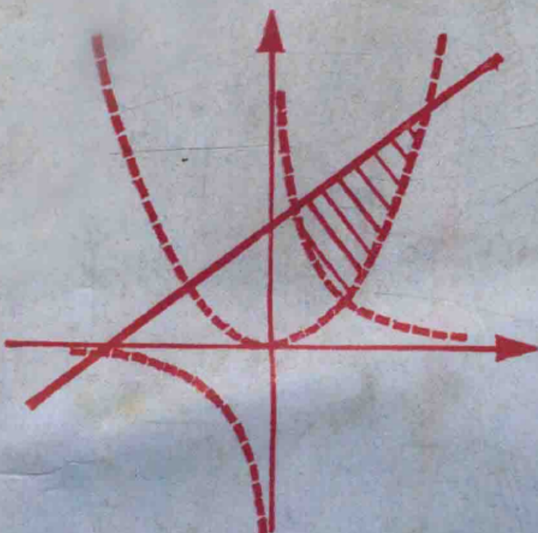


2

1985

数学系大学生论文集

SHUXUEXIDAXUESHENGLUNWENJI

南京大学数学系编印

编者的话

经过一翻周折，《数学系大学生论文集》终于又得以和广大的读者见面了，这使我们编辑部的全体同志感到欣慰。这里，我们编辑部的同志向关心本刊物的广大读者、作者和印刷厂的师傅表示衷心感谢，也向支持我们工作的系领导表示我们的敬意；同时我们也希望今后能得到读者的更多支持和鼓励，使《数学系大学生论文集》越办越红火。

《数学系大学生论文集》是全国各高等学校大学生的自己刊物，为一切初出茅庐、有志于攀登数学高峰的大学生服务，为你们提供试身之所、练兵之地。根据美籍著名数学家南京大学名誉教授陈省身先生的预言：二十年后中国将成为世界上的数学大国。那么二十年后中国的*Riemann*、*Hilbert* 不正是产生于我们这一代大学生之中吗！有志于中国数学振兴的大学生用你们那无与伦比的数学才智和辛勤的劳动，写出数学史上那闪光的一页吧！

向数学高峰攀登的大学生们，请不要忘记你们忠实的朋友———《数学系大学生论文集》。

《数学系大学生论文集》编辑部

目　录

论哲学无限与数学无限

滕德润

二十世纪最伟大的数学家之一*Weyl*说：数学就是研究无限的学问。尽管历史上已有许多著名学者研究过无限，但“无限”的学问确是无限．至今仍可在其中拾到一、二颗光洁的小石子，请看：

无论是哲学上的无限观，还是数学对无限的处理方法，都是以客观现实世界为背景经过分析而抽象出来的，离开现实世界去抽象地讨论无限．那就会如坠云海，陷入不可自拔的困境之中。随着人们对客观世界的不断认识，人们对无限的认识也会随之改变。

古代的人们基于对宇宙的认识，从当时的生产实践出发，直观地提出了无限概念，其主要思想是“天外有天”，“至大无外．至小无内”。它肯定了无限是由不断否定有限而得到的，同时又告诉了我们在无限的外面什么也没有了。这种无限观的提出是人们从现实世界中直观地提出来的，它既说明了有限可以产生无限，又说明了有限和无限是矛盾的。如果我们认为“天外有天”正确，那么“至大无外，至小无内”就难以和它相容了，反过来也一样，这就说明了有限和无限当为一个统一共存的整体．这是符合辩证法的。

我们不满足于对无限的直观认识，又从理性和逻辑的角度对无限进行了研究，这导致了对无限认识的第二阶段——抽象无限观。这种无限观将有限同无限截然割裂开来，认为无限是不能用感觉感知的，只能张开理智的翅膀去想象。抽象无限性是单纯的无限性，是没有矛盾的无限性，因而是离开有限而独立存在的无限性。正因为如此，*Leibniz*在一封信中写道：“我不相信会有真的无限大量和真的无限小量，它们只是一种虚构，但对于缩短论证和在一般叙述中，是有

