

21世纪大学公共数学系列教材

线性代数 学习指导

● 胡金德 编著

Math

 中国人民大学出版社

014035775

0151.2-42
134

21世纪大学公共数学系列教材

线性代数 学习指导

● 胡金德 编著



Math

中国人民大学出版社
· 北京 ·



北航

01723070

0151.2-42
134

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数学习指导/胡金德编著. —北京: 中国人民大学出版社, 2014. 2
21 世纪大学公共数学系列教材
ISBN 978-7-300-18711-2

I. ①线… II. ①胡… III. ①线性代数-高等学校-教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 005295 号

21 世纪大学公共数学系列教材
线性代数学习指导
胡金德 编著
Xianxing Daishu Xuexi Zhidao

出版发行 中国人民大学出版社
社 址 北京中关村大街 31 号
电 话 010-62511242 (总编室)
010-82501766 (邮购部)
010-62515195 (发行公司)
网 址 <http://www.crup.com.cn>
<http://www.ttrnet.com> (人大教研网)
经 销 新华书店
印 刷 北京东方圣雅印刷有限公司
规 格 185 mm×260 mm 16 开本
印 张 15.5 插页 1
字 数 373 000

邮政编码 100080
010-62511770 (质管部)
010-62514148 (门市部)
010-62515275 (盗版举报)

版 次 2014 年 4 月第 1 版
印 次 2014 年 4 月第 1 次印刷
定 价 28.00 元

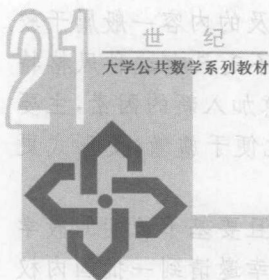


北航

C1723070

有 侵权必究

印装差错 负责调换



总 序

进入 21 世纪以来,现代科学技术大潮流澎湃,深刻地影响到人类社会的进步和发展。新的时代呼唤新的高素质的人才,呼唤教育有更多的创新和更大的发展。

在诸多教育中,数学教育具有特殊地位和作用。数学作为科学的“皇后”、一门具有丰富内容的知识体系,在其发展过程中,与其他学科交叉渗透,广泛应用,已成为科学发展的强有力的工具和原动力。数学以其特有的哲学属性,又是人们的思维训练的体操。正如美国国家研究委员会在一份名为《人人关心数学教育的未来》的专题报告中指出的,“数学提供了有特色的思考方式,包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断,以及运用符号,等等。它们是普遍适用并且强有力的思考方式。运用这些思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代日益重要的一种智力,它使人们能批判地阅读,能识别谬误,能探索偏见,能估计风险,能提出变通办法。数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界。”“数学在决定国家的各级人才的实力方面起着日益重要的作用。”同样的,数学是一种文化,一门艺术,同样可以为人们提供美的熏陶。多年来,我国高校的数学教育为了适应新形势,已经由以自然学科为主的部分专业扩展到包括人文社科专业在内的所有学科,课程建设和教学改革广泛而深入,硕果累累。

教材建设是教学改革的核心,为了进一步推动我国高等教育数学课程的建设,我们组织国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干编写并推出了“21 世纪大学公共数学系列教材”。系列教材的宗旨是,面向世界,面向未来,面向现代化,总结和巩固我国高等教育长期以来数学课程改革和教材建设的成果,更好地发挥数学教育的工具功能、数学素质教育功能、文化修养功能。

系列教材将涵盖理、工、医、农、经济学、管理科学、人文社科等多学科,在总体把握数学教育的功能定位的基础上,充分考虑不同学科的特点和需求,区分出不同层次和侧重点,并参照相关专业通行的教学大纲编写。例如,理、工学科的公共数学课同时是专业基础课,更要注重课程的工具功能,更强调与后续课程的有机衔接,而人文社科则更侧重于发挥其文化素质教育的功能。

系列教材力求将传统和创新相结合。相对而言,公共数学课程所涉及的内容一般属于较为成熟的数学知识体系,具有简洁、严谨和逻辑性强的特点。历史上也不乏具有这种风格特色、广受欢迎的教材。我们在借鉴和坚持传统优秀教材特色的同时,注意加入新的因素,主要目的是:使内容更能适应各个学科发展和创新的需要;使结构更加优化便于施教;使形式更为多样化、立体化,教学手段更为丰富。

