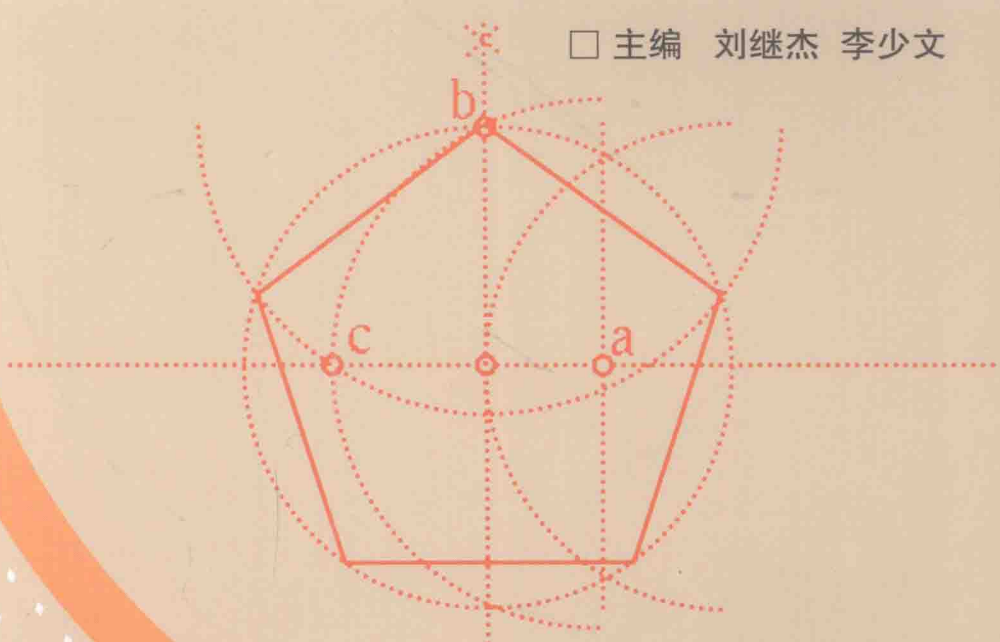
全国高职高专教育“十一五”规划教材

工科应用数学

Engineering Applied Mathematics

上册

□ 主编　刘继杰　李少文



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育“十一五”规划教材

工科应用数学

Gongke Yingyong Shuxue

（上册）

主　编　刘继杰　李少文
副主编　张玉吉　王永旭　丁　琳
　　　　闫海波　陈　晖

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本教材以教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》和《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为指导，以“应用为目的，专业够用为度，学有所需，学有所用”的定位原则，在充分研究了当前我国高职教育现状的基础上编写而成。本教材旨在培养和造就高职院校学生可持续发展的职业能力和迁移能力、全面提升学生的素质。

全书分为上、下两册，共12章。上册主要内容为函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分，下册主要内容为常微分方程、无穷级数、行列式与矩阵、向量与空间解析几何、拉普拉斯变换、离散数学基础、二元函数微积分学。

本书可作为高职高专院校理工类专业的数学基础课教材，也可作为成人高校及其他职业学校的参考教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工科应用数学．上册／刘继杰，李少文主编．—北京：高等教育出版社，2010．8

ISBN 978-7-04-030824-2

Ⅰ．①工… Ⅱ．①刘…②李… Ⅲ．①应用数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ．①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第149491号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 邓雁城 **市场策划** 吕明华 **封面设计** 张申申
版式设计 余 杨 **责任校对** 俞声佳 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京东光印刷厂		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2010年8月第1版
印　　张	10	**印　　次**	2010年8月第1次印刷
字　　数	240 000	**定　　价**	15.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　30824－00

前　言

本教材编写时特别注重了以下几点：

一、通过教材优化教学内容和体系，加强应用性。从各专业后继课程的需要和社会的实际需求出发来考虑和确定教学内容和体系，强化应用意识和能力的培养，注重了数学思想和数学方法在实际生活中的应用，每章后面都设有数学应用实例，为培养学生理论联系实际、用数学思想去思考和解决实际问题的能力提供了生动的实例，从而拓宽知识面并激发学生学习兴趣。