用的虚构”。的确脱离[illegible]的抽象无[illegible]性是不存在的，[illegible]过一件很大的物体不是由一些小部分组成的呢？

再后来，随着天文学方面的进展，一些著名的哲学家开始坚信无限和有限是一对矛盾的统一体，只有从矛盾的角度出发才能把握无限，此时康德提出了著名的“二律背反”性，即不论承认宇宙是有限的、还是无限的最终都将导致矛盾，他最后不得不认为宇宙既是有限的又是无限的，但他过分突出了有限同无限的对立、排斥和相互否定，忽视了两者的统一性。*Hegel*经过对“二律背反”的仔细研究，终于找到了造成“二律背反”的根源——二律背反是事物的普遍现象。他正确地指出：“二律背反地真正解决，只能在于两种规定在各自的片面性都不能有效，而只是在它们被扬弃了，在它们的概念的统一中方有真理，因为它们是相对立的，并且对一个而且是同一个的概念，却是必要的”。他的话较晦涩，简单说来就是无限不能离开有限而独立存在，无限存在于有限之中，应当把无限和有限结合起来，从矛盾中把握它们。

以上简要介绍了历史上无限发展的几个重要阶段，下面我们再来重新研究一下无限与有限的关系。当我们承认一个事物是有限的时候那我们必定已经知道它的界限了，在此情况下有限自然地否定了无限奇妙的是同时又暗示了我们无限是存在的。因为承认有限的存在，必须以其对立面的存在为前提。例如现代化的天文观察工具，大大地开阔了我们的视野，但即使如此我们所能认识的宇宙仍然是有限的，在我们所认识的宇宙之外依然有未被认识的天体存在。在*Newton*那个时代，人们认为光速是无限的，其原因就是人们找不到光速的界限但现在我们都认为光速是有限的了。这一实例充分说明了无限同有限是可以相互转化的，无限和有限将随着所给[illegible]外界条件的改变而改变

这些都是直观给我们的启示，我们[illegible]了结，而要把这些启示上升到理论，完成认识论上的飞跃。

辨证法告诉我们量变一定会引起质变，在有限到无限的转化过程中正是遵循了这样一条原理。一旦我们规定了有限，我们也就超越了有限，当有限的量变过程达到极点的时候，就会发生质变，从有限到了无限，从一个层次跳到了另一个层次。在新的层次上这个无限量就成了这个新层次上的有限量，这个有限量也会发生质变而跃入另一个更高的层次。就这样我们不断地否定了有限，也不断地否定了无限，我们不断地得到了有限，也不断地得到了无限，无限在一定的层次上就会转化为有限。有限对某一个层次来说就可能成了无限。正如一个原子的质量相对于1千克的重量来说有无限小的，而1千克的重量和泰山的重量相比又成了无限小了。但是对一个确定的层次来说，它的无限和有限有着质的差别。设a是一个有限量，w相对a来说是一无限大量，b和a是同一个层次上的有限量，那么若$b \neq 0$，就有$a + b \neq a$，但却有$w + a = w$成立，这里的“＋”只代表一种运算符号。无限和有限是对立的，当我们肯定了一方面，也就否定了它的对立面，正因为我们否定了它的对立面，所以我们又无言地肯定了它的对立面存在。多么奇怪啊，可现实就是这样。

根据玻尔的互补原理，有限和无限应当是互补的，对无限的肯定是以对有限的否定为前提，却不是以对有限的消灭为前提。无限和有限将永远是相互依存，相互对立，相互转化的。对于实数我们可以比较大小，对于宏观客体我们可以通过称量比较它们重量的大小，这就是说对于同一个层次上的有限量我们可以按照某种性质来比较它们的大小，那么对这个层次上的无限我们是也能比较它们之间的关系呢？也就是说对于超实限数，我们是否也能来比较它们之间的大小呢？在经典的

