普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数简明教程

第二版

陈维新/编著

科学出版社

www.sciencep.com

线性代数简明教程

第二版

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数简明教程

（第二版）

陈维新　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书采用学生易于接受的方式科学、系统地介绍了线性代数的行列式，线性方程组，矩阵，向量，向量空间，矩阵的特征值和特征向量，二次型等内容. 强调适用性和通用性，兼顾先进性. 本书起点低，坡度适中，简洁明白，适于自习. 全书涵盖了考研的数学考试大纲有关线性代数的所有内容. 习题按小节配置，量大题型多，书后附有答案. 各章末有概要及小结，便于学生深入理解书中内容.

本书读者对象为高等院校理工、经管、医药、农林等专业的大学生和教师，也可作为自学考试、报考硕士研究生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程/陈维新编著. —2版. —北京:科学出版社，2007
普通高等教育"十一五"国家级规划教材
ISBN 978-7-03-014236-8

Ⅰ. 线… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 008359 号

责任编辑:姚莉丽/责任校对:张 琪
责任印制:张克忠/封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2008 年 1 月第 二 版 印张:15
2010 年 6 月第十六次印刷 字数:278 000
印数:81 001—88 000

定价: 20.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

一、缘起

提及缘起，作者要衷心感谢加拿大 Alberta 大学贾荣庆教授. 蒙其厚谊，作者有幸作为访问教授在 Alberta 大学做研究工作. 在此期间(2001 年 5 月至 8 月)，有机会阅读了北美(美国、加拿大)大学 20 世纪 90 年代直至最近通用的一系列线性代数教材，感到国外教材确有特色，颇多启迪，得益匪浅. 回国后又见到国内新出版的一些线性代数教材，也很受启发. 于是萌发对本书的第一版作修订的想法，以面向 21 世纪中国高等教育大众化. 所参考的主要国内外最近教材已列入文献[8]～[13].

二、探索

第二版主要体现在下面两个方面：

1. 加强基本概念和应用的阐述. 对概念引入的背景力求具体、形象，论述力求简明. 对应用给予更多的重视，在第 2 章和第 3 章中增加了许多实例. 希望借此使读者对线性代数的概念(或方法)是怎么来的，有什么用，有更多的了解.

2. 为适应不同要求的读者，第二版编写成模块式. 如第一版的向量空间一章现在就分成两章：第 4 章向量和第 5 章向量空间，这样即使略去第 5 章也不影响本书后两章的学习. 又如将第 4 章的"向量组的极大线性无关组与向量组的秩"分成基本要求和进一步理论阐述两块，前一块即以 4.3 节作为正文，而后一块放在附录四，作为酌情选讲内容. 同时进一步降低起点，以便更好地和中学代数接轨. 在不影响全书最终达到的高度和深度的前提下，删去了一些枝节和理论证明，并删去三个附录(原附录三，六，七). 按此想法第二版的各章与第一版的各章相比都作了增删.

三、使用建议

本书适用于学时数从 34 到 50 的线性代数课程教学.

1. 凡管理类、经济类学生，或是硕士研究生入学考试考数学二，数学三的读者可略去第 5 章. 为了要讲 6.4 节仅需介绍实向量的内积、长度、正交等概念. 再讲一下用施密特正交法把一组线性无关实向量组改造成两两正交的单位向量组即可.

2. 凡理工类学生，或硕士研究生入学考试考数学一的读者需学完全书.

3. 本书正文中凡用仿宋体排印的内容和打 * 号的习题不作基本要求.

4. 凡有志于考研的读者除学习上述基本内容外，建议学习有关正文中用仿宋体排印的内容和附录一至附录四，并做打 * 号的习题.

与本书配套的《线性代数简明教程教师用盘》也制作完成，该光盘内容包括PPT课件、习题全解、考试样卷，为本书的教学提供了有力的支持.

