{j+k} & = 0,\\
A_0x_1 & +A_1x_2+ & \cdots & +A_{j-1}x_j & \cdots-B_{j-2}x_{j+k-1} & -B_{j-1}x_{j+k} & = 0,\\
 & & & \cdots\cdots & & & \\
A_0x_{j-2} & +A_1x_{j-1}+ & +A_2x_j & -B_0x_{j+k-2} & -B_1x_{j+k-1} & -B_2x_{j+k} & = 0,\\
 & A_0x_{j-1}+ & +A_1x_j & & -B_0x_{j+k-1} & -B_1x_{j+k} & = 0,\\
 & & A_0x_j & & & -B_0x_{j+k} & = 0,
\end{array}
\right.
$$

在可交换体 $M(D)$ 上有非零解.

(iv) 对 (iii) 中 $k+j$ 元线性方程组, 在可换体 $M(D)$ 上有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$
\begin{vmatrix}
A_k & & & & & & -B_j & & & & & \\
A_{k-1} & A_k & & & & & -B_{j-1} & -B_j & & & & \\
A_{k-2} & A_{k-1} & A_k & & & & -B_{j-2} & -B_{j-1} & -B_j & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
A_1 & A_2 & \cdots & A_j & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -B_{j-1} & -B_j & & \\
A_0 & A_1 & \cdots & A_{j-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -B_{j-2} & -B_{j-1} & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & A_0 & A_1 & A_2 & & & & -B_0 & -B_1 & -B_2 \\
 & & & & A_0 & A_1 & & & & & -B_0 & -B_1 \\
 & & & & & A_0 & & & & & & -B_0
\end{vmatrix}
$$

为零元, 即行列式表示的亚纯函数恒为零. 去掉行列式中的负号, 并将它绕主轴旋转. 就是结式 (1.1.1). 证毕.

设 $A_k(z),\cdots,A_0(z)\in A(D)$ 是 D 上的一组解析函数. 复函数

$$\Psi(z,W)=A_k(z)W^k+A_{k-1}(z)W^{k-1}+\cdots+A_0(z)\in A[W]$$

与其偏导数

$$\Psi_W(z,W)=kA_k(z)W^{k-1}+(k-1)A_{k-1}(z)W^{k-2}+\cdots+A_1(z)$$

的结式为

$$
R(\Psi,\Psi_W)=\begin{vmatrix}
A_k & A_{k-1} & \cdots & & A_1 & A_0 & & & & \\
 & A_k & A_{k-1} & & \cdots & A_1 & A_0 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & \\
 & & & & A_k & A_{k-1} & \cdots & & A_1 & A_0 \\
kA_k & (k-1)A_{k-1} & \cdots & & A_1 & & & & & \\
 & kA_k & (k-1)A_{k-1} & & \cdots & A_1 & & & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & & \cdots & \\
 & & & & \cdots & & \cdots & & & \cdots \\
 & & & & & kA_k & (k-1)A_{k-1} & & \cdots & A_1
\end{vmatrix}.
$$

结式 $R(\Psi,\Psi_W)=R(\Psi,\Psi_W)(z)$ 是 D 上 z 的解析函数.

引理 1.1.2 若 $A_k(z)\not\equiv 0$, 结式 $R(\Psi,\Psi_W)$ 恒等于零的充要条件是 $\Psi(z,W)$ 有非亚纯函数的重因子.

证 先证 $\Psi(z,W)$ 与 $\Psi_W(z,W)$ 有非亚纯函数的公因子的充要条件是 $\Psi(z,W)$ 有非亚纯函数的重因子.

设 $P(z,W)$ 是 $\Psi(z,W)$ 的一个 $t\geqslant 1$ 重非亚纯函数因子, 即

$$\Psi(z,W)=P^t(z,W)Q(z,W),\quad P(z,W)\in M[W],\quad d(P)>0,$$

其中 $P(z,W)$ 是质因子 (即不可约因子), 且不能整除 $Q(z,W)$. 上式两边对 W 求偏导, 得

$$\Psi_W(z,W)=P^{t-1}(z,W)[tP_W(z,W)Q(z,W)+P(z,W)Q_W(z,W)].$$

注意 $d(P_W)\leqslant d(P)$. 故中括号内的函数不能被 $P(z,W)$ 整除. 因此 $P(z,W)$ 是 $\Psi_W(z,W)$ 的 $t-1$ 重因子. 要使 $\Psi(z,W)$ 与 $\Psi_W(z,W)$ 有非亚纯函数的公因子当且仅当 $t>1$.