[illegible]作为[illegible]整体[illegible]∞；∞和∞之[illegible]比较大小的，你[illegible]不能说2×∞就一定比∞大。可是现实模型却在不断地提醒我们无限也应当是可比较的。根据我们前面的讨论知道，对一个层次来说是无限的量对另一个层次来说就可能是有限的，因此我们可以适当地选择某些层次，将无限化归为各个层次上的有限，这样无限就不再是一个整体了，无限的量之间也就可以相互比较了。这好比你用一个台秤可以比较一块铁和一片木头孰轻孰重，但你无法用台秤去比较氢原子和氧原子孰轻孰重，但我们可以用微观的办法比较氧原子和氢原子的轻重。到底把无限作为一个整体来看待，还是认为无限物之间仍是彼此有别的，就导致了历史上一直争论不休的一个问题：无限到底能否完成，即无限应该是潜无限呢，还是实无限呢。这个问题是很重要的，它关系到认识论上的一个根本问题：人的思维是否能够模写运动和反映飞跃；此外还涉及到现代数学中许多悖论，及数学对无限的处理方法。现代心理学的研究结果和日常的生活实践告诉我们人脑的确是能够模写运动和反映飞跃的，因此实无限当为正确的，又根据“天外有天”，潜无限也当是存在的。如此说来无限就应为实无限和潜无限统一体了，实无限和潜无限也应当是互补的。首先我们确定一个层次，将这个层次上的无限量，化归到一些更高级的层次上去，使得在每一个层次上都成为有限。高级层次是不能穷尽的，是潜变的，因此无限的总体是潜变的，但是当我们取定了高级层次某一确定有限量作为这个层次的无限时，我们就得到了实无限，因此我们通常说的无限就实无限和潜无限的辩证统一，但是我们这里讨论的实无限同一般数理哲学文章中的实无限及Cantor的实无限观是不同的为了让大家清楚地看到这一点，我们先引进几个新概念：

世界：保持同一种质的规定性的对象构成一个世界。对象的质不

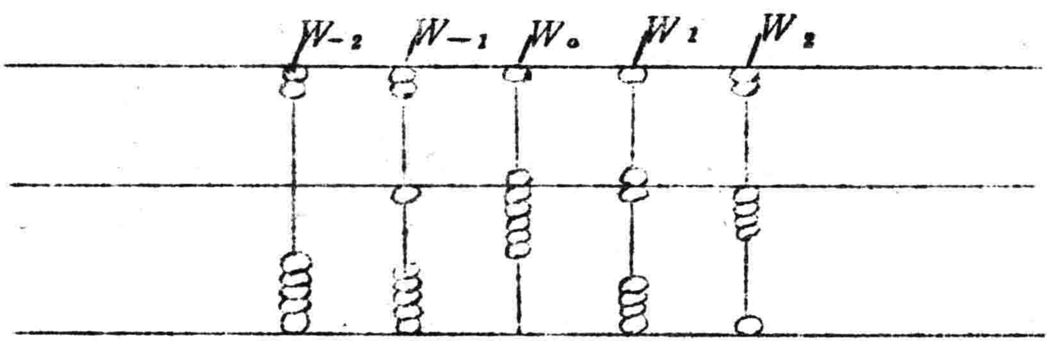
同组成的世界也不同，不[illegible]世界之间既彼此分立，又彼此联系。如我们将客观物质世界划分为微观世界、宏观世界、宇宙世界三个层次，每个层次都有自己独特的运动规律，同时又有某些相似的运动规律。对于同一种质的对象我们可以通过量的关系来描述它们，同一个世界中事物之间量（指描述质的量）之间的关系是有限的关系，不同世界的量之间的关系是无限的关系，事物的量变只有达到了无限的时候才会产生质变。以后我们以W_i表示世界，i取整数。若$i<j$，那么我们称$W_i>W_j$，它的意思是W_i世界中的任何一量都是W_j世界中的无限大量；反过来W_j世界中的任何一量就成了W_i世界中的无限小量。