四、鸣谢

浙江大学宁波理工学院院长俞庆森教授及许为民教授十分关心支持作者修订本教材，希望本书能为培养高层次应用型人才服务，因此本书的修订有幸列为浙江大学宁波理工学院首批课程建设项目，得到教改基金资助. 宁波理工学院教务处、基础部等部门诸多领导对本教材的修订、使用各个方面给予帮助和支持. 科学出版社姚莉丽同志大力支持使本书第二版和教师用盘得以面世. 对此作者一并表示衷心的感谢！

本书第二版的初稿于 2002 年 6 月完成，并在浙江大学宁波理工学院内部试用，经教学实践，又先后写出第二稿和第三稿，也均在浙江大学宁波理工学院内部试用，并广泛征求同行的意见，而后再进行修订. 李昌兴(西安邮电大学)、李胜宏、陈道琦、陈永华、龚乐春、单鉴华、董烈钊、何延、陈锦辉、涂黎晖、王聚丰、魏麒等提出许多宝贵意见，作者对此深表感谢.

本书虽经多次讲用反复修改，然而限于作者水平，不足之处殷切期望读者不吝赐教.

陈维新

2007 年 12 月

浙江大学求是村

浙江大学宁波理工学院

第一版前言

线性代数是大学理、工、经管、医、农等学科所有专业必修的一门重要数学基础课.它作为离散性数学在工科数学中的代表,随着计算机科学日新月异的发展,许多非线性问题高精度地线性化与大型线性问题的可计算性正在加快逐步实现,因此无论从理论上还是从应用上看,线性代数的地位更趋重要.美国数学及其应用联合会(COMAP)从 1991 年起组织有关专家历经五载编著的《数学的原理与实践》一书指出:"在现代社会,除了算术以外,线性代数是应用最广泛的数学学科了."加之线性代数是一门新概念多,又比较抽象的课程,作为基础课,它一般又被安排在第一学年上,因而它还承担着提高学生素质,帮助学生完成从中学到大学跨越的重任.加之这门课程在许多专业还有后继课程(如离散数学、数值分析、微分方程等),故在大学人才培养中,线性代数课程有着重要的地位和作用.

本教材是为上述专业的大学生量体裁衣撰写的,强调适用性和通用性,兼顾先进性.因而在编著中作了以下探索:

(1) 低起点.起点和中学代数接轨,以中学生熟悉的内容解线性方程组讲起.

(2) 突出主线,删除某些枝节.突出主线使最基本最重要的内容讲深讲透,而一些枝节的删除将使全书脉络更为清晰,结构更为简洁,有助于学生集中精力掌握最基本最重要的知识.

(3) 坡度适中.教材章节的编排中尽量使难点分散,由浅入深时注意逐步过渡.力求使全书步步深入,而每步坡度适中,使一般程度的学生通过努力都能顺利地学会全书.全书涵盖了教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中有关线性代数的所有内容,且在核心部分有所展开和加深,因而为学生进一步深造提供良好的线性代数基础.

(4) 注重引入思想,剖析方法,在阐明结果的同时着眼于提高学生的素质.

(5) 尽量以提出问题,讨论问题,解决问题的方式来展开教材,努力使学生也能知其所以然.

(6) 充分考虑到不同学时不同层次教育的需要,教材分主体和选学两部分,通过合理配置可适用于不同学时不同层次的教学.

(7) 教材有较多的典型例题,以期举一反三.习题按小节配置,注意兼容各种题型,其中有部分为考研题型和考研真题.习题有难有易,留有充分的选择余地.

(8) 每章末均有"概要及小结",这不仅是该章的概括提高,还常有加深理解、开拓思维的内容.

(9) 注重应用. 线性代数在其他学科的渗透和应用,在篇幅允许时,尽量予以提及.

(10) 行文追求简洁明了,对重点和难点的阐述和剖析务求详尽. 对容易误解出错之处,以注记的形式指明,并适度引申,以求触类旁通,提高能力. 全书力图使凡大学一年级学生都能看懂,即使自学也能掌握.

本书的主体(不包括打 * 号用仿宋体排印及附录)适用于 50 学时的线性代数课所用,若做适当的增删,则可适用于学时数从 34 到 60 的线性代数课,本书的主体的教学内容完全满足高等工科院校“线性代数教学基本内容”而有余,所以即使删去部分章节也无妨.

本书的附录是主体内容外的选学部分. 附录一、附录二是主体内容所需预备知识的补充. 附录三,附录七是主体内容的应用. 附录四至附录六是主体内容的提高和深化. 均供读者酌情选学.

浙江大学城市学院院长鲁世杰教授,之江学院副院长金蒙伟副教授一直十分关心支持帮助作者撰写教材. 在本书打印本使用过程中,蒙谢冰璋副教授,张继昌副教授等众多同事的厚爱,提出了许多宝贵意见. 对此作者一并表示衷心的感谢.

