



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

全国高等学校自动化专业系列教材
教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会牵头规划

Fundamental Modern Mathematics in Systems and Control
(Second Edition)

系统与控制中的 近代数学基础 (第2版)

程代展 赵寅 编著

Cheng Daizhan Zhao Yin



清华大学出版社



普通高等教育“十一五”国家



全国高等学校自动化专业系列教材
教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会牵头规划

Fundamental Modern Mathematics in Systems and Control
(Second Edition)

系统与amp;控制中的 近代数学基础 (第2版)

程代展 赵寅 编著
Cheng Daizhan Zhao Yin

清华大学出版社
北京

013-43

90-2

内 容 简 介

本书根据自动化学科系统科学与现代控制理论研究前沿的现状与需求介绍有关的近代数学的基础知识,内容包括实变函数与泛函分析、概率论、随机过程、抽象代数、拓扑学、微分流形与黎曼几何、代数几何、图论、博弈论等.作者致力于将理科专业的若干主要近代数学基础课程结合系统与控制理论深入浅出地综合成自动化专业的一门数学课程,这是一种探索.本书的内容强调数学学科自身的结构与严密性,同时,以系统科学与控制理论相关文献中出现和使用较多的数学工具为主,以满足阅读文献和从事系统与控制理论科学研究的需要.

本书的阅读对象为有志于理论研究的自动化及相近专业工科研究生及青年教师.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

系统与控制中的近代数学基础/程代展,赵寅编著.--2版.--北京:清华大学出版社,2014

全国高等学校自动化专业系列教材

ISBN 978-7-302-34387-5

I. ①系… II. ①程… ②赵… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第260127号

责任编辑:王一玲

封面设计:傅瑞学

责任校对:焦丽丽

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市新茂装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:175mm×245mm 印 张:29.25 字 数:706千字

版 次:2007年7月第1版 2014年5月第2版 印 次:2014年5月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:59.00元

产品编号:047803-01

出版说明

《全国高等学校自动化专业系列教材》



为适应我国对高等学校自动化专业人才培养的需要,配合各高校教学改革的进程,创建一套符合自动化专业培养目标和教学改革要求的新型自动化专业系列教材,“教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会”(简称“教指委”)联合了“中国自动化学会教育工作委员会”、“中国电工技术学会高校工业自动化教育专业委员会”、“中国系统仿真学会教育工作委员会”和“中国机械工业教育协会电气工程及自动化学科委员会”四个委员会,以教学创新为指导思想,以教材带动教学改革为方针,设立专项资助基金,采用全国公开招标方式,组织编写出版一套自动化专业系列教材——《全国高等学校自动化专业系列教材》。

本系列教材主要面向本科生,同时兼顾研究生;覆盖面包括专业基础课、专业核心课、专业选修课、实践环节课和专业综合训练课;重点突出自动化专业基础理论和前沿技术;以文字教材为主,适当包括多媒体教材;以主教材为主,适当包括习题集、实验指导书、教师参考书、多媒体课件、网络课程脚本等辅助教材;力求做到符合自动化专业培养目标、反映自动化专业教育改革方向、满足自动化专业教学需要;努力创造使之成为具有先进性、创新性、适用性和系统性的特色品牌教材。

本系列教材在“教指委”的领导下,从2004年起,通过招标机制,计划用3~4年时间出版50本左右教材,2006年开始陆续出版问世。为满足多层次、多类型的教学需求,同类教材可能出版多种版本。

本系列教材的主要读者群是自动化专业及相关专业的大学生和研究生,以及相关领域和部门的科学工作者和工程技术人员。我们希望本系列教材既能为在校大学生和研究生的学习提供内容先进、论述系统和适于教学的教材或参考书,也能为广大科学工作者和工程技术人员知识更新与继续学习提供适合的参考资料。感谢使用本系列教材的广大教师、学生和科技工作者的热情支持,并欢迎提出批评和意见。

《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会

2005年10月于北京

《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会

顾问 (按姓氏笔画):