宇宙：不同的世界汇集到一起就构成了宇宙。由于世界是无限的，因而宇宙中的元素也是无限多的，我们不能为宇宙规定一个边界，使其中包含了一切世界，这是潜无限的必然要求。

世量：局限于某一个世界中所观测到的量称为世量。对于同一个客观对象，不同世界中的世量可能不相同。

宇量：从整个宇宙的范围内所观测到的量。对于同一个客观对象来说，它的宇量是唯一确定的。

下面的“算盘模型”可以帮助我们理解上面的一些思想及概念



……盘的左右两侧是向外无限延伸的，这个"算盘"就是一个宇宙，其上的每一档就代表一个世界，这些世界我们分别记为W_{-2}，W_{-1}，W_0，W_1，W_2……等等。此时W_{-2}中的量为0，W_{-1}中的量为1，W_0中的量为10，W_1中的量为6，W_2中的量为4，它们都是世量，此时的宇量为（……0，1，10，6，4，0……）

不同世界的量之间的关系是实无限的关系，我们该如何用数学式子来描述这种关系呢？首先我们以$a\times|_{(i)}$表示W_i中的世量，这a为任意的实数。若$i<j$那么有$a\times|_{(i)}+b\times|_{(j)}=a\times|_{(i)}$……(1)

这是从W_i或W_j中观测得到的结果，而不是从宇宙去观测得到的结果，因为我们往往是立足于某个世界去研究问题的。因此下面我们主要研究世量之间的关系。(1)式为什么能成立呢？首先假设我们立足于W_i去观测对象，W_j中的量它是不能观测到的，这样把W_j中的量和W_i中的量作用，我们就不能观测到对象的量变和质变。正如我们用天平去秤一杯水的重量时，你无法区别水受到光照和不受光照时的质量差别一样。两个事物若我们既不能从量上，也不能从质上区别它们时，我们就认为它们是一样的，是相等的。其次若我们立足于W_j世界，这时把W_i中一个量和W_j中一个量一作用之后，我们依然得到了一个无限量，对于两个实无限量我们在W_j世界中是无法比较的。这和用一个至多可秤10斤重量的秤不能秤出20斤的物体和30斤重的物体孰轻孰重一样，既然这样我们只有认为它们一样重才行。因此(1)式完全描述出了不同世界的世量之间的关系。但若从宇量的角度来说，那么仍然有$a\times|_{(i)}+b\times|_{(j)}>a\times|_{(i)}$（$i<j$，$b>0$）成立。

对于同一个世界中的量，它们之间的关系是有限量的关系，用数学式子可以表示$a\times|_{(i)}+b\times|_{(i)}=(c+b)\times|_{(i)}$……(2)如果我

[illegible]是在W_i中研究问题，那么(2)可以简写为a[illegible]$=(a+b)$，即[illegible]运算关系。若$a>0$，那么就有$a\times|_{(i)}+a\times|_{(i)}>a\times|_{(i)}$成立，这同经典数学是大不相同的地方。因为若我们立足于W_j中，$(i<j)$，那么按照经典数学应有$a\times|_{(i)}+a\times|_{(i)}=a\times|_{(i)}=\infty$ $(a>0)$，而在我们的观点中，$a\times|_{(i)}+a\times|_{(i)}\neq a\times|_{(i)}$，尽管$a\times|_{(i)}$与$(a+a)\times|_{(i)}$都是$W_j$的无限大量，当我们只限于$W_j$世界时，我们认为$a\times|_{(i)}+a\times|_{(i)}=a\times|_{(i)}=$无限大，但是当我们立足于$W_i$中时，就能够区别$a\times|_{(i)}$与$(a+a)\times|_{(i)}$之间的不同，比较它们的大小。而经典数学做不到。