结合引理 1.1.1, 结式 $R(\Psi,\Psi_W)$ 恒等于零的充要条件是 $\Psi(z,W)$ 与 $\Psi_W(z,W)$ 有非亚纯函数的公因子. 证毕.

由此可推出下面的定理.

定理 1.1.1(孤立点定理) 设 $A_k(z)\not\equiv 0$. 若 $\Psi(z,W)$ 没有非亚纯函数的重因子, 则结式 $R(\Psi,\Psi_W)(z)$ 的每个零点都是孤立点, 因此 $R(\Psi,\Psi_W)(z)\not\equiv 0$.

我们将“$\Psi(z,W)$ 没有非亚纯函数的重因子”称为“孤立性条件”.

1.2 代数体函数

在给出代数体函数的定义前, 先介绍一些概念.

设多项式

$$\Psi(z,W)=A_k(z)W^k+A_{k-1}(z)W^{k-1}+\cdots+A_0(z)\in M[W]$$

具有如下性质:

(i) $A_k(z),A_{k-1}(z),\cdots,A_0(z)\in A(D)$ 是 D 上的一组没有公共零点的解析函数;

(ii) $A_k(z)\not\equiv 0$;

(iii) 多项式 $\Psi(z,W)$ 没有非亚纯函数的重因子, 即满足孤立性条件.

我们称 $\Psi(z,W)$ 满足正则三条件.

由孤立点定理, 这时的结式 $R(\Psi,\Psi_W)(z)$ 的零点集 $M_W=M_W(D):=\{z\in D;R(\Psi,\Psi_W)(z)=0\}$ 是由 D 上的一些孤立点组成. 称 $M_W(D)$ 为重点集, $P_W(D):=\{z;A_k(z)=0\}$ 为极点集, $S_W(D):=P_W(D)\bigcup M_W(D)$ 为临界点集; 称 $I_W(D):=D-P_W(D)$ 为有限值集, $T_W(D):=D-S_W(D)$ 为正则集.

1.2.1　代数体函数的定义

设二元复方程

$$\Psi(z,W)=A_k(z)W^k+A_{k-1}(z)W^{k-1}+\cdots+A_0(z)=0 \tag{1.2.1}$$

满足正则三条件. 由代数基本定理, 方程 (1.2.1) 在 $I_W(D)$ 上定义了一个 k 值代数体函数 $W(z)$, 或称为无重因子代数体函数.

若 $\Psi(z,W)$ 在 D 上是不可约的, 则称 $W(z)$ 是 D 上的不可约 k 值代数体函数;

若 $A_k(z)$ 是 D 上无零点的解析函数, 则称 $W(z)$ 是 D 上的 k 值整代数体函数;

若 $A_k(z),\cdots,A_0(z)$ 都是 D 上的多项式, 则称 $W(z)$ 是 D 上的 k 值代数函数;

若 $A_k(z)\equiv c_1$, $A_{k-1}(z)\equiv c_2,\cdots,A_0(z)\equiv c_0$ 是一组复常数, 则称 $W(z)$ 是 D 上的常数值代数体函数.

注 1.2.1　以上定义是定义在区域 D 上的, 是为研究单位圆及局部区域上的代数体函数创造更一般的条件. 若 D 是复平面 C, 则简称 $W(z)$ 是 k 值代数体函数.

注 1.2.2　不可约 k 值代数体函数, 没有非亚纯函数的真因子 (对 W 的次数小于 k, 大于零). 更不会有非亚纯函数的重因子. 因此必满足孤立性条件. 这里定义的代数体函数没有要求是不可约, 是为了有更宽松的环境, 研究起来更方便.