浙江大学城市学院、之江学院、远程教育学院、数学系、教材服务中心等有关部门对本书的撰写、使用、发行各个方面给予帮助和支持. 本书有幸被列为浙江大学课程建设项目,城市学院将此书作为首批教改基金资助的教材建设项目. 科学出版社吕虹同志大力支持使本书得以面世. 作者一并深表感谢.

作者虽在浙江大学执教代数 20 多年,此书也是多年教学实践中日积月累几经修改而成. 然限于水平,撰写中常有绠短汲深之感,殷切希望读者不吝赐教,多多指正.

陈维新
2001 年 3 月于浙江大学求是村

符 号 表

(按书中出现顺序排列)

符 号	意 义	页 码
P	数域	1
$\mathbf{Q}$	有理数域	1
$\mathbf{R}$	实数域	1
$\mathbf{C}$	复数域	1
$\mathbf{Z}$	全体整数	1
$i_1 i_2 \cdots i_n$	n 阶排列	1
$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$	排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数	2
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lvert a_{ij} \rvert_n$	n 阶行列式	8
$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$	对所有 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和	8
D^{T}	行列式 D 的转置行列式	12
$R_i \pm kR_j$	行列式(矩阵)第 i 行加上(减去)第 j 行 k 倍	16(39)
$C_i \pm kC_j$	行列式(矩阵)第 i 列加上(减去)第 j 列 k 倍	16(39)
$\sum$	连加号	18(199)
M_{ij}	行列式元素 a_{ij} 的余子式	20
A_{ij}	行列式元素 a_{ij} 的代数余子式	20
$D(a_1, a_2, \cdots, a_n)$	n 阶范德蒙德行列式	23
Π	连乘号	24(201)

续表

符　号	意　义	页　码
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[a_{ij}]_{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵	39(64)
$\bar{\boldsymbol{A}}$	($\boldsymbol{A}$ 的)增广矩阵	39
$R_{ij}(C_{ij})$	矩阵第 i 行(列),第 j 行(列)互换	39
$kR_i(kC_i)$	矩阵第 i 行(列)乘 k	39
秩($\boldsymbol{A}$)	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩	44
$A \Rightarrow B$	A 成立可推出 B 成立	49
$A \Leftrightarrow B$	A 成立的充要条件为 B 成立	49
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式	64
$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{O}_{m\times n})$	零矩阵	65
$-\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵	65
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}_n)$	单位矩阵	70
$\lambda\boldsymbol{E}(\lambda\boldsymbol{E}_n)$	数量矩阵	70
$\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$	对角矩阵	70
$\boldsymbol{A}^k$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次方幂	70
$f(\boldsymbol{A})$	矩阵多项式	71
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}')$	$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵	73
$\boldsymbol{E}_{ij}$	矩阵单位	76
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$ 的迹	76(159)
$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵	78
$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵	78
$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1q} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pq} \end{bmatrix}$	分块矩阵	86
$\boldsymbol{E}(i,j)$	初等矩阵(互换)	92
$\boldsymbol{E}(i(k))$	初等矩阵(倍乘)	92

续表

符　　号	意　　义	页　码
$\boldsymbol{E}(i+j(k),j)$	初等矩阵(倍加)	92
$\boldsymbol{O}=[0,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$	零向量	107
$-\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量	107
P^n	n 元向量空间	134
$\mathbf{R}^n$	实向量空间	134
$\dim V$	向量空间 V 的维数	135
$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$	$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积	143
$\lVert\boldsymbol{\alpha}\rVert$	实向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度	143
$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交	144
W_{λ_0}	属于 λ_0 的特征子空间	152
$f(\lambda)=\lvert\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\rvert$	$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式	152
Δ_k	k 阶顺序主子式	188

目　　录

第1章　行　列　式

线性代数是中学代数的继续和提高.第 1 章和第 2 章就是中学代数解一元一次(线性)方程 $ax+b=0$ 的延伸和深化,是研讨多个变量多个线性方程组成的线性方程组的求解问题.为此要引入一些概念,作为预备知识备用.

1.1　数域与排列

本节讨论数域和排列.