前面我们提到过相等的概念，当时未能说清楚，这里我们要仔细地研究它。相等与否同我们在哪个世界中观测有关，在一个确定的世界中如果我们无法区别两个对象的质的差别和量的差别，那么我们就说这两个对象是一样的。但是在一个世界中相等的两个对象，在别的世界中就不一定相等了。譬如我们如天平去秤氧原子和氢原子的质量，这时我们能得到的正确结果是氧原子的质量——氢原子的质量——0 。但是当我们用现代化的仪器和手段去测它其质量的时候就会发现氧原子的质量——氢原子质量的16倍，它们不相等了。因此等与不等也是对立统一的，在一定的条件下，它们可以互相转化。如在经典的数学分析中，在研究曲线长度的时候，就先将曲线分成许许多多小段，使得每一小段的长度为无限小。这样一来我们在那固定的世界中就无法区分每一小段弧与连接该弧两端点的弦有什么区别了，因此曲就与直线相等了。

在所有的世量中，0是一个非常特殊的量，每一个世界中都存在“ 0 ”这个量，它既是这个世界中的有限量，也是这个世界中的无限小量。当我们立足于W_0世界中去观测时，我们的观测结果可以是“

"什么也没有"，"什么也观测不到"，[illegible]我们所观测对象的量为"0"。当我们在W_1中观测时，这时我们就可能观测到对象的一个确定的界限，在W_1中的世界大于0，因此这个对象既在W_0中可测，又在W_1中可测，故它既是W_0中有限量，又是W_1中有限量，即W_0中的无限小量。如果一个对象它的宇量为（……0……0，0，0，0……0……）$=\vartheta$，我们称ϑ为理想的0，它在现实中并不存在，是理想的量。和0有密切关系的一个概念是点。在经典数学中认为点只有位置，而没有大小、面积等等，而同时又认为有长度的线段是由无长度的点组成的，这就使得人们很费解。我们对些问题的看法是：某一个世界中的点，在这个世界中只有位置，而长度、面积等皆为0，但此$0 \neq \vartheta$，即在别的世界中我们仍可能测出这些点的长度和面积。如是由无限多个点组成一有长度的线段来就好理解了，今后我们能用详细的数学语言来证实这一点。因此点既有长度又没有长度，既可分又不可分，点是矛盾的统一体，这是符合辩证法要求的。相比较之下，经典数学对点的处理是否很合理，值得大家探讨。

本文的创作过程中得到了朱梧槚老师的多方指导和大力支持，对此作者表示十分感谢。

（作者系南京大学数学系八三数专学生）

参考文献：

1.《现代宇宙学的哲学问题》　孙显元著

2.《数学的历史、逻辑和基础资料选辑：非标准分析》

中国科学院数学研究所资料室

3.《数学基础与数理逻辑基础》　朱梧槚编著

关于不相交的同余覆盖系

孙智伟

如果对任一整数 x，下面 k 个同余式

$$x \equiv a_1 \pmod{n_1},\quad x \equiv a_2 \pmod{n_2},\cdots,\quad x \equiv a_k \pmod{n_k}$$

中有且仅有一个成立，则称集合 $\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}$ 为一个不相交的同余覆盖系。本文记"不相交的同余覆盖系"为"DCS"。关于 DCS，有过许多研究工作。$\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}$ 在 $k>1$ 时为一个 DCS 的必要而不充分条件是 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}=1$ 且 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)>1$ [1][6]（本文以 $(m_1, m_2, \cdots, m_s)$、$[m_1, \cdots, m_s]$ 分别表示正整数 $m_1, m_2, \cdots, m_s$ 的最大公因数和最小公倍数）在文[7]中 Znám 证实了 Mycielski 的一个猜想，事实上他证明了一个更深的结果：如果 $[n_1, \cdots, n_k]=\prod_{j=1}^{r}p_j^{\alpha_j}$（这儿 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 为素数），则 $k \geq 1+\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(p_j-1)$。后来他又证明了：如果 p 为 n_k 的最小素因子，则 $n_k=n_{k-1}=\cdots=n_{k-p+1}$（本文总假定 $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_{k-1} \leq n_k$，显然这并没有失去一般性）。这个结果是 Davenport，Mirsky，Newman 和 Rado 结果的推广。Stein[2] 证明了如果 $n_1<n_2<\cdots<n_{k-2}<n_{k-1}=n_k$，则 $n_i=2^i\ (1 \leq i \leq k-2)$，$n_{k-1}=n_k=2^{k-1}$。Znám[3] 证明了如果 $n_1<n_2<\cdots<n_{k-3}<n_{k-2}=n_{k-1}=n_k$，则 $n_i=2^i\ (1 \leq i \leq k-3)$，$n_{k-2}=n_{k-1}=n_k=3\times 2^{k-3}$。Porubský 在文[4]中证明了如果 $n_1<n_2<\cdots<n_{k-4}<n_{k-3}=n_{k-2}=n_{k-1}=n_k$，则有两种可能：