二、教材结构设计科学合理，适合高职高专人才培养目标和工科类专业学生的实际水平及专业需求。以学科体系序化，打破以往学科本位强调学科体系的完整性、系统性的思想，理论上适度够用，去除繁冗，理论推导和证明以解释清楚有关结论为度，知识点表达设计明确，课程内容设计理念新颖；深度适宜，便于教师教学和学生学习。另外在高职高专中有部分对口学生，有些知识在职高学校中没学，为此教材在第 1 章中编排了函数概念与性质、初等函数、反函数（含反三角函数）等内容为后继学习打好基础。

三、本书分上下两册，两个学期学完。上册包括函数极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分，需要 68 学时左右。下册包括常微分方程、无穷级数、行列式与矩阵、向量与空间解析几何（制造类）、拉普拉斯变换（电气电子类）、离散数学（计算机类）、二元函数微积分学（选学），需要 72 学时左右。第一学期重视高等数学的基础内容，着重培养学生分析问题解决问题的能力，第二学期课程内容体现专业特点，分制造类、电气电子类和计算机类，采用模块化教学，专业教学针对性更强。

四、重视数学实验，每章都有实验内容。注重培养学生用计算机和数学软件求解数学模型的实际应用能力，让学生充分认知现代工具的快捷性和实用性。

五、精选例题练习题，题型多样化，每节配有思考题、练习题，每章还配有综合练习题。考核形式和指标多元灵活。

本书上册由刘继杰、李少文任主编，张玉吉、王永旭、丁琳、闫海波、陈晖任副主编。下册由刘继杰、白淑岩任主编，刘春光、于俊梅、刘欣、孙晓琳、单国莉任副主编。具体编写任务：第 1 章　刘继杰；第 2 章　张玉吉；第 3 章　王永旭；第 4 章　闫海波；第 5 章　李少文；第 6 章　白淑岩；第 7 章　于俊梅；第 8 章　刘继杰；第 9 章　单国莉；第 10 章　刘春光；第 11 章　刘欣；第 12 章　孙晓琳。每章的应用实例由丁琳编写；每章的数学实验由陈晖编写。

全书的结构安排、总撰由刘继杰承担，全书统稿由刘继杰、李少文承担。本书编写得到了徐森林教授的指导，在此表示衷心感谢。

由于水平所限，书中不当之处敬请读者和同仁给予批评指正。

编者

2010 年 6 月

目　　录

第1章　函数与极限

高等数学可以说是变量数学,它的研究对象、研究方法与初等数学相比都有相当大的差异.它的主要研究对象是函数,它的主要内容是微积分学,它的主要手段是以极限为工具、并在实数范围内研究函数的变化率及其规律性,从而产生微积分的基本概念及性质.本章主要学习函数的概念及其基本性质、初等函数、反函数、数列与函数的极限及运算、连续函数的概念等知识,为进一步学好函数的微积分打下一个良好的基础.

1.1　函数的概念与性质

1.1.1　函数的概念

我们先观察下面例子:

一个圆柱的玻璃杯,底面积为 15 cm^2,杯子的高是 10 cm,设杯中水的高为 h cm,水的体积为 V cm^3,请用给出的条件表示水的体积 V.

答案是:$V = 15\text{ h}$.

显然,当 h 改变时,V 就会随之改变,其中 h 的取值范围是:$0 \leqslant h \leqslant 10$(或 $h \in [0,10]$).

在本例中,h 和 V 都是变量.我们不妨分别用 x 替换 h、用 y 替换 V,那么关系式将会写作:$y = 15x, x \in [0,10]$.这就是函数关系.

1837 年,德国数学家狄利克雷(Dirichlet,1805—1859)抽象出了易于被人们接受、并且较为合理的函数定义.

1. 函数的定义

定义 1　设有两个变量 x 和 y,如果当变量 x 在某一实数范围 D 内任意取定一个数值时,按照一定的对应关系 f,变量 y 有唯一确定的值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记作

$$y = f(x), \quad x \in D$$

其中 x 叫做自变量,y 叫做因变量,自变量的取值范围 D 叫做函数的定义域.