注 1.2.3　复平面 C 上的不可约 k 值代数体函数在区域 $D\subset C$ 上, 可能是可约. 例如, k 值代数体函数 $W^k-z=0$ 在 C 上是不可约的, 在 $D=:\{|z-2|<1\}$ 上是可约的.

1.2.2　正则函数元素

定义 1.2.1　正则函数元素 (简称正则元素) 是一个序对 $(p(z),a)$, 其中 $a\in D$, $p(z)$ 是在 a 点解析的一个函数, 即存在 $r>0$, 使 $p(z)$ 在圆盘 $B(a,r):=\{|z-a|<r\}$ 内可展成泰勒 (Taylor) 级数

$$p(z)=b_0+\sum_{n=v}^{\infty}b_n(z-a)^n,\quad b_v\neq 0,\quad v>0.$$

也可记为 $(p_a(z),B(a,r))$. 称 b_0 是 a 点处的一个值, 记为 $\overline{n}(a,p(z)=b_0)=1$; v 是 b_0 在 a 处的重数, 记为 $n(a,p(z)=b_0)=v$(若复数 $c\neq b_0$, 则记 $\overline{n}(a,p(z)=c)=n(a,p(z)=c)=0$).

称两个正则元素 $(p(z),B(a,r_a))$,$(q(z),B(b,r_b))$ 相等, 即 $a=b$, 且在 $B(a,r_a)\bigcap B(b,r_b)$ 内, 有 $p(z)\equiv q(z)$.

若对任意 $z\in B(a,r)$ 还有 $\Psi(z,p(z))=0$, 则称 $(p(z),a)$ 是代数体函数 $W(z)$(或 $\Psi(z,w)=0$) 的一个正则元素.

定理 1.2.1(正则元素的存在性定理) 设二元复方程 (1.2.1) 满足正则三条件. 若有限复数对 (z_0, w_0) 满足

(1) $\Psi(z_0, w_0) = 0$;

(2) w_0 不是一元方程 $\Psi(z_0, w) = 0$ 的重根, 即对 W 的偏导数, 有

$$\Psi_W(z_0, w_0) = \left.\frac{\partial\psi(z, W)}{\partial W}\right|_{(z_0, w_0)} \neq 0,$$

则存在唯一的正则函数元素 $(w(z), B(z_0, r))$ 属于方程 (1.2.1), 即 $w(z_0) = w_0$, 且对圆盘内任意一点 $z \in B(z_0, r)$, 恒有 $\Psi(z, w(z)) = 0$.

证 (1) 将方程 (1.2.1) 改写成

$$\begin{aligned}\Psi(z, w) &= H_0(z) + H_1(z)(w - w_0) + H_2(z)(w - w_0)^2 + \cdots + H_k(z)(w - w_0)^k \\ &= H_0(z) + (w - w_0)[H_1(z) + H_2(z)(w - w_0) \\ &\quad + H_3(z)(w - w_0)^2 + \cdots + H_k(z)(w - w_0)^{k-1}] \\ &= H_0(z) + (w - w_0)P(z, w),\end{aligned}$$

其中 $H_0(z_0) = \Psi(z_0, w_0) = 0$, $P(z_0, w_0) = H_1(z_0) = \Psi_w(z_0, w_0) = b \neq 0$. 由条件及二元变量函数 $P(z, w)$ 连续性, 有下面的结论.

(i) 取 $R > 0$, $\rho > 0$ 充分小, 使得当 $|z - z_0| \leqslant R$, $|w - w_0| \leqslant \rho$ 时, 恒有 $|P(z, w)| > 2|b|/3$.

(ii) 由单变量函数 $H_0(z)$ 的连续性, 可取 $r \in (0, R)$, 使得当 $|z - z_0| < r(r < R)$(即 $z \in B(z_0, r) \subset B(z_0, R)$) 时, 恒有 $|H_0(z)| < \rho|b|/3$.

