高等职业教育“十二五”创新型规划教材

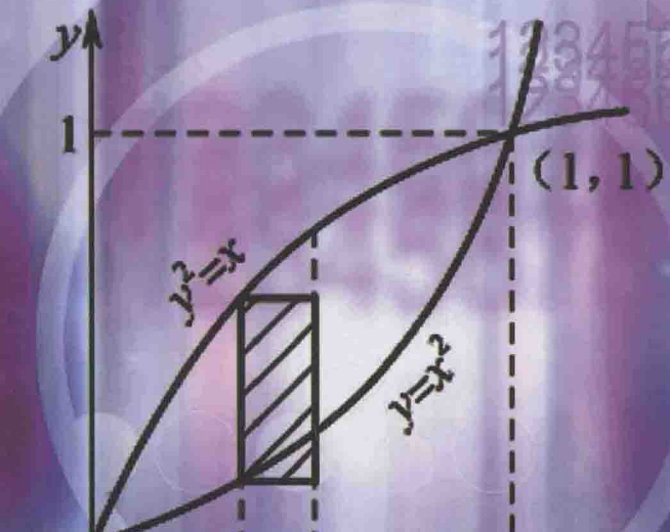
应用数学基础

YINGYONG SHUXUE JICHU

主编 刘志劲 李海琴

主审 孙喜平 肖丽媛

（上册）



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十二五”创新型规划教材

应用数学基础
（上册）

主　编　刘志劲　李海琴
副主编　张爱英　李　军　薛　娜　蔡兴华
主　审　孙喜平　肖丽媛

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础．上册/刘志劲，李海琴主编．—北京：北京理工大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5640-4938-6

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①刘…②李…　Ⅲ.①应用数学-高等职业教育-教材　Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 161460 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京国马印刷厂
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／9.75
字　　数／223 千字
版　　次／2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷　　责任编辑／钟　博
印　　数／1～4000 册　　责任校对／陈玉梅
定　　价／21.00 元　　责任印制／王美丽

前　　言

本书共分上、下两册，上册包括函数、极限、一元微分学和积分学，下册包括微分方程、拉普拉斯变换、线性代数、概率论与统计学的内容. 全书内容是由内蒙古机电职业技术学院基础部数理教研室的全体教师，结合多年从事高职高专教学的经验，通过对各专业的调研，经全体教师集体讨论后选定的，由每位老师各自编写一部分，最终统筹定稿形成. 全书力图反应如下特点：

1. 有较强的专业适应性

在各类高职高专院校中，大量的专业都需要开设《应用数学基础》，而不同的专业所需内容也不尽相同. 因此，我们上册是各专业学生的必修内容，下册是根据各自不同专业的选学内容，同时在练习题和例题中也适当选择了一定数量的专业例子.

2. 尽可能适应当前学生的实际认知水平

在大力普及高职高专教育的背景下，我们所面对的学生生源其学习能力和认知水平都有所下降，由此我们在编写过程中，力求语言描述通俗易懂，省略较繁琐的理论证明和推导，对难懂的概念定义尽量用通俗语言讲解清楚其基本思想和含意，习题与例题尽可能简洁.

3. 尽可能适应当前高职高专的教学改革

在加大实践性教学，压缩理论教学时数，重点培养学生实际动手能力的高职高专教育理念下，我们在保证理论体系完整的同时，对内容的选择、章节的安排作了适当的合并删减，以灌输数学思想为主，培养学生的数学思维方法，掌握基本的数学运算和简单应用，体现数学的工具性与适用性.

参加本书编写的有：刘志劲老师编写第一章，张爱英老师编写第二章，蔡兴华老师编写第三章，李军老师编写第四章，李海琴老师编写第五章，薛娜老师编写第六章，赵彩秀老师编写第七章、第八章，杨建平老师编写第九章，李广利老师编写第十章、第十一章，刘美英老师编写第十二章、第十三章. 张爱英老师为本书选配了阅读材料，敖特老师为本书的文字和物理例子的选用提出了不少建设性的意见.

本书在组织、策划、审核过程中得到了孙喜平院长的大力支持与帮助，内蒙古呼和浩特职业技术学院的肖丽媛老师对本书做了审阅修改并提出了许多宝贵意见，在编写过程中也得到学院有关部门和出版社的支持与帮助，在此表示感谢.