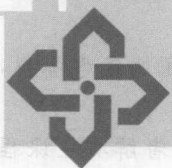
我们深知,一部好的数学教材不仅需要数学学科的深刻理解,而且要基于长期的教学实践的积累和锤炼,尤其是需要作者的专业水准和敬业精神。我们能有幸邀请到一批国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干参与编写工作,是难能可贵的,这也是我们能够推出高质量的系列教材的根本保证。

系列教材力求将传统和创新相结合。相对而言,公共数学课程所涉及的内容一般属于较为成熟的数学知识体系,具有简洁、严谨和逻辑性强的特点。历史上也不乏具有这种风格特色、广受欢迎的教材。我们在借鉴和坚持传统优秀教材特色的同时,注意加入新的因素,主要目的是:使内容更能适应各个学科发展和创新的需要;使结构更加优化便于施教;使形式更为多样化、立体化,教学手段更为丰富。

我们深知,一部好的数学教材不仅需要数学学科的深刻理解,而且要基于长期的教学实践的积累和锤炼,尤其是需要作者的专业水准和敬业精神。我们能有幸邀请到一批国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干参与编写工作,是难能可贵的,这也是我们能够推出高质量的系列教材的根本保证。

系列教材力求将传统和创新相结合。相对而言,公共数学课程所涉及的内容一般属于较为成熟的数学知识体系,具有简洁、严谨和逻辑性强的特点。历史上也不乏具有这种风格特色、广受欢迎的教材。我们在借鉴和坚持传统优秀教材特色的同时,注意加入新的因素,主要目的是:使内容更能适应各个学科发展和创新的需要;使结构更加优化便于施教;使形式更为多样化、立体化,教学手段更为丰富。

我们深知,一部好的数学教材不仅需要数学学科的深刻理解,而且要基于长期的教学实践的积累和锤炼,尤其是需要作者的专业水准和敬业精神。我们能有幸邀请到一批国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干参与编写工作,是难能可贵的,这也是我们能够推出高质量的系列教材的根本保证。



前言

本书是与“21 世纪大学公共数学系列教材”中的《线性代数》(胡金德编著)配套的学习辅导书。

该辅导书紧扣教材编写大纲,围绕基本概念、基本方法和基本计算,精心组织典型例题和习题,力求在帮助读者同步学习或期末复习或考研备考过程中发挥总结、答疑、解惑、提高的辅助功能。

本书每章由五部分内容组成。

一、知识结构与内容提要 知识结构:归纳总结了本章知识点的联系与逻辑结构,以及与后续各章的联系;内容提要:列出本章的基本概念、基本计算方法和公式,增强读者对这些内容的熟悉、理解和记忆,避免一些概念性的错误。学习内容提要后,即可直接阅读本书其他内容。

知识结构图列于每章之首,便于读者了解全章概貌,事实上更宜于在精读全章后再仔细回顾和品味,这将有助于读者达到我国著名数学家、教育家华罗庚先生倡导的“从厚到薄”的治学境界。

二、难点重点 说明本章学习中应注意的重点、难点,明确学习要求,其中有些也是考研的重点与难点。

三、典型例题解析 根据各章的知识点和问题类型的顺序安排典型例题分析的次序,通过各种典型例题的详尽分析,巩固和加深对基本概念的理解,增强知识间的相互联系,扩展和活跃解题思路,提高综合分析问题和应用所学知识解决问题的能力。

典型例题的选择以“助学”和“提高”为原则,采取从易到难、循序渐进、点面结合、前后联系的方法处理。其中既有对教材基本知识解读的基础题,也有历届硕士研究生入学考试中具有代表性和典型性的提高题;既有开拓思路、广泛联系的一题多解题,也有解题以后提出问题、推广引申、举一反三的思考题。

典型例题的形式以结合考研题型为主。有(1) 填空题(以基本计算为主), (2) 选择题(四选一,以基本概念为主), (3) 解答题(以概念性的计算题、综合题为主,还配备了一定数量的

证明题)。

四、综合练习题 为了使读者获得更多的解题能力的训练,也为了弥补教材中习题数量及广度和深度上的不足,本书每章都选编了一定数量的与“典型例题解析”搭配的习题,供读者练习。

五、综合练习题解答与提示 本书每章最后一部分提供了所有综合习题的参考答案,其中较难的习题还提供了提示或解题思路。

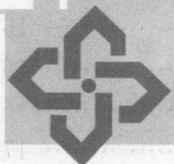
此外,在本书的最后,我们将配套教材中的全部习题作了解答,以帮助读者解决在课程学习中遇到的困难。