王行愚(华东理工大学)	冯纯伯(东南大学)
孙优贤(浙江大学)	吴启迪(同济大学)
张嗣瀛(东北大学)	陈伯时(上海大学)
陈翰馥(中国科学院)	郑大钟(清华大学)
郑南宁(西安交通大学)	韩崇昭(西安交通大学)

主任委员: 吴澄(清华大学)

副主任委员: 赵光宙(浙江大学) 萧德云(清华大学)

委员 (按姓氏笔画):

王雄(清华大学)	方华京(华中科技大学)
史震(哈尔滨工程大学)	田作华(上海交通大学)
卢京潮(西北工业大学)	孙鹤旭(河北工业大学)
刘建昌(东北大学)	吴刚(中国科技大学)
吴成东(沈阳建筑工程学院)	吴爱国(天津大学)
陈庆伟(南京理工大学)	陈兴林(哈尔滨工业大学)
郑志强(国防科技大学)	赵曜(四川大学)
段其昌(重庆大学)	程鹏(北京航空航天大学)
谢克明(太原理工大学)	韩九强(西安交通大学)
褚健(浙江大学)	蔡鸿程(清华大学出版社)
廖晓钟(北京理工大学)	戴先中(东南大学)

工作小组(组长): 萧德云(清华大学)

(成员): 陈伯时(上海大学) 郑大钟(清华大学)
田作华(上海交通大学) 赵光宙(浙江大学)
韩九强(西安交通大学) 陈兴林(哈尔滨工业大学)
陈庆伟(南京理工大学)

(助理): 郭晓华(清华大学)

责任编辑: 王一玲(清华大学出版社)

自动化学科有着光荣的历史和重要的地位,20 世纪 50 年代我国政府就十分重视自动化学科的发展和自动化专业人才的培养.五十多年来,自动化科学技术在众多领域发挥了重大作用,如航空、航天等,两弹一星的伟大工程就包含了许多自动化科学技术的成果.自动化科学技术也改变了我国工业整体的面貌,不论是石油化工、电力、钢铁,还是轻工、建材、医药等领域都要用到自动化手段,在国防工业中自动化的作用更是巨大的.现在,世界上有很多非常活跃的领域都离不开自动化技术,比如机器人、月球车等.另外,自动化学科对一些交叉学科的发展同样起到了积极的促进作用,例如网络控制、量子控制、流媒体控制、生物信息学、系统生物学等学科就是在系统论、控制论、信息论的影响下得到不断的发展.在整个世界已经进入信息时代的背景下,中国要完成工业化的任务还很重,或者说我们正处在后工业化的阶段.因此,国家提出走新型工业化的道路和“信息化带动工业化,工业化促进信息化”的科学发展观,这对自动化科学技术的发展是一个前所未有的战略机遇.

机遇难得,人才更难得.要发展自动化学科,人才是基础、是关键.高等学校是人才培养的基地,或者说人才培养是高等学校的根本.作为高等学校的领导和教师始终要把人才培养放在第一位,具体对自动化系或自动化学院的领导和教师来说,要时刻想着为国家关键行业和战线培养和输送优秀的自动化技术人才.

影响人才培养的因素很多,涉及教学改革方方面面,包括如何拓宽专业口径、优化教学计划、增强教学柔性、强化通识教育、提高知识起点、降低专业重心、加强基础知识、强调专业实践等,其中构建融会贯通、紧密配合、有机联系的课程体系,编写有利于促进学生个性发展、培养学生创新能力的教材尤为重要.清华大学吴澄院士领导的《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会,根据自动化学科对自动化技术人才素质与能力的需求,充分吸取国外自动化教材的优势与特点,在全国范围内,以招标方式,组织编写了这套自动化专业系列教材,这对推动高等学校自动化专业发展与人才培养具有重要的意义.这套系列教材的建设有新思路、新机制,适应了高等学校教学改革与发展的新形势,立足创建精品教材,重视实践

性环节在人才培养中的作用,采用了竞争机制,以激励和推动教材建设.在此,我谨向参与本系列教材规划、组织、编写的老师致以诚挚的感谢,并希望该系列教材在全国高等学校自动化专业人才培养中发挥应有的作用:

吴恪迪 教授

2005年10月于教育部

《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会在对国内外部分大学有关自动化专业的教材做深入调研的基础上,广泛听取了各方面的意见,以招标方式,组织编写了一套面向全国本科生(兼顾研究生)、体现自动化专业教材整体规划和课程体系、强调专业基础和理论联系实际的系列教材,自2006年起将陆续面世。全套系列教材共50多本,涵盖了自动化学科的主要知识领域,大部分教材都配置了包括电子教案、多媒体课件、习题辅导、课程实验指导书等立体化教材配件。此外,为强调落实“加强实践教学,培养创新人才”的教学改革思想,还特别规划了一组专业实验教程,包括《自动控制原理实验教程》、《运动控制实验教程》、《过程控制实验教程》、《检测技术实验教程》和《计算机控制系统实验教程》等。

自动化科学技术是一门应用性很强的学科,面对的是各种各样错综复杂的系统,控制对象可能是确定性的、也可能是随机性的,控制方法可能是常规控制、也可能需要优化控制。这样的学科专业人才应该具有什么样的知识结构,又应该如何通过专业教材来体现,这正是“系列教材编审委员会”规划系列教材时所面临的问题。为此,设立了《自动化专业课程体系结构研究》专项研究课题,成立了由清华大学萧德云教授负责,包括清华大学、上海交通大学、西安交通大学和东北大学等多所院校参与的联合研究小组,对自动化专业课程体系结构进行深入的研究,提出了按“控制理论与工程、控制系统与技术、系统理论与工程、信息处理与分析、计算机与网络、软件基础与工程、专业课程实验”等知识板块构建的课程体系结构。以此为基础,组织规划了一套涵盖几十门自动化专业基础课程和专业课程的系列教材。从基础理论到控制技术,从系统理论到工程实践,从计算机技术到信号处理,从设计分析到课程实验,涉及的知识单元多达数百个、知识点几千个,介入的学校50多所,参与的教授120多人,是一项庞大的系统工程。从编制招标要求、公布招标公告,到组织投标和评审,最后商定教材大纲,凝聚着全国百余名教授的心血,为的是编写出版一套具有一定规模、富有特色的、既考虑研究型大学又考虑应用型大学的自动化专业创新型系列教材。

然而,如何进一步构建完善的自动化专业教材体系结构?如何建设基础知识与最新知识有机融合的教材?如何充分利用现代技术,适应现代大学生的接受习惯,改变教材单一形态,建设数字化、电子化、网络化等多元

形态、开放性的“广义教材”?等等,这些都还有待我们进行更深入的研究。

本套系列教材的出版,对更新自动化专业的知识体系、改善教学条件、创造个性化的教学环境,一定会起到积极的作用。但是由于受各方面条件所限,本套教材从整体结构到每本书的知识组成都可能存在许多不当甚至谬误之处,还望使用本套教材的广大教师、学生及各界人士不吝批评指正。

吴俊 院士

2005年10月于清华大学



将近代数学的基本知识传授给仅具工科大学数学基础的年轻学子,是中国自动化学会教材委员会老师们提出的一个极具创意的构想. 我们有幸应邀去实践这一想法. 本书出版后,受到许多读者的欢迎. 北京航空航天大学的一位老师说,他们实验室是人手一册;一位清华大学自动化专业毕业的老学长几次来电话,说我们写这本书是“功德无量”. 读者的错爱更让我们感到责任的重大. 由于第1版写作比较匆忙,似乎有许多未了的心愿,同时,一些年轻读者对本书的可读性提出一些批评. 鉴于初版已售罄,再版似成必然.

再版的主要修订包括以下几点:

(1) 增加概率论(第4章)和随机过程(第5章),这部分内容不管是对自动化还是对信息、通信等相关专业都是极为重要的. 第1版写作时曾设想本系列教材中有一本与之平行的关于概率论与随机过程的书,现在经教材委员会同意将这一部分内容加入本书,使之融入近代数学整体框架之中,这增加了本书内容的完整性,也便于读者的方便掌握和使用.