由于时间仓促，编者水平有限，错误与不足之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

目　　录

上　册

第一章　函　　数

函数是近代数学的基本概念之一,《应用数学基础》中的微积分学就是以函数作为研究对象的一门课程,是这门课的必备知识,同时也在中学数学课程中作过详细的讨论.本章的任务就是要对中学的有关知识进行一个概述和总结,从而对函数的形式、结构、特性有一个系统的认识,为下面的学习奠定必要的基础.

第一节　函数的概念

一、函数的概念

人类在日常生活和社会实践中会发现很多自然变化,比如,一年中"春""夏""秋""冬"四季的变化,一日中"白""昼"的变化,气温的变化,风速的变化,等等,有些是有规律的,有些是没有规律的或规律不清楚的.函数就是一个为探求变化规律而产生的一个数学概念.

通常一个变化过程中有许多量,变化的量称为变量,不变的量称为常量.一般变量用 $x,y,t,\cdots$ 表示,常量用 $a,b,c,\cdots$ 表示.

例如:一辆直达北京的内燃机列车,在行驶的过程中,列车的速度、距北京的距离、列车所剩余的燃油等都是变量,而列车上的人数、列车的车厢数都是常量.当列车到达北京站后,旅客下车的过程中,列车速度、距北京的距离则是常数,而列车上的人数则是变量.可见常量与变量是对不同过程而言的,为了讨论问题的方便,我们有时把常量视为特殊的变量.

函数就是要描述变量过程中变量与变量之间的依赖关系的,这里我们只讨论两个变量的情况.先看下面的例子:

例 1－1　自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,距离为 s.假定开始下落的时刻为 $t=0$,落地所用时间为 T,那么 s 与 t 两个变量之间的依赖关系由下式确定:

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 是重力加速度.显然当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 内任取一值时,由上式就可以确定一个相应的 s 值.

例 1－2　某河流水文站,记录了该河流历年的月流量 v(即一个月流过的水量的总和),现将 40 年的平均月流量列表,如表 1－1 所示:

表 1－1　40 年的平均月流量

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月流量 v	0.39	0.40	0.57	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

从表 1－1 中明显看出在 7、8、9 三个月份流量最大.掌握了月份 t 与流量 v 的关系,对于设计水库是必不可少的.

例 1－3　图 1－1:是一天中时间 h 与气温 T 的依赖关系图,从中我们很容易看到一天

中什么时间气温高,什么时间气温低,为判断未来气象提供依据.

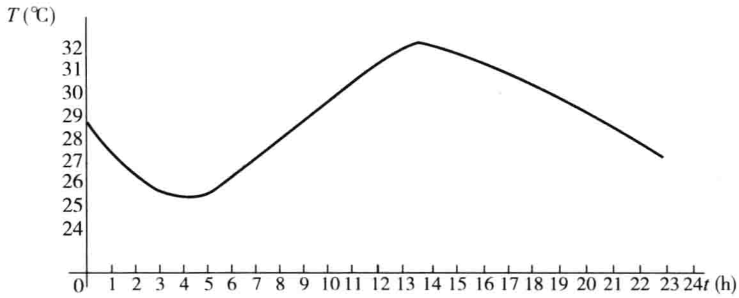


图 1-1

上述的例子均表达了变量之间的依赖关系. 不同的变化过程对应各自不同的法则,当其中一个变量在某一数集内任取一值时,另一变量就会有一确定的值与之对应,这种两个变量之间的依赖关系称为函数关系.

定义:在某一变化过程中有两个变量 x 和 y,当 x 在一数集 D 内任取一值时,依某种关系 f 在数集 M 内有唯一的 y 值与之对应,则称 y 是关于 x 的函数,其中 x 称自变量,y 也可称因变量. 记作:

$$y=f(x)$$

数集 D 称为定义域(指 x 的取值范围),数集 M 称值域(指对应 y 的取值范围).

二、函数的表示法

函数一般有如下三种表示法:

1. 公式法(解析法)

函数中两个变量之间的关系可用一个解析式表示的,比如例 1-1 中 t 与 s 之间的关系.