“解题可以认为是人最富有特征的活动。……解题是一种本领,就像游泳、滑雪、弹钢琴一样,你只能靠模仿与实践才能学会。……你想在解题中得到最大的收获,就应该在新做的题目中找到它的特征,那些特征在求解其他问题时,能起到指导作用。一种解题方法,若是经过你自己努力得到的,或是从别人那里学来的或听来的,只要经过自己的体验,那么对你来讲,它就是一种楷模,碰上类似的问题时,就成为你仿照的模型。”这是著名数学家、教育家乔治·波利亚(G. Polya)的一段名言,在这里和本书一起奉献给读者。引领读者到数学的海洋中去模仿,去实践,去体验。

由于编者水平所限,错误和不妥之处在所难免,欢迎广大读者批评指正。

编著者

2014年1月



目 录

第1章 行列式	1
一、知识与内容提要	1
二、难点重点	4
三、典型例题解析	5
四、综合练习题	27
五、综合练习题解答与提示	32
第2章 矩阵	34
一、知识与内容提要	34
二、难点重点	42
三、典型例题解析	43
四、综合练习题	75
五、综合练习题解答与提示	78
第3章 向量和线性方程组	82
一、知识与内容提要	82
二、难点重点	87
三、典型例题分析	87
四、综合练习题	118
五、综合练习题解答与提示	122
第4章 特征值、特征向量和相似矩阵	125
一、知识与内容提要	125
二、难点重点	128
三、典型例题解析	128

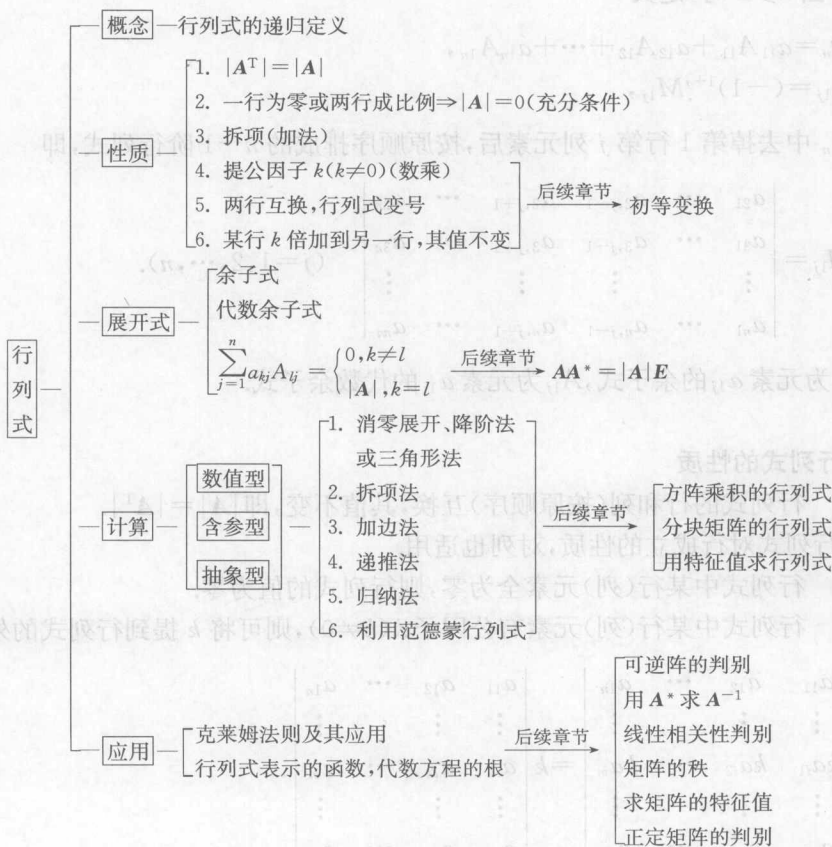
四、综合练习题	158
五、综合练习题解答与提示	161
第5章 二次型	167
一、知识结构与内容提要	167
二、难点重点	169
三、典型例题解析	170
四、综合练习题	190
五、综合练习题解答与提示	193
附录 《线性代数》习题解答	195

1	第一章 行列式
1	一、知识结构与内容提要
4	二、难点重点
5	三、典型例题解析
12	四、综合练习题
18	五、综合练习题解答与提示
42	第二章 矩阵
42	一、知识结构与内容提要
44	二、难点重点
48	三、典型例题解析
55	四、综合练习题
58	五、综合练习题解答与提示
82	第三章 向量
82	一、知识结构与内容提要
84	二、难点重点
88	三、典型例题解析
101	四、综合练习题
108	五、综合练习题解答与提示
132	第四章 线性方程组
132	一、知识结构与内容提要
134	二、难点重点
138	三、典型例题解析

第 1 章

行列式

一、知识结构与内容提要



(一) 行列式的定义

二阶行列式的定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式的定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

n 阶行列式的定义:

由 n^2 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$) 组成的 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式, 其中, a_{ij} ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$) 称为第 i 行第 j 列元素. 当 $n=1$ 时, $|a_{11}| = a_{11}$. 当 $n \geq 2$ 时, 定义

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$,

而 M_{1j} 是 D_n 中去掉第 1 行第 j 列元素后, 按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式, 即

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

我们称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的余子式, A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式.