(2) 增加离散数学方法(第12章),内容包括图论与有限博弈,基本属于离散数学的一些内容. 原因有两点:①图与博弈虽不属纯粹数学的主流,却是目前系统与控制理论中应用最多或最热门的两个新工具;②离散数学本身的重要性. 文献[33]中曾提到:“微积分在数学中一贯处于领袖地位,可以预见,有朝一日这种地位将被离散数学夺走.”特别是在计算机高度发达的今天,离散数学越来越显示着自己的重要性.

(3) 增强可读性. 近代数学的各分支都有成熟的教材,将这些内容融为一体,让自动化及相关专业的研究生、青年教师或科技工作者在不太长的时间内学习和掌握这些内容,是一项艰巨的任务. 在第1版尝试的基础上,再版对全书内容做了较大调整,部分内容进行改写,增加例子和解释,重编习题,力图从读者角度出发,增强全书的可读性.

第4章的内容是基于测度的概率理论. 4.1节回顾经典概率理论,介绍古典概率方法与全概率公式等;4.2节介绍随机变量与分布函数的概念,并介绍正态分布、泊松分布及在数理统计中的一些概率分布;4.3节讨论随机变量的数字特征,包括期望、方差及相关不等式;4.4节研究条件数学期望及其相关性质;4.5节是随机变量序列的各种相关性及其强弱关系的比较;4.6节讲解大数定理和中心极限定理.

第5章讨论随机过程. 5.1节介绍离散时间鞅理论, 包括停时、滤链与鞅收敛定理等, 这些是讨论随机过程的基础; 5.2节讨论离散马尔科夫链, 着重介绍马氏过程状态转移的性质; 5.3节是关于连续时间的随机过程, 主要讨论 Wiener 过程; 5.4节介绍 Itô 积分, 给出 Itô 积分和微分的公式; 5.5节介绍 Kalman 滤波, 它是随机过程在信息和控制理论方面的重要应用.

第12章介绍图论与博弈论, 之所以将博弈论归入离散数学方法, 是因为我们只讨论策略有限博弈, 在动态情况下将它转化为 k 值逻辑系统. 第12章内容包括: 12.1节讲解基本图论的概念与方法; 12.2节介绍图的扩展——超图, 以及研究图和超图的一个新工具——拟阵; 12.3节是关于非合作博弈, 主要以纳什均衡为中心; 12.4节讨论合作博弈, 特别介绍了矩阵半张量在特征函数展开和 Shapley 值计算中的应用; 12.5节讨论网络演化博弈, 介绍基本演化方程等, 这节介绍的主要是我们自己的近期工作.

囿于作者的学识和眼界, 面对这样一个任务深感力不从心, 衷心希望有关专家和读者不吝赐教, 将你们的批评指正反馈给我们. 让我们共同努力, 以求实现本书的初衷: 为工科学生提供一本易于学习的近代数学综合教材.

作者感谢教材委员会萧德云教授的鼓励, 感谢清华大学出版社的支持.

程代展

于中科院系统所, 北京, 2013年8月



“数学是科学之母”，这是中学数学教师的一句口头禅。这类说法是如此地深入人心，因此，数学的重要性大概是毋庸置疑的。20 世纪杰出的哲学家和数学家罗素(Russell, 1872—1970)说过：“任何一门学科，如果离开了严格的数学方法，就不能成为一门科学。”系统与amp;控制理论作为一门应用数学的交叉学科分支与纯粹数学的关系更非一般。在 2005 年布拉格召开的第 16 届 IFAC 世界大会上，现代控制理论的奠基人之一——卡尔曼(Kalman, 1930—)教授——在其大会报告中说道：“回忆近一百年来系统理论的发展，一个无可争辩的事实是，在基本物理本质清楚之后系统理论的工程应用问题的成功或挫折都与其背后的相应纯粹数学问题的解决与否直接相关。”(Reviewing the evolution of system theory over the last 100 years, the inevitable conclusion is that after the basic physical issues have been cleared up progress or failure in engineering research in system theory has been directly linked to progress or failure in solving the underlying purely mathematical problems.)这段话深刻地揭示了纯粹数学在系统与amp;控制理论中的重要作用。