1.1.1　数域

在研究某些问题时,常和所研究对象的取值范围有关.如求方程 $x^2+1=0$ 的根,不仅在有理数范围无解,就是在实数范围也无解,而在复数范围有解,解为 $\pm\mathrm{i}$.又如在整数范围内,除法不是普遍可做的,因商不一定是整数,而在有理数范围内,只要除数不为零,除法总是可做的.另一方面,这些范围不同的有理数、实数、复数有着许多共同的性质,特别有着许多共同的运算(指加法、减法、乘法和除法)性质.为了在以后讨论中能把具有这些共同运算性质的数集统一处理,我们引入一个一般的概念.

定义 1.1.1　设 P 是至少有两个不同复数组成的集合,若 P 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍为 P 中的数(简称为四则运算**封闭**),则 P 就称为一个**数域**.

从定义 1.1.1 可推知:全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合都是数域.这三个数域分别用字母 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 来表示,且有 $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.除 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 外还有许多其他数域,有兴趣的读者可参阅文献[3],第 1 页.

例 1.1.1　记全体整数的集合为 $\mathbf{Z}$,则 $\mathbf{Z}$ 不是数域.这是因为 $2,3\in\mathbf{Z}$,且 $3\neq 0$,但 $\dfrac{2}{3}\notin\mathbf{Z}$,这表明 $\mathbf{Z}$ 对于除法不封闭.

今后我们常在数域 P 上讨论问题,对所涉及的 P 中的数进行四则运算,推导出结果.这样就使得该结果在数域 P 上成立,而数域 P 是泛指的,即可以是 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$,或其他某个数域,从而使结果有一般性.

为简单计,如把下文中提及的数域当作 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 来考虑,也无妨.

1.1.2　排列

定义 1.1.2　由 $1,2,\cdots,n$ 共 $n(n>1)$ 个数码组成的一个有序数组,称为一个 n

阶排列.

例如，15432，65(12)798(11)4(10)312，$n(n-1)\cdots21$ 依次分别为 5 阶排列，12 阶排列，n 阶排列. 在上述 12 阶排列中我们把数码 12，11，10 用括号括起来是为了区分，类似的做法在 n 阶排列中也采用.

排列是有序数组，所以组成排列数码的顺序不同就是不同的排列，例如 132 和 213 就是不同的 3 阶排列. 不同的 n 阶排列有多少个呢？n 阶排列的一般形式可表为 $i_1i_2\cdots i_n$，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 中某一个数，且互不相同，这时 $i_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的下标 k 表示 i_k 排在 n 阶排列从左到右的第 k 个位置上. 这样按 n 阶排列的定义知，i_1 可有 n 种选取（n 个数码中任选一个），i_2 有 $n-1$ 种选取（去掉 i_1，余下 $n-1$ 个数码中任选一个），…，i_{n-1} 可有 2 种选取（去掉 $i_1,i_2,\cdots,i_{n-2}$，余下 2 个数码中任选一个），而 i_n 只能取余下的那个数码，故 n 阶排列共有

$$n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$$

个. 例如 3 阶排列共有 $3!=6$ 个，它们是：123，132，213，231，312，321.

在 $n!$ 个 n 阶排列中，惟有 $12\cdots(n-1)n$ 是按数码从小到大的自然顺序组成的一个排列（称为**标准排列**）. 其余的排列或多或少会出现大的数排在小的数前面的情况，比如在 5 阶排列 15432 中，5 排在 4 前，3 排在 2 前. 这样的排列顺序是与自然顺序相反的，为此引入概念：在排列 $i_1i_2\cdots i_j\cdots i_k\cdots i_n$ 中，如果 $j<k$ 而 $i_j>i_k$，则称数对 i_j,i_k 构成一个**逆序**. 一个排列的逆序总数称为排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 逆序数为偶数的称为**偶排列**，逆序数为奇数的称为**奇排列**.

下面寻求计算排列逆序数的方法. 先看一个例子，排列 35412 构成逆序的数对有

$$\begin{gathered}31,\quad 32;\\54,\quad 51,\quad 52;\\41,\quad 42.\end{gathered}$$

因而 35412 的逆序数为

$$\begin{aligned}&2(3\text{ 后面比 }3\text{ 小的数的个数})\\&+3(5\text{ 后面比 }5\text{ 小的数的个数})\\&+2(4\text{ 后面比 }4\text{ 小的数的个数})\\&+0(1\text{ 后面比 }1\text{ 小的数的个数})=7,\end{aligned}$$

所以 35412 为奇排列.