2. 列表法(表格法)

函数中两个变量之间的关系可用一个表格表示的,比如例 1-2 中 t 与 v 之间的关系.

3. 图像法(图示法)

函数中两个变量之间的关系可用图像表示的,比如例 1-3 中 t 与 T 之间的关系.

三、函数的相关运算

1. 求函数的定义域

在求函数的定义域时,我们必须考虑下面两种情况:

(1)在实际问题中自变量 x 的取值范围,比如例 1-1 中自变量时间 $t\in[0,T]$.

(2)在数学算式中,我们只考虑等式有意义.

例 1-4　求函数 $y=\log_a(x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ 定义域.

解　依题意得 $\begin{cases}x+1>0\\x^2-4>0\end{cases}$,即 $\begin{cases}x>-1\\x<-2 \text{ 或 } x>2\end{cases}$,解得 $x>2$

故　此函数的定义域为 $x\in(2,+\infty)$.

2. 函数值的计算

由函数的定义,我们很容易看出,当自变量 x 给定一个值 $x=x_0$ 时,依函数的对应关系可得 $y_0=f(x_0)$,这就是函数在 $x=x_0$ 点的函数值,也可记作:

$$y\Big|_{x=x_0} \quad 或 \ f_{x=x_0}(x)$$

显然,当 x 给定一个具体的数值时是比较容易计算的,我们应在其简单运算中体会更深层的含义,比如 x 取字母、算式、函数等.

例 1-5　已知函数 $f(x)=2x+1$,求:$f(0)$,$f(-1)$,$f(a)$,$f(a+1)$,$f(\ln x)$,$f[f(x)]$.

解　$f(0)=2(0)+1=1$

$f(-1)=2(-1)+1=-1$

$f(a)=2a+1$

$f(a+1)=2(a+1)+1=2a+3$

$f(\ln x)=2\ln x+1$

$f[f(x)]=2f(x)+1=2(2x+1)+1=4x+3$

这一例子告诉我们:在函数计算中,自变量 x 的位置可以换成任意形式,即

$$f(\square)=2(\square)+1$$

这种思维方式会在以后的运算中经常用到.

四、反函数

我们将函数 $y=f(x)$中自变量 x 和因变量 y 的地位互换后得到的一个函数,称为函数 $y=f(x)$的反函数,记作:

$$y=f^{-1}(x)$$

容易看出,函数 $y=f(x)$中,自变量 x 和因变量 y 互换后,反函数与函数之间有如下两个结论:

(1)反函数的定义域是函数的值域,反函数的值域是函数的定义域.

(2)反函数与函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1-6　求函数 $y=2x-2$ 的反函数,并作图.

解　从函数中解出 x,即

$$x=\frac{1}{2}y+1$$

交换 x、y,得反函数

$$y=\frac{1}{2}x+1$$

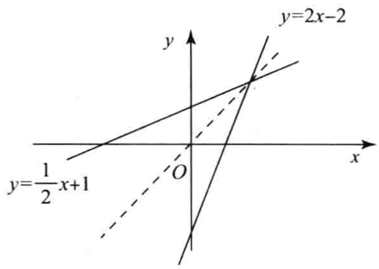


图 1-2

从图 1-2 中我们很容易看到他们的对称情况.

五、函数的特性

在讨论和研究函数的时候,其特性是一个重要方面.我们将从它们的代数式子的判断和几何图像的特点进行研究分析.

1. 函数的单调性

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内随自变量 x 的增加而增加，则称函数为增函数；随 x 的增加而减小，则称减函数. 代数判别为：

设 $x_1<x_2$ 是区间 (a,b) 内任意两点，

若 $f(x_1)<f(x_2)$，

则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加，

如图 1－3(a)所示；

若 $f(x_1)>f(x_2)$，则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减小，如图 1－3(b)所示.