对于确定的 $x_0 \in D$,函数 $y = f(x)$ 所对应的 y 的值叫做当 $x = x_0$ 时函数 $y = f(x)$ 的函数值,记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

全体函数值构成的集合叫做函数的值域,记作 M.

2. 函数的两要素

由函数的定义,把定义域和对应关系称为函数的两个要素.

两函数相同的充分必要条件是其定义域与对应关系分别相同.

例 1 判断下列函数是否是同一个函数.

(1) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2\ln x$; (2) $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$;

(3) $y = x$ 和 $s = t$.

解 (1) 函数 $y = \ln x^2$ 与 $y = 2\ln x$, 它们的定义域不同,所以它们是不同的函数.

(2) 函数 $y = x$ 和 $y = \sqrt{x^2}$, 它们的定义域相同,都是实数集 R,但因为

$$y = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, x \geqslant 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

显然,只有当 $x \geqslant 0$ 时,它们的对应关系才相同,所以这是两个不同的函数.

(3) 函数 $y = x$ 和 $s = t$, 它们的定义域和对应关系分别相同,所以它们表示的是同一个函数.

1.1.2 函数的表示方法

表示函数的方法,最常用的有三种:解析法、列表法和图像法.

1. 解析法

解析法也称公式法,是用数学公式(表达式)表示函数自变量和因变量之间的对应规则,它有显式、隐式和参数式之分,分别例如:$y = 2 + 3x$、$e^x + xy + \sin x = 0$、$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

2. 列表法

列表法是把自变量及相应的函数值用表格的形式体现出其对应规则.例如平方根表、三角函数表、对数表、利息表和许多会计报表等都是用列表法表示函数自变量和因变量之间的对应关系.

3. 图像法

图像法是指在坐标系中,用图形来表示函数自变量和因变量之间的对应关系.

如 $y = |x|$ 用图像法可以表示为图 1.1.

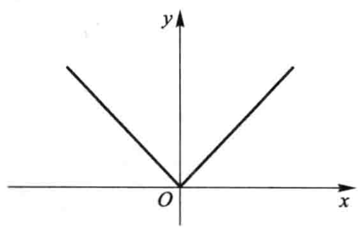


图 1.1

1.1.3 函数的定义域

求函数的定义域时,应当注意两个原则:一是在考虑实际问题时,应根据问题的实际意义来确定函数的定义域.二是对于用数学式子表示的函数,它的定义域应由函数表达式本身来确定,即要使表达式有意义.

例 2 求函数 $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x}} + \lg(3x+1)$ 的定义域.

解 要使函数有意义,须满足:$\begin{cases} 1 - x > 0, \\ 3x + 1 > 0. \end{cases}$ 解得:$-\dfrac{1}{3} < x < 1$. 用区间表示为 $\left(-\dfrac{1}{3}, 1\right)$,即函数的定义域是:$\left(-\dfrac{1}{3}, 1\right)$.

1.1.4 函数的性质

1. 单调性

定义 2 若对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**，区间 I 称为**单调增区间**；若当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调减少**，区间 I 称为**单调减区间**；单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

单调区间可以是函数的整个定义域，也可以是定义域的一部分. 例如，函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的单调区间 $(-\infty, +\infty)$ 是它的定义域. 而对于函数 $y = x^2$，在 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的，在 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的，所以它的单调区间是 $(-\infty, 0)$ 和 $[0, +\infty)$，而在整个定义域内是不单调的.

2. 奇偶性

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任意 $x \in D$，都有 $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**；如果 $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.

注 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

3. 周期性

定义 3 设函数 $f(x)$，如果存在一个正数 T，使得对于定义域 D 内的每一个 x，有 $(x \pm T) \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ **的周期**. 周期函数的周期可能有无数多个，如 $y = \sin x$ 的周期是 $2k\pi(k \in \mathbf{Z})$，我们把其中最小的正数称为**最小正周期**.

注 我们说的周期函数的周期通常是指最小正周期.