(二) 行列式的性质

性质 1 行列式的行和列(按原顺序)互换, 其值不变, 即 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$.

由此, 行列式对行成立的性质, 对列也适用.

性质 2 行列式中某行(列)元素全为零, 则行列式的值为零.

性质 3 行列式中某行(列)元素有公因子 k ($k \neq 0$), 则可将 k 提到行列式的外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

等式从右到左是 k 乘行列式, k 乘行列式 = k 乘行列式的某一行(列), $k \textcircled{i}$ 表 k 乘第 i 行, $k[j]$ 表 k 乘第 j 列.

性质 4 行列式中某行(列)元素均是两个元素之和, 则行列式可拆成两个行列式之和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 行列式中两行(列)互换, 行列式的值反号. $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$ 表示第 i 行与第 j 行互换, $[i] \leftrightarrow [j]$ 表示第 i 列与第 j 列互换.

性质 6 行列式中某两行(列)元素对应相等或对应成比例, 则行列式的值为零.

性质 7 行列式某行(列)的 k 倍加到另一行(列), 行列式的值不变. $\textcircled{i} + k\textcircled{j}$ 表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行, $[i] + k[j]$ 表示第 j 列的 k 倍加到第 i 列.

(三) 行列式的展开定理

(1) **余子式**: 在行列式 $|A|$ 中, 去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列, 由剩下的元素按原来的位置顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记成 M_{ij} , 即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) **代数余子式**: 带有正负号 $(-1)^{i+j}$ 的余子式称为元素 a_{ij} 的代数余子式, 记为 A_{ij} , 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

M_{ij}, A_{ij} 与 a_{ij} 的大小、正负无关, 与 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素无关, 而与其他元素有关.

(3) 行列式的展开公式:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj} \quad (j=1, 2, \cdots, n),$$

且有

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad i \neq k,$$

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, \quad j \neq k.$$

故

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n.$$

(四) 克莱姆法则

(1) 克莱姆法则: 若 n 个方程 n 个未知量构成的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 则方程组有唯一解, 且

$$x_i = |\mathbf{A}_i| / |\mathbf{A}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

其中, $|\mathbf{A}_i|$ 是 $|\mathbf{A}|$ 中第 i 列元素 (即 x_i 的系数) 替换成方程组右端的常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 所构成的行列式.

(2) 推论: 若包含 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 则方程组有唯一零解.

反之, 若齐次线性方程组有非零解, 则其系数行列式 $|\mathbf{A}| = 0$.

二、难点重点

行列式在线性代数中有广泛应用. 行列式的逆序定义是学习本章的难点, 本书回避了逆序定义而采用递归定义, 但还是希望读者对逆序定义有所了解. 了解行列式的定义应抓住以下三条:

(1) n 阶行列式全部展开式总共有 $n!$ 项.

(2) 每项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积, 并冠以正号或负号, 且正项项数和负项项数各占一半.

(3) 行列式的值是一个数, 若行列式元素中引入参数或未知量, 则成为函数.

利用定义、性质、展开定理计算行列式或判别行列式是否为零是本章的重点. 计算行列

式有很多方法和技巧,充分理解行列式的性质、展开定理是计算行列式的基础.

对三、四阶行列式的计算要求准确、熟练,除掌握定义、性质、展开定理外,还要求针对具体的行列式的特点、元素的规律性,采用适当的方法,要不断总结经验,提高分析和运算能力.

对 n 阶行列式的要求应适度,本章的部分习题与后续章节有关,且采用了后续章节的符号,这部分习题可以等到后续各章讲解以后再学习或练习.

克莱姆法则在理论上是重要的. 克莱姆法则关于齐次方程组的两个推论其实都是充分必要条件,也是重要结论.

三、典型例题解析

(一) 行列式定义

例 1.1 一个 n 阶行列式,全部展开后,共有多少项? 每项是怎样组成的? 其中正项项数、负项项数各是多少?