那么，系统与amp;控制理论究竟需要哪些数学知识呢？中国现代控制理论的开拓者之一关肇直先生曾说过：“控制论是一门交叉学科，大家见仁见智，十八般武艺都可以往上使。”这生动地描述了系统与amp;控制理论的另一个特点：由于系统模型的多样性，它与几乎所有的主要数学分支都有深刻的内在联系。例如，动态系统与常微分方程、偏微分方程、拓扑动力学及微分动力学关系密切；非线性控制系统可以用微分流形、向量场等来刻画；研究卫星姿态及机器人运动等，李群及李代数理论是一个有效的工具；在随机系统及系统建模辨识的研究中概率论与随机过程起着决定性的作用；对于梁、板等弹性体的控制，泛函分析与算子理论是基础，甚至像数理逻辑或多值逻辑等纯粹数学分支也在模糊系统与amp;控制中得到广泛的应用。

中国有两句老话，一句叫“艺不压身”；还有一句说：“工欲善其事，必先利其器”。这对系统与amp;控制理论的研究者而言尤显重要。一个优秀的系统控制专家应当有一个宽阔的、坚实的数学基础，才能应对几乎无所不包的所谓“系统”和驾驭系统的控制理论，解决其背后复杂多样的数学问题。几乎可以肯定地说，没有一门数学知识对系统控制理论研究是多余的。

然而,一个突出的矛盾是,自动化专业的研究生没有足够的时间和精力去专修一门数学理论课程.因此,怎么能在较短的时间内用较少的精力打下一个恰当的数学基础,为专业理论研究和日后的深造及发展创造一个良好的条件,这是一个迫切而富有挑战性的工作.

本书试图将近代数学的三个主要分支:分析、代数、几何的知识融合在一起,以理工科大学自动化本科学生的数学为基础,包括微积分、线性代数及常微分方程等初等数学知识为出发点,讲清近代数学的基本概念及在系统控制以及相近学科中大量使用的相关数学知识,使得有志于理论研究的研究生和青年学者在掌握了这些知识后,能够顺利地进入科研领域.首先是能够在阅读本学科的前沿学术论文时,对其中使用的主要近代数学工具能够理解而不感到陌生;进而能够将这些知识应用于自己的学科研究中去,逐步使之成为自己得心应手的工具.

本书的主要内容如下:第1章是一个综述,介绍近代数学的学科结构和它在系统与控制中的应用;第2章介绍实分析的基础,内容包括实数理论、测度论与Lebesgue积分;第3章是关于泛函分析的基础内容,主要介绍赋范空间和有界线性算子的初步知识,还对Sobolev空间作了简单介绍;第4章的主要内容是点集拓扑,包括拓扑空间、可数性、分离原理、连通性、紧性、乘积空间与黏合空间;第5章是近世代数,主要讨论群、环和域这三种代数结构,作为综合和应用,较详细地介绍了伽罗瓦理论;第6章介绍代数拓扑的一些基础知识,重点是同伦与同调理论;第7章是微分几何,讨论了微分流形、向量场、张量场及李群、李代数等;第8章从张量和张量场出发,对黎曼几何和辛几何作了适当的介绍;第9章以线性控制系统为背景,对代数几何作了一个初步的介绍.附录是笔者自创的“矩阵的半张量积”,它是普通矩阵乘法在不满足行列匹配条件时的推广,在本书中有几处简单运用.

在内容的选择上,以学科必要的基础知识及系统控制理论中涉及的程度为标准.这自然会受到笔者主观兴趣与经历的影响.为避免误导,希望说明两点:(1)随机过程、鞅理论等是随机系统与建模、滤波及信息处理等的重要工具,本书未论及是因为本丛书计划有这方面的专著.因此,本书似应加一个小标题:确定性部分.(2)由于篇幅所限,笔者不得不忍痛割舍了一些同样有用的内容.包括①微分拓扑,它对微分动力系统的分析是十分有用的工具;②变分法,它是优化及最优控制设计的有力工具;③微分对策,它是对抗性控制设计,包括鲁棒控制等中不可或缺的工具.如果本书受欢迎,笔者会考虑再版时扩充这些内容.