(a) $n_i=2^i\ (1 \leq i \leq k-4)$，$n_{k-3}=n_{k-2}=n_{k-1}=n_k=2^{k-2}$；

(b) $n_i = 2^i\ (1 \leq i \leq k-5)$, $n_{k-4} = 3 \times 2^{k-5}$,

$$n_{k-3} = n_{k-2} = n_{k-1} = n_k = 3 \times 2^{k-4}。$$

1974年Novák和Znám〔5〕证明了$\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}$为DCS当且仅当关系式

$$\sum_{t=1}^{k} \frac{1}{n_t} exp\left(2\pi i \frac{s a_t}{n_j}\right) = \begin{cases} 0 & 当 s = 1,\ 2,\ \cdots;\ n_j - 1 时 \\ 1 & 当 s = n_j 时 \end{cases}$$

对$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$都成立。尽管这是一个充要条件，但由它我们并不能知道任一个DCS的结构，如何构造出全部的DCS这个问题也没有得到解答。所以Richard K.Guy〔1〕指出主要问题在于如何刻划DCS的特征，并把它列为未解决问题。

在本文中我们将证明全体DCS组成一个归纳集，这个结果给出了全体DCS的生成方法，从而较满意地回答了DCS的特征刻划问题。利用这个结果许多已知结果的证明变得极为简单，而且容易发现和证明一些新结果。

定理1．全体DCS构成的集合M就是归纳集$\overline{M}$。这儿$\overline{M}$定义如下：

（Ⅰ）对每个自然数d $\{i(d)\}_{i=0}^{d-1} \in \overline{M}$；

（Ⅱ）如果 $A = \{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k} \in \overline{M}$，$B = \{b_j(m_j)\}_{j=1}^{l} \in \overline{M}$，

则对$s = 1,\ 2, \cdots, k$都有

$$A *_s B = (\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k} \setminus \{a_s(n_s)\}) \cup \{a_s + n_s b_j(n_s m_j)\}_{j=1}^{l} \in \overline{M}；$$

（Ⅲ）$\overline{M}$的元素仅限于由（Ⅰ）（Ⅱ）所得。

对定理1我们要加几点说明：设C为一个DCS，如果有自然数d使得$C = \{i(d)\}_{i=0}^{d-1}$，则称C为基本DCS；如果有

$\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}$, $B=\{b_j(m_j)\}_{j=1}^{l}$（它们都是DCS）使得

$C=A*_sB\ (1\leq s\leq k)$，则称C可由A，B经运算“$*$”而得。显然，$\overline{M}$对于运算“$*$”封闭。

为证定理1，我们需要

引理1　$\overline{M}\subseteq M$

证明：显然基本DCS是DCS。如果$A=\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}\in M$，

$B=\{b_j(m_j)\}_{j=1}^{l}\in M$，我们来考察

$$C=A*_sB=(\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}\setminus\{a_s(n_s)\})\cup\{a_s+b_j n_s(n_s m_j)\}_{j=1}^{l}$$

任给一整数x，有整数t使得

$$x\equiv a_t(mod\ n_t),\text{但}x\not\equiv a_i(mod\ n_i),\ i=1,2,\cdots,k,\ i\neq t \tag{1}$$