解 n 阶行列式全部展开后,共 $n!$ 项,因 D_n 由定义按第 1 行展开,共 n 项,即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, \quad (*)$$

其中, A_{1j} ($j=1, 2, \dots, n$) 是元素 a_{1j} 的代数余子式,是带正负号的 $n-1$ 阶行列式,再由定义将 A_{1j} 按第 1 行展开,则上述 n 项中每一项都可展开成 $n-1$ 项,且每一项中有一个 $n-2$ 阶代数余子式,即共有 $n(n-1)$ 项, ..., 如此继续展开,共有 $n!$ 项.

n 阶行列式的全部展开式的 $n!$ 项中,每项均由取自不同行不同列的 n 个元素的乘积组成,由式 (*) 知, D_n 按第 1 行展开后的 n 项是 $a_{1j}A_{1j}$ ($j=1, 2, \dots, n$). 因 A_{1j} 中不含 D_n 的第 1 行和第 j 列元素,故包含 a_{1j} 的项不会再有第 1 行的元素和第 j 列的元素. 类似地继续展开,直到最后, D_n 的全部展开式的 $n!$ 项中,每一项是 n 个元素的乘积,且 n 个元素取自不同的行、不同的列.

全部展开式中正项项数、负项项数各占一半,这是因为前面的展开式中无论正负号是如何定的,展开到二阶行列式时,共有 $\frac{n!}{2}$ 项,设其中正项为 k 项,则负项为 $\frac{n!}{2} - k$ 项,由于二阶行列式展开后是两项,一项为正,一项为负,则全部展开式中:

$$\text{正项项数为 } k + \left(\frac{n!}{2} - k\right) = \frac{n!}{2} \text{ 项};$$

$$\text{负项项数也是 } k + \left(\frac{n!}{2} - k\right) = \frac{n!}{2} \text{ 项}.$$

正项项数、负项项数各占一半.

例 1.2 一个 n 阶行列式中,等于零的元素个数多于 $n^2 - n$, 证明该行列式为零.

证明 根据行列式的定义,全部展开后是 $n!$ 项的代数和,而每一项均是来自不同行不

同列的 n 个数的乘积, 因 n 阶行列式共有 n^2 个元素, 其中等于 0 的元素个数多于 $n^2 - n$ 个, 则不等于零的元素个数少于 n 个, 从而该行列式的全部展开式的每项中至少有一个元素是零, 故每项都是零, 则行列式等于零。

例 1.3 证明

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = 0.$$

证明 直接利用定义按第 1 行展开计算, 得

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} - a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(二) 简单行列式计算

主对角线、左下三角形、右上三角形行列式的值, 由定义直接逐次展开可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

同理, 副对角线、左上三角形、右下三角形行列式的值由定义直接展开可得

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

注意: (1) 并非行列式中副对角线元素连乘积这一项总是取负号, 而应是当 $n=2, 3, 6, 7, \dots$ 时取负号, 当 $n=4, 5, 8, 9, \dots$ 时取正号。

(2) 若能将某行列式通过性质化成上述行列式的若干倍, 则该行列式的值的计算即已

完成.

1. 两条线的行列式的计算

例 1.4 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

解 按第 1 列展开

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{1+n} b_1 b_2 \cdots b_n.$$

例 1.5 计算行列式:

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

解 直接展开计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} + b_1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\
 &= a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 b_2 b_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4 - b_1 a_2 a_3 b_4.
 \end{aligned}$$

评注 注意

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \neq a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4,$$

不要当作二阶行列式计算. 展开式共有 4 项且副对角线元素乘积的那一项取正号.

2. 三条线的行列式的计算

例 1.6 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

解 将第 2, 3, ..., n 列乘 -1 加到第 1 列, 将 D_n 化成上三角形行列式计算:

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow{[1] - \sum_{i=2}^n [i]} \begin{vmatrix} 1 - \sum_{i=2}^n i & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \\
 &= \left(2 - \frac{n(n+1)}{2}\right) n!.
 \end{aligned}$$

评注 本题除第 1 行、第 1 列及主对角线三条线的元素非零外, 其余元素都是零, 这类行列式我们称之为爪形行列式. 在行列式计算中, 利用性质若能将行列式化成爪形行列式, 则该行列式的计算基本上已完成, 后面只要仿照本题再化成三角形行列式即可.

例 1.7 计算行列式:

$$D_4 = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 + x \end{vmatrix}.$$

解 方法一 按第 4 行展开