例如，函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的周期为 2π；函数 $y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 周期为 π；函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 周期为 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

4. 有界性

定义 4 设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义，若存在正数 M，对于 D 上任意的 x，都有 $|f(x)| \leq M$，则称 $f(x)$ 在区间 D 上**有界**.

例如，函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内和函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内都是有界的；而函数 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内和函数 $y = \tan x$ 在区间 $\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right), (k \in \mathbf{Z})$ 内都是无界的，但函数 $y = x^3$ 在区间 $(1, 2)$ 内则是有界的，函数 $y = \tan x$ 在区间 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内仍是无界的.

例 3 若函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围.

解 函数在 $(-\infty, 1-a)$ 上单调递减，而函数在区间 $(-\infty, 4]$ 上是减函数

所以 $1 - a \geq 4$，解得：$a \leq -3$.

思考题 1.1

1. 哪个函数既是奇函数又是偶函数？

2. 周期函数一定有最小正周期吗?

3. 画 $y=|\tan x|$ 的图像,写出它的最小正周期.

练习题 1.1

1. 下列各题中所给的两个函数是否相同? 为什么?

(1) $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$; (2) $y=x$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$;

(3) $y=1-x$ 和 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x}$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{(x+1)^0}{|x|-x}$; (2) $f(x)=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$;

(3) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ -x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4;\end{cases}$ (4) $y=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $\varphi(x)=x\sin x$; (2) $f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$;

(3) $f(x)=e^x-e^{-x}$; (4) $f(x)=\sin x+\cos x$.

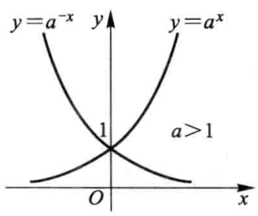
4. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减,若 $a=f(-1)$, $b=f\left(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}\right)$, $c=f(\lg 0.5)$, 判断 a、b、c 的大小关系.

1.2 初等函数

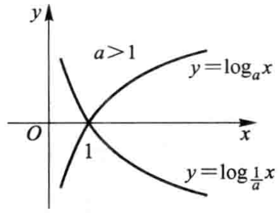
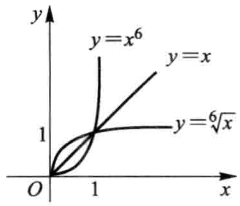
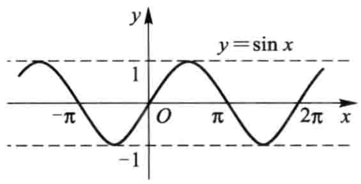
1.2.1 基本初等函数

1. 最常用的五种函数是:指数函数、对数函数、幂函数、三角函数和反三角函数,统称为基本初等函数. 反三角函数放在反函数一节讲. 基本初等函数的表达式、图形、性质总结如下表:

表 1.1

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y=a^x(a>0,a\neq 1)$		a):不论 x 为何值,y 总为正数,并过 $(0,1)$ 点; b):当 $a>1$ 时,在区间 $(0,+\infty)$ 内的值大于 1;在区间 $(-\infty,0)$ 内的值小于 1;在定义域内单调增.

续表

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
对数函数	$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$		a):其图形总位于 y 轴右侧,并过(1,0)点 b):当 $a>1$ 时,在区间(0,1)内的值为负;在区间(1,+∞)内的值为正;在定义域内单调增.
幂函数	$y=x^a$ (a 为任意实数)	这里只画出部分函数的一部分图形.	令 $a=m/n$ a):当 m 为偶数 n 为奇数时,y 是偶函数; b):当 m,n 都是奇数时,y 是奇函数; c):当 m 为奇数 n 为偶数时,y 在$(-\infty,0)$内无意义.
三角函数	$y=\sin x$(正弦函数) 这里只写出正弦函数一种		a):正弦函数是以 2π 为周期的周期函数 b):正弦函数是奇函数且 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$

2. 任意角的三角函数

(1) 定义:设角 α 起边为 x 轴, $P(x,y)$ 是角 α 终边上的任意一点,且 $\lvert PO\rvert=r(r\neq 0)$,则有

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}\qquad\cos\alpha=\frac{x}{r}\qquad\tan\alpha=\frac{y}{x}$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}\qquad\csc\alpha=\frac{r}{y}\qquad\cot\alpha=\frac{x}{y}$$