另外,笔者尽可能对数学的历史、常识和一些前沿课题作一点适当的介绍.例如,介绍了Zermelo选择公理、Zorn引理、超限归纳法、连续统假定等数学知识;讨论分形几何与分数维的计算;证明了为什么用尺规三等分一个任意角是不可能的,为什么五次及五次以上方程不会有公式解;简单说明什么是冯康的辛算法,也对庞加莱猜想、费尔马大定理、四色问题、黎曼猜想等作一点解释.

在内容的组织上,本书照顾的仍是数学学科本身的逻辑性.实际例子或解释比喻也许会使数学概念形象化,但只有真正掌握了数学内涵,才有可能将它应用于实

际问题。“文化大革命”中清华大学流行一种说法,叫“一把锉刀捅破了窗户纸”,意思是只要理解锉刀锉工件的过程就知道什么是微积分了。其实,这是将因果颠倒了。数学老师们先对微积分有了深刻理解,才能悟出锉刀的工作过程有微分和积分的内涵。因此,本书实质上是一本依数学自身演绎规则要求写成的数学书。它不要求你懂任何系统或控制的专门知识,任何一个具有工科大学数学基础的学生,只要对本书内容有兴趣,都可以读它。笔者仍然坚信,只有读懂了有关的数学知识,才有可能用它来解决问题。

在不失数学的学科严密性的同时,笔者力图用尽可能通俗的方法讲解这些近代数学的概念和方法,并编造和利用大量简单的例子来帮助理解数学概念。为了内容的相容性和可读性,许多证明也需要重新写过。实际上,这对笔者也是一个很大的挑战和艰难的工作。尽管作者做了许多努力,但无论如何,读者所面对的仍是艰深而庞杂的近代数学知识;要想在较短的时间内掌握它,绝对不是一件容易的事情。因此,这本书是为那些有志于从事理论研究而又肯下苦功的读者写的。

马克思说过:“在科学的探索中没有平坦大道可走,只有在崎岖小道的攀登上不畏劳苦的人,才有希望达到光辉的顶点。”追求功名利禄确有捷径,成功者大有人在;而这本书指引的却是一条艰难的崎岖小道,但它或许会给你攀援登顶的机会。

本书第2章与第3章初稿大部分由中科院系统科学研究所冯德兴教授提供,冯德兴教授并负责全书的校核,特此致谢。齐洪胜博士协助本书的编排,一并致谢。

笔者感谢《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会的鼓励和支持,特别是萧德云教授和王一玲编辑的热心帮助。

笔者才疏学浅,对数学也至多算一个“业余爱好者”,勉为其难地承担了这样一个艰巨的工作,又无现成体例可循,疏漏错误难免,敬请读者和专家们批评指正。

程代展

于中科院系统所,北京,2007年1月



$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{Q}$	有理数域
$\mathbb{Z}$	整数环
$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{Z}_n$	模 n 整数 (环或域)
$A \Delta B$	集合 A, B 的对称差
$M_{m \times n}$	$m \times n$ 矩阵集
M_n	$n \times n$ 矩阵集
$\ltimes$	矩阵的左半张量积
$\operatorname{Re} \sigma(A)$	矩阵 A 的特征值的实部
$\operatorname{Hess}(h(x))$	$h(x)$ 的 Hessian 矩阵
$H < G$	H 是 G 的子群
$H \triangleleft G$	H 是 G 的正规子群
$GL(n, \mathbb{R})$	一般线性群
$gl(n, \mathbb{R})$	一般线性代数
$SL(n, \mathbb{R})$	特殊线性群
$sl(n, \mathbb{R})$	特殊线性代数
$SO(n, \mathbb{R})$	特殊正交线性群
$so(n, \mathbb{R})$	特殊正交线性代数
$Sp(n, \mathbb{R})$	辛群
$sp(n, \mathbb{R})$	辛代数
S_n	对称群
$[\cdot, \cdot]$	李括号
$(\cdot, \cdot)$	距 空间
$(x, \cdot)$	x , 的距
$\ x\ $	x 的范数
$(X, \ \cdot\)$	赋范空间
$B_r(x)$	以 x 为球心 r 为半径的开球
id_X	X 空间上的恒等映射
$(\Omega, \mathcal{F})$	可测空间
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	概率空间
$P(A)$	A 的概率
$\mathcal{L}(X)$	赋范空间 X 上有界线性算子集
$H_k(X, F)$	X 在 F 上的 k 阶同调群