若$t\neq s$，则有

$$x\not\equiv a_s+b_j n_s(mod\ m_j n_s),\quad j=1,2,\cdots,l$$

（否则对某个j，$x\equiv a_s+b_j n_s(mod\ m_j n_s)$从而$x\equiv a_s(mod\ n_s)$，这与（1）矛盾）。因此$x$被$C$仅覆盖一次。若$t=s$则（1）即为

$$x\equiv a_s(mod\ n_s)\text{但}x\not\equiv a_i(mod\ n_i),\ i=1,\cdots,k,\ i\neq s \tag{3}$$

由于$x\equiv a_s(mod\ n_s)$，故有整数q使得$x=a_s+qn_s$。因为B为DCS，故有整数u使得$1\leq u\leq l$，且

$$q\equiv b_u(mod\ m_u),\text{但}q\not\equiv b_j(mod\ m_j)\quad j=\overline{1\ l},\quad j\neq u$$

于是

$$x\equiv a_s+b_u n_s(mod\ n_s m_u),\text{但}x\not\equiv a_s+b_j n_s(mod\ n_s m_j),$$
$$j=\overline{1\ l},\quad j\neq u \tag{4}$$

[illegible]（4），x恰好被[illegible]A[illegible]

$B\in M$。

总上及$\overline{M}$定义，$\overline{M}\subseteq M$得证。

引理2，如果$\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}\in M$，$k>1$，则$(n_1, n_2, \cdots, n_k)>1$

这是前面提到的已知结果。

引理3．设$A=\bigcup\limits_{r=0}^{d-1}\{a_i^{(r)}(n_i^{(r)})\}_{i=1}^{h(r)}$，$a_1^{(r)}\equiv\cdots\equiv a_{h(r)}^{(r)}\equiv r$ $(\bmod d)$，$r=0, 1, \cdots, d-1$，且$d\mid n_i^{(r)}$，$i=1, \cdots, h(r)$，$r=0, \cdots, d-1$，则

A为$DCS\Longleftrightarrow$对$r=0, 1, \cdots, d-1$，$\{\frac{a_i^{(r)}-r}{d}(\frac{n_i^{(r)}}{d})\}_{i=1}^{h(r)}$为$DCS$

证明：A为$DCS\Longleftrightarrow$任给r满足$0\leq r\leq d-1$及整数x，$r+dx$被A恰好覆盖一次。$\Longleftrightarrow$对任一整数x，$r+dx$被$\{a_i^{(r)}(n_i^{(r)})\}_{i=1}^{h(r)}$恰好覆盖一次，$r=0, 1, \cdots, d-1$。（因为若$xd+r\equiv a_i^{(j)}(\bmod n_i^{(j)})$，$1\leq i\leq h(j)$ $0\leq j\leq d-1$，则$r\equiv r+dx\equiv a_i^{(j)}(\bmod d)$，从而$j\equiv a_i^{(j)}\equiv r(\bmod d)$）$\Longleftrightarrow$对任一整数$x$，$x$被$\{\frac{a_i^{(r)}-r}{d}(n_i^{(r)}/d)\}_{i=1}^{h(r)}$恰好覆盖一次，$r=0, 1, \cdots, d-1$。$\Longleftrightarrow$对$r=0, 1, \cdots, d-1$，$\{\frac{a_i^{(r)}-r}{d}(\frac{n_i^{(r)}}{d})\}_{i=1}^{h(r)}$为$DCS$。

至此引理3获证。

下面来证定理1：

定理1证明：我们采用数学归纳法，施归纳于DCS的模个数[illegible]

证明$M \subseteq \bar{M}$。

① 仅有一个模的DCS只能是$\{0(1)\}$，它是基本DCS，故$\{0(1)\} \in \bar{M}$。

② 假定$\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}$为一个DCS（$k>1$），且一切模个数小于k的DCS都属于$\bar{M}$，由引理2，$d=(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k)>1$。令 $h_r = \sum\limits_{\substack{a_i \equiv r(\bmod d) \\ 1 \leq i \leq k}} 1$ $r=0,\ 1,\ \cdots,\ d-1$。