于是, 对任意固定的 $x_0 \in B(z_0, r)$, 注意对自变量为 w 的单变量解析函数:

(a) $(w - w_0)P(x_0, w)$ 在 $B(w_0, \rho)$ 内仅有一个零点 w_0,

(b) 在 $|w - w_0| = \rho$ 上, $|(w - w_0)P(x_0, w)| \geqslant 2\rho|b|/3 > |H_0(x_0)|$.

由儒歇 (Rouché) 定理, 单复变函数 $H_0(x_0) + (w - w_0)P(x_0, w)$ 与 $(w - w_0)P(x_0, w)$ 在 $|w - w_0| < \rho$ 内的零点数相同 (仅有对应的唯一零点 $w_0 = w(x_0)$). 这说明任取 $x \in B(z_0, r)$, 存在唯一的单值复函数 $y = w(x) \in \overline{B(w_0, \rho)}$, 使 $\Psi(x, y = w(x)) = 0$.

(2) 下面证 $y = w(z)$ 是解析的. 任取 $x_0 \in B(z_0, r)$, 存在唯一的 $y_0 = w(x_0) \in \overline{B(w_0, \rho)}$, 使 $\Psi(x_0, y_0) = 0$. 将复方程 (1.2.1) 改写成

$$\begin{aligned}&h_0(x) + h_1(x)(y - y_0) + h_2(x)(y - y_0)^2 + \cdots + h_k(x)(y - y_0)^k \\ =&h_0(x) + (y - y_0)p(x, y) = 0.\end{aligned}$$

注意 $\Psi(x_0, y_0) = h_0(x_0) = 0$. 由上面的 (1) 可知, $h_1(x_0) = p(x_0, y_0) \neq 0$. 故当

$x \to x_0$ 时, $y = y_0 - \dfrac{h_0(x)}{p(x,y)} \to y_0$. 于是

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{-(h_0(x)-h_0(x_0))}{(x-x_0)} \cdot \frac{1}{h_1(x)+h_2(x)(y-y_0)+\cdots+h_k(x)(y-y_0)^{k-1}}.$$

令 $x \to x_0$, 有

$$y'|_{x_0} = w'(x_0) = -h_0'(x_0) \cdot \frac{1}{h_1(x_0)} = -\frac{\Psi_x(x_0,y_0)}{\Psi_y(x_0,y_0)}.$$

故 y 是可微的. 证毕.

推论 1.2.1　设方程 (1.2.1) 满足正则三条件. 对任意正则点 $b \in T_W(D)$, 有且仅有不同的 k 个正则函数元素 $(w_t(z), B(b,r))$ $(t=1,2,\cdots,k)$ 属于方程 (1.2.1), 则对任意 t, 任意的 $z \in B(b,r)$, 恒有 $\Psi(z, w_t(z)) = 0$. 因此方程 (1.2.1) 可在 $B(b,r)$ 上写成

$$\Psi(z,W) = A_k(z)(W-w_1(z))(W-w_2(z))\cdots(W-w_k(z)) = 0. \tag{1.2.2}$$

引理 1.2.1(弱有界性)　设 $W(z)$ 是复方程 (1.2.1) 决定的代数体函数, $z_0 \in D$ 是定义域内任意一点 (可能是临界点), 则存在实数 $r>0$, $M>0$ 及正整数 $n \geqslant 0$, 使得 $W(z)$ 在去心邻域 $U := \{0 < |z-z_0| < r\} \subset T_W(D)$ 内的任一函数元素 $(p_a(z), B(a,r_a))(a \in U)$, 一致有

$$|(a-z_0)^n p_a(a)| < M.$$

证　将方程 (1.2.1) 的首系数函数在 z_0 处展成幂级数

$$A_k(z) = a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + a_{n+2}(z-z_0)^{n+2} + \cdots, \quad a_n \neq 0.$$

可以看出存在 $r \in (0,1)$ 及实数 $M_1 > 0$, 使得对任意 $a \in \{0<|z-z_0|<r\}$, 恒有

$$\left|\frac{A_k(a)}{(a-z_0)^n}\right| \geqslant \frac{|a_n|}{2}, \quad |A_k(a)|+|A_{k-1}(a)|+\cdots+|A_0(a)| \leqslant M_1,$$

其中 z_0 是 $\dfrac{A_k(z)}{(z-z_0)^n}$ 的可去极点.