$f \simeq g$	两函数同伦
$f \simeq_A g$	两函数关于 A 同伦
$X \simeq Y$	两空间同伦
$\sigma_1 \sim \sigma_2$	两路径等价
$N \hookrightarrow M$	嵌入映射
$\text{Obj}(C)$	范畴 C 的对象集
$\text{Hom}(A, B)$	对象 A 到 B 的态射集
$\text{conv}\{X\}$	X 的凸包
$\text{aff}\{X\}$	由 X 生成的仿射集
$\ker(\pi)$	映射 π 的核
$\text{im}(\pi)$	映射 π 的值域
$[p_0, p_1, \dots, p_k]$	单纯形
$H^{m,p}(\Omega)$	$L^p(\Omega)$ 上的 m 阶 Sobolev 空间
$H^s(\Omega)$	s 阶 Sobolev 空间
$\text{Hom}_K(V, W)$	V 到 W 的 K -态射集合
$\text{Reg}(V, W)$	V 到 W 的正则映射集合
$\text{Han}(n, K)$	次数为 n 的 Hankel 阵
$\text{rank}(F)$	映射的秩
$\text{ad}_f^k g$	向量场 g 对 f 的 k 次李导数
$L_f^k h$	函数 h 对 f 的 k 次李导数
$\text{Id}(i; k)$	指标集
DF	F 的微分
∇F	F 的梯度
F_*	微分同胚 F 的正向导导出映射
F^*	微分同胚 F 的逆向导出映射
$\nabla_f g$	g 沿 f 的联络
$a \% b$	$\frac{a}{b}$ 的余
$[a]$	不大于 a 的最大整数
$T(N)$	流形 N 的切空间
$T^*(N)$	流形 N 的余切空间
$C^\infty(N)$	流形 N 上 C^∞ 函数
$C^\omega(N)$	流形 N 上的解析函数
$V(N)$	流形 N 上光滑向量场全体集合
$V^\omega(N)$	流形 N 上解析向量场全体集合
$\phi_X^t(x_0)$	X 的以 x_0 为初值的积分曲线
$T_t^s(N)$	全体 N 上 (s, t) 型张量场的集合
$\wedge$	协变张量的楔积
$\{\cdot, \cdot\}$	Poisson 括号



第 1 章 数学与系统控制	1
1.1 数学和它的学科结构	1
1.2 系统与控制理论	4
1.3 建模、控制与优化中的数学方法	6
1.3.1 系统建模	6
1.3.2 系统控制	15
1.3.3 系统优化	19
1.3.4 代数拓扑方法	23
1.4 注释与参考	25
1.5 习题	26
第 2 章 测度与积分	29
2.1 集合与势	29
2.2 实数及其完备性	33
2.3 实数域 $\mathbb{R}$ 中的开集和闭集	37
2.4 $\mathbb{R}$ 中的测度论	38
2.5 可测函数	46
2.6 概率测度与 Hausdorff 测度	55
2.7 勒贝格积分 (I) — 有界可测函数情形	60
2.8 勒贝格积分 (II) — 非负可测函数情形	65
2.9 勒贝格积分 (III) — 一般可测函数情形	69
2.10 勒贝格积分与黎曼积分的关系	72
2.11 不定积分	74
2.12 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格可测集和勒贝格积分	80
2.13 注释与参考	80
2.14 习题	81
第 3 章 泛函空间与线性算子	84
3.1 距离空间	84
3.2 赋范线性空间	95
3.3 内积空间	102
3.4 有界线性算子	107
3.5 有界线性泛函和伴随算子	110