表 1.2 三角函数

函数名称	函数记号	定义域	值域	周期	奇偶性
正弦	$y=\sin x$	全体实数 **R**	$[-1,+1]$	2π	奇
余弦	$y=\cos x$	全体实数 **R**	$[-1,+1]$	2π	偶
正切	$y=\tan x$	$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\}$	**R**	π	奇
余切	$y=\cot x$	$\{x\mid x\neq k\pi\}$	**R**	π	奇

(2) 同角三角函数的基本关系

倒数关系 $\begin{cases}\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1\\ \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1\\ \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1\end{cases}$ 平方关系 $\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha\\ 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha\end{cases}$

商的关系 $\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$

倒数关系——三条对角线(图 1.2 中每条对角线两端的函数成倒数关系);

平方关系——三个倒三角形(图 1.2 中阴影所示)(倒三角形中,上边两顶点的函数的平方和等于下边顶点上函数的平方).

商的关系——图 1.2 中正六边形任何一顶点的函数等于它的相邻两顶点处的函数之积.

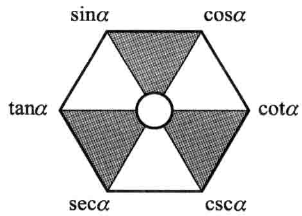


图 1.2

例 1 已知 $\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}+\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}=\cos 2\theta\left(\theta\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$,求 θ 的取值范围.

解 由已知可得:$\begin{cases}\cos\theta>0,\\ \sin\theta<0,\end{cases}$ 所以 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\theta<2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$

1.2.2 复合函数

定义 若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D,而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 M,若 M 与 D 的交集非空,则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数,称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数. 记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为中间变量,x 为自变量.

注 并不是任意两个函数都能复合.

如函数 $y=\sqrt{u}$ 与函数 $u=-x^2-1$ 是不能复合成一个函数的.

复合函数还可以由更多函数构成.

例如,$y=\cos^2 3x$ 可以看成是由三个函数 $y=u^2,u=\cos v,v=3x$ 复合而成的;

利用复合函数的概念可以将一个较复杂的函数分解成几个简单函数,这样对复杂函数的研究可以变成对简单函数的研究,使问题得到简化.

例 2 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=\ln(2+\cos x)$; (2) $y=\sqrt{\sin\dfrac{x}{2}}$;

(3) $y=\ln\tan^2(1+x^2)$; (4) $y=\mathrm{e}^{\cos\sqrt{2x-1}}$.

解 (1) $y=\ln(2+\cos x)$ 是由 $y=\ln u,u=2+v,v=\cos x$ 复合而成的;

(2) $y=\sqrt{\sin\dfrac{x}{2}}$ 是由 $y=\sqrt{u},\ u=\sin v,v=\dfrac{x}{2}$ 复合而成的;

(3) $y=\ln\tan^2(1+x^2)$ 是由 $y=\ln u,u=v^2,v=\tan w,w=1+x^2$ 复合而成的;

(4) $y=\mathrm{e}^{\cos\sqrt{2x-1}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u,u=\cos v,v=\sqrt{w},w=2x-1$ 复合成的.

1.2.3 初等函数

由基本初等函数与常数经过有限次的有理运算及有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表出的函数称为初等函数.

例如：$y = \log_a \cos x^2$、$y = \dfrac{1 + x + e^x}{\sqrt{1 - x^2}}$、$y = e^{-x} + \dfrac{\tan 3x}{x^2}$等，都是初等函数. 分段函数虽然在每一段上可以用一个数学表达式表示，但总体上（定义域上）它不能用一个表达式表示，所以它不是初等函数，但 $y = |x|$ 是初等函数.

思考题 1.2

1. 两个函数能够复合成一个复合函数的条件是什么？试举例说明.
2. 画出余弦、正切、余切函数的图像，并思考它们具备什么性质.