由于r被$\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}$覆盖，故$h(r) \geq 1$，$r=0,\ 1,\ \cdots,d-1$。设满足$a_i \equiv r(\bmod d)$的那些a_i是$a_1^{(r)},\ \cdots,\ a_{h(r)}^{(r)}$对应的模为$n_1^{(r)},\cdots,\ n_{h(r)}^{(r)}$。于是$A=\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k} = \bigcup\limits_{r=0}^{d-1}\{a_i^{(r)}(n_i^{(r)})\}_{i=1}^{h(r)}$满足引理3条件，因此对$r=0,\ 1,\ \cdots,\ d-1$，

$\{\frac{a_i^{(r)}-r}{d}(\frac{n_i^{(r)}}{d})\}_{i=1}^{h(r)}$为$DCS$。由于$h(r) \geq 1$，$\sum\limits_{r=0}^{d-1} h(r) = k$．且$d>1$，因此$h(r)<k$，$r=0,\ 1,\ \cdots,\ d-1$。由归纳假设

$\{\frac{a_i^{(r)}-r}{d}(\frac{n_i^{(r)}}{d})\}_{i=1}^{h(r)} \in \bar{M}$，$r=0,\ 1,\ \cdots,\ d-1$。而

$A=\bigcup\limits_{r=0}^{d-1}\{a_i^{(r)}(n_i^{(r)})\}_{i=1}^{h(r)}$ 可由$\{i(d)\}_{i=0}^{d-1}$以及

$\{\frac{a_i^{(0)}-0}{d}(\frac{n_i^{(0)}}{d})\}_{i=1}^{h(0)},\ \cdots,\ \{\frac{a_i^{(d-1)}-(d-1)}{d}(\frac{n_i^{(d-1)}}{d})\}_{i=1}^{h(d-1)}$通过使用$d$次“$*$”运算而得。因此，任一具有$k$个模的$DCS$

$\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}$属于$\bar{M}$。

由①②及数学归纳法原理 [illegible] $=M$。再由引理1，$\overline{M}\subseteq M$，[illegible] $\overline{M}=M$。定理1得证。

定理2．如果$\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}$为DCS，$0\leqq a_i\leqq n_i-1$，$i=\overline{1k}$，$n_1\leqq n_2\leqq n_3\leqq\cdots\leqq n_{k-1}\leqq n_k$，则有

（Ⅰ）（$P.Erdös$）$\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}=1$；

（Ⅱ）（$Zn\acute{a}m$）$k\geqq 1+\sum\limits_{j=1}^{r}\alpha_j(p_j-1)$（这儿$[n_1,\cdots,n_k]=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$，$p_1<p_2<\cdots<p_r$，$p_1$，$\cdots$，$p_r$都为素数），亦即$k\geqq 1+\sum\limits_{p\,|\,[n_1,\cdots,n_k]}(p-1)$（其中求和号过$[n_1,\cdots,n_k]$所有素因子）。

（Ⅲ）（$Zn\acute{a}m$）$n_k=n_{k-1}=\cdots=n_{k-p+1}$，这儿$p$为$n_k$的最小素因子；

（Ⅳ）（由我兄弟孙智宏所发现）$\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{a_i}{n_i}=\frac{k-1}{2}$。

证明：由定理1我们只要证$\overline{M}$的每个元素都有上述四条性质。对基本DCS容易验证上述四性质成立。今设$A=\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}\in\overline{M}$，$B=\{b_j(m_j)\}_{j=1}^{l}\in\overline{M}$，且假定$A$，$B$都具有上述四性质，对于$C=A*_sB$（$1\leqq s\leqq k$），我们有

$$\text{（Ⅰ）}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}-\frac{1}{n_s}\right)+\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{n_sm_j}=1-\frac{1}{n_s}+\frac{1}{n_s}\times 1=1$$

$$\text{（Ⅱ）}[n_1,\cdots n_{s-1},n_{s+1},\cdots,n_k,n_sm_1,\cdots,n_sm_l]=[n_1,\cdots,n_{s-1},n_{s+1},\cdots,n_k,n_s[m_1,\cdots,m_l]]$$