对任意 $a \in \{0<|z-z_0|<r<1\}$, 任意 $z \in B(a,r_a)$, 则

$$\Psi(z,p_a(z)) = A_k(z)p_a^k(z) + A_{k-1}(z)p_a^{k-1}(z) + A_{k-2}(z)p_a^{k-2}(z) + \cdots + A_0(z) \equiv 0.$$

若 $|p_a(a)| \geqslant 1$, 由

$$A_k(a)p_a(a) + A_{k-1}(a) + \frac{A_{k-2}(a)}{p_a(a)} + \cdots + \frac{A_0(a)}{p_a^{k-1}(a)} \equiv 0,$$

得

$$\begin{aligned}|A_k(a)p_a(a)| &= \left|-A_{k-1}(a) - \frac{A_{k-2}(a)}{p_a(a)} - \cdots - \frac{A_0(a)}{p_a^{k-1}(a)}\right| \\ &\leqslant |A_{k-1}(a)| + |A_{k-2}(a)| + \cdots + |A_0(a)| \leqslant M_1,\end{aligned}$$

$$|(a-z_0)^n p_a(a)| \leqslant \frac{M_1|(a-z_0)^n|}{|A_k(a)|} \leqslant \frac{2M_1}{|a_n|}.$$

若 $|p_a(a)| < 1$, 则有

$$|(a-z_0)^n p_a(a)| \leqslant |(a-z_0)^n| < r < 1.$$

令 $M = \max\left\{\dfrac{2M_1}{|a_n|}, 1\right\}$, 即得结论. 证毕.

引理 1.2.2(无穷点的弱有界) 设 $W(z)$ 是复方程 (1.2.1) 决定的代数体函数. 若它的系数 $\{A_j(z)\}$ 是一组无公共零的多项式, 则存在实数 $R > 0$, $M > 0$ 及正整数 $n \geqslant 0$, 使得 $W(z)$ 在去心邻域 $U := \{R < |z| < +\infty\}$ 内的任一函数元素 $(w(z), a)(a \in D)$, 一致有

$$\left|\frac{w(z)}{z^n}\right| \leqslant M.$$

证 由于复方程 (1.2.1) 的系数是多项式, 因此它的首系数 $A_k(z)$ 有有限个零点, 它对应的结式 $R(\Psi, \Psi_W)(z)$ 也仅有有限个零点. 因此, 存在充分大实数 $R_1 > 0$, 使去心邻域 $U := \{R_1 < |z| < +\infty\}$ 内无临界点.

设 $\{A_j(z)\}$ 中的最高次数是 d. 令 $y = \dfrac{1}{z}$. $\left\{B_j(y) := \dfrac{A_j(z)}{z^d}\right\}$ 变成一组 y 的无公共零点的多项式, 则复方程 (1.2.1) 转化成新方程

$$B_k(y)M^k + B_{k-1}(y)M^{k-1} + \cdots + B_0(y) = 0.$$

由引理 1.1.1, 存在 $r < 1/R_1$, $M > 0$ 及整数 $n \geqslant 0$, 使新方程确定的函数元素 $m(y)$, 在去心圆盘 $\{0 < |y| < r\}$ 内没有临界点, 且一致有 $|y^n m(y)| \leqslant M$, 即在 $\left\{R := \dfrac{1}{r} < |z| < \infty\right\}$ 内恒有

$$\left|\frac{w(z)}{z^n}\right| = \left|\frac{m(1/z)}{z^n}\right| \leqslant M.$$

证毕.

定义 1.2.2 称所有满足式 (1.2.2) 的正则元素之集为 $W(z)$ 的正则函数元素族, 记为 $\mathfrak{F}_W^*(D)$, 即

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_W^*(D) :=& \{(w_1(z), B(b,r)), (w_2(z), B(b,r)), \cdots, (w_k(z), B(b,r)); b \in T_W(D)\} \\ =& \{(w(z), B(b,r)); b \in T_W(D), \Psi(z, w(z)) = 0, z \in B(b,r)\}.\end{aligned}$$