由此得出计算排列的逆序数的一个方法：

$$\begin{aligned}\tau(i_1i_2\cdots i_n)=&\tau_1(i_1\text{ 后面比 }i_1\text{ 小的数的个数})\\&+\tau_2(i_2\text{ 后面比 }i_2\text{ 小的数的个数})\\&+\cdots\cdots\\&+\tau_{n-1}(i_{n-1}\text{ 后面比 }i_{n-1}\text{ 小的数的个数}).\end{aligned}$$

据此方法计算得

$$\tau(15432) = 0 + 3 + 2 + 1 = 6,$$

所以 15432 为偶排列.

注意到 $\tau(12\cdots(n-1)n)=0$,故 $12\cdots(n-1)n$ 为偶排列.

将一个排列中某两个数码的位置互换,而其余数码不动,就得到另一个排列,这样的变换称为**对换**. 例如,经过 1,3 两数码对换,偶排列 15432 就变成奇排列 35412. 这表明对换会改变排列的奇偶性. 一般有下列定理.

定理 1.1.1 任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

证 首先证明对换排列中相邻两个数码的情况,再讨论一般情况,详细推导可参阅文献[3],第 4 页.

习 题 1.1

1. 对一组整数进行四则运算,所得结果是什么数?
2. 写出 4 个数码 1,2,3,4 的所有 4 阶排列.
3. 分别计算下列四个 4 阶排列的逆序数,然后指出奇排列是( ).

(A) 4312; (B) 4132; (C) 1342; (D) 2314.

4. 计算以下各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性:

(1) 314265; (2) 314265789; (3) 542391786;

(4) 987654321; (5) 246813579; (6) $n(n-1)\cdots 21$.

5. 在由 1,2,3,4,5,6,7,8,9 组成的下述 9 阶排列中,选择 i 与 j 使得

(1) $2147i95j8$ 为偶排列; (2) $1i25j4896$ 为奇排列;

(3) $412i5769j$ 为偶排列; (4) $i3142j786$ 为奇排列.

且均要求说明理由.

6. 写出全体形如 5 * * 2 * 及 2 * 5 * 3 的 5 阶排列. 总结一下,有 k 个位置数码给定的 $n(n>k)$ 阶排列有多少个?
7. 自学附录一:连加号Σ与连乘号Π.

1.2 行列式的定义

由中学数学知

1. 一元一次方程 $ax=b$,当 $a\neq 0$ 时,有惟一解:$x=a^{-1}b$.

2. 二元一次方程 $ax+by=c$,当 a,b 不全为零时,有无穷多解. 比如二元一次方程(Ⅰ):$x+y=1$ 的解为

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t, \end{cases} \quad \text{其中 } t \text{ 为任意常数.}$$

我们将在此基础上继续讨论,为此引进一些概念.

定义 1.2.1　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是变量，n 是一个正整数，形式表达式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 均为数，称为 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**线性方程**，线性方程中的变量也称为**未知量**.

据此线性方程是变量均为一次的方程，当 $n=1$ 和 $n=2$ 时就是我们熟悉的一元一次方程和二元一次方程.

定义 1.2.2　线性方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的一个**解**是一组有序的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，当 $x_1=k_1,x_2=k_2,\cdots,x_n=k_n$ 时，有

$$a_1k_1+a_2k_2+\cdots+a_nk_n=b.$$

线性方程解的全体所组成的集合称为**解集合**.

定义 1.2.3　含 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 m 个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

称为**线性方程组**. 若一组有序的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是方程组中每一个线性方程的解，则其称为线性方程组的一个**解**. 线性方程组解的全体称为**解集合**.

下面我们来考察由含有 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的求解问题.

这类方程组总是可以用消元法来求解的. 消元法对具体的数字方程求解，虽然比较方便，但其解没有一个统一的公式. 而解的公式的重要性只要回想中学代数一元二次方程的公式解的意义就能理解，所以我们有必要寻求含有 n 个未知量的 n 个线性方程组成的方程组的公式解. 首先从 $n=2,n=3$ 做起，再推广到一般.

当 $n=2$ 时，用消元法解含有未知量 x_1,x_2 的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases}\tag{1.2.1}$$

即以 a_{22} 乘第一个方程两边，以 a_{12} 乘第二个方程两边. 然后两式相减，消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

类似消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$