练习题 1.2

1. 若 $\log_a(a^2 + 1) < \log_a 2a < 0$，求 a 的取值范围.
2. 已知 $y = \log_a(2 - ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的减函数，求 a 的取值范围.
3. 求 $\sin x > \dfrac{1}{2}$ 的 x 的取值范围.
4. 把下列复合函数分解为简单函数.

(1) $y = 2^{\cos x}$；　　(2) $y = \lg\sqrt{x^2 + 2}$；

(3) $y = \sin^3 \ln(x + 1)$.

5. 设 $f(x) = x^2$，$\varphi(x) = 2^x$，求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.
6. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求 $f(\ln x)$ 的定义域.

1.3 反　函　数

1.3.1 反函数

1. 反函数的定义：设有单调函数 $y = f(x)$，定义域为 D，值域为 C. 若变量 y 在函数的值域 C 内任取一值 y_0 时，变量 x 在函数的定义域 D 内必有一值 x_0 与之对应，即 $f(x_0) = y_0$，那么变量 x 是变量 y 的函数. 这个函数用 $x = f(y)$ 来表示，称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**. 记作 $y = f^{-1}(x)$，$(x \in C)$.

2. 反函数的存在定理：在定义域上具有单调性的函数有反函数.

3. 反函数的定义域、值域分别是原函数的值域、定义域.

4. 在同一坐标平面内，$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的.

如：函数 $y = 2^x$ 与函数 $y = \log_2 x$ 互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y = x$ 对称的. 如图 1.3 所示.

例1 求函数 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, 得 $x=\dfrac{2y+2}{y-1}$, 因此函数 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ 的反函数为 $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$.

例2 若 $(2,1)$ 既在 $f(x)=\sqrt{mx+n}$ 的图像上,又在它的反函数图像上,求 m,n 的值.

解 由题意知: $1=\sqrt{2m+n}$ 且 $2=\sqrt{m+n}$, 解得: $\begin{cases} m=-3, \\ n=7. \end{cases}$

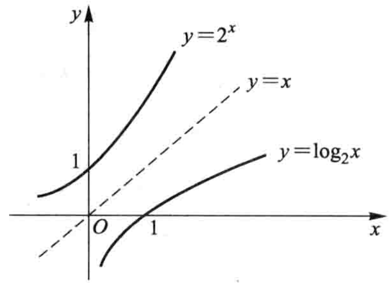


图 1.3

1.3.2 反三角函数的概念、图形和性质

1. 正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为反正弦函数,记作 $y=\arcsin x$, 其定义域为 $[-1,1]$,值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, 图像如图 1.4.

性质如下:

奇偶性:奇函数(关于原点对称)即任意 $x\in[-1,1]$, $\arcsin(-x)=-\arcsin x$;

单调性:在 $x\in[-1,1]$ 上递增.

周期性:不是周期函数.

有界性:在 $x\in[-1,1]$ 上有界.

2. 余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的反函数称为反余弦函数,记作 $y=\arccos x$, 其定义域为 $[-1,1]$,值域为 $[0,\pi]$, 图像如图 1.5.

性质如下:

奇偶性:偶函数(关于 y 轴对称)即任意 $x\in[-1,1]$, $\arccos(-x)=\arccos x$;

单调性:在 $x\in[-1,1]$ 递减.

周期性:不是周期函数.

有界性:在 $x\in[-1,1]$ 有界.

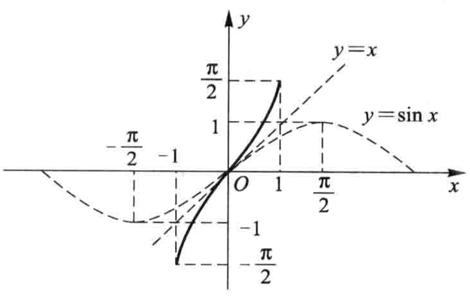


图 1.4

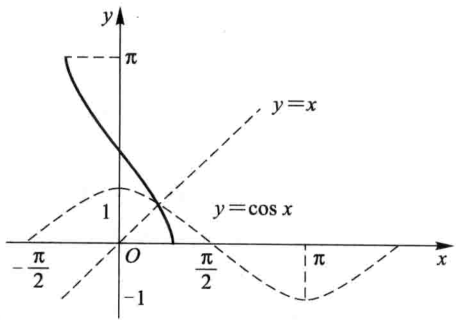


图 1.5

3. 正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数称为反正切函数，记作 $y=\arctan x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，在定义域内为单调递增函数（图 1.6）.

余切函数 $y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 内的反函数称为反余切函数，记作 $y=\operatorname{arccot} x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，在定义域内为单调递减函数（图 1.7）.

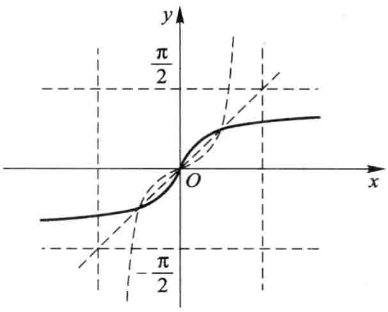


图 1.6

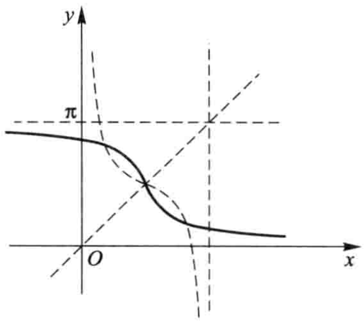


图 1.7

例 3 用反正弦函数值的形式表示下列各式中的 x.

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{5}, x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$；　　(2) $\sin x=-\frac{1}{4}, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；

解 (1) $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$\pi-x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\sin(\pi-x)=\sin x=\frac{\sqrt{3}}{5}$，

故 $\pi-x=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{5}$，则 $x=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{5}$.

(2) $x=\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)=-\arcsin\frac{1}{4}$.

例 4 求 $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)$ 的值.

解 设 $x=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，则 $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ 且 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，则 $\sin x=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

思考题 1.3

1. 函数 $y=x^2$ 存在反函数吗？为什么？
2. $\sin(\arcsin x)=x$ 是否成立？
3. x 为何值时 $\arcsin(\sin x)=x$？
4. 当 $x\in[-1,1]$ 时，$\arcsin x+\arccos x=$？

练习题 1.3

1. 函数 $y=x^2+4x\ (x\geqslant a)$ 有反函数，求 a 的最小值. 并求出此时的反函数.
2. 设 $f(x)=4^x-2^{x+1}$，求 $f^{-1}(0)$.

3. 求函数 $y = \dfrac{2x}{1+x}(x \in (-1, +\infty))$ 图像与其反函数图像的交点坐标.

4. 求函数 $y = 2\arcsin(5-2x)$ 的定义域和值域.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y = \sin x, x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$; (2) $y = \arcsin x, x \in [0,1]$.

6. 已知 $\arcsin x \geqslant \arcsin(1-x)$, 求 x 的取值范围.

7. 求下列各式的值.

(1) $\tan\left[\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]$; (2) $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5}\right)$;

(3) $\sin\left[\arctan\dfrac{12}{5}-\arcsin\dfrac{3}{5}\right]$; (4) $\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{3}$.

1.4 极限的概念

1.4.1 数列的极限

1. 数列及其变化趋势

定义 1 以正整数 n 为自变量的函数 $a_n = f(n)$, 把它的函数值按自变量 n 依次增大的顺序写出来:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

这样的一列数称为无穷数列,简称数列,记为 $\{a_n\}$. 数列里的每一个数称为数列的项, $a_n = f(n)$ 称为数列的第 n 项,也称为一般项或通项. 例如:

$$1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots \tag{1}$$

$$1, 0, 1, 0, \cdots, \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}, \cdots \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots \tag{4}$$

$$1, 2\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{4}, \cdots, 2+\frac{(-1)^n}{n}, \cdots \tag{5}$$

都是数列.

对于每一个无穷数列,我们可以分析其变化趋势. 如上面(4)中

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 的变化趋势如何? 趋势是越来越少,可以想象当 n 无限增大时, $\dfrac{1}{2^n}$ 无限趋近于 0. 这个例子反映了一类数列的共同特性——收敛性. 这就是我们要讨论的数列的极限问题.