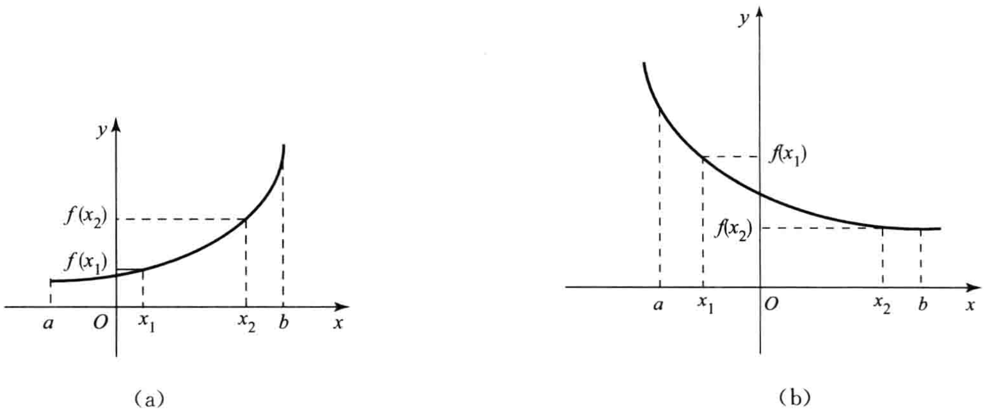


图 1－3

2. 函数的奇偶性

若函数 $y=f(x)$ 当 x 改变符号时，函数值也只改变符号，即：

$f(-x)=-f(x)$

则称 $f(x)$ 是奇函数.

若函数 $y=f(x)$ 当 x 改变符号时，函数值不变，即：

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是偶函数.

奇函数关于原点对称，如图 1－4(a)所示.

偶函数关于 y 轴对称，如图 1－4(b)所示.

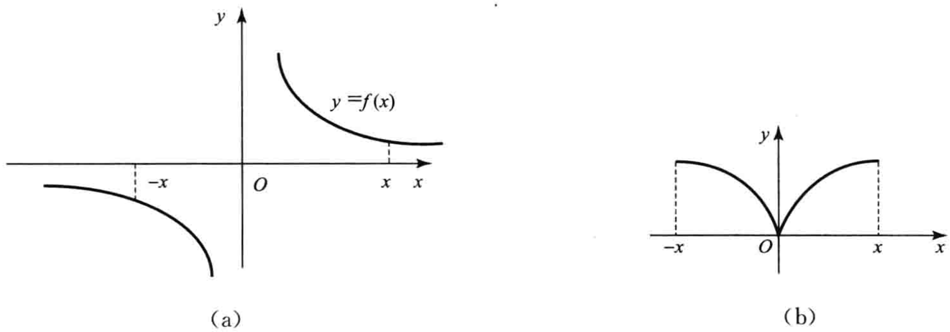


图 1－4

3. 函数的周期性

若函数 $y=f(x)$ 的函数值能重复出现，即

$$f(x+l)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是周期函数.

满足上式的最小正 l 称为函数的周期，如图 1-5 所示.

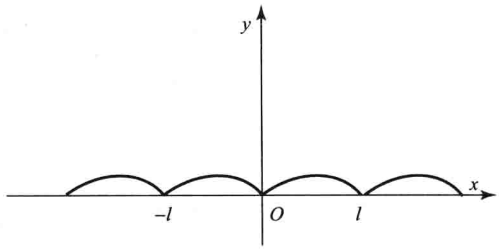


图 1-5

4. 函数的有界性

若函数 $y=f(x)$ 的函数值在它的定义域内始终被控制在某一范围内，即：存在正数 M 使

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$ 是有界函数，如图 1-6 所示.

有界函数往往伴有最值问题.

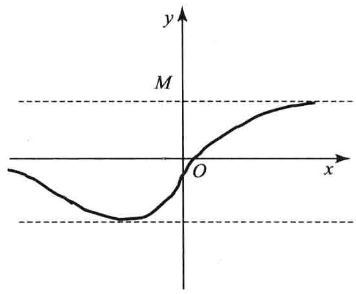


图 1-6

练习题 1-1

1. 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{3-x}$　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$

(3) $y=\ln(1-x)+\sqrt{x-2}$　　(4) $y=\sqrt{\lg(x-4)}$

2. 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$

(2) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

(3) $f(x)=x^2\cos x$

(4) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$

3. 已知函数：

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

求：$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(-a)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(a^2)$，$f(a+1)$，$f(a+h)$.

4. 已知：$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，求 $f[f(x)]$.

5. 求下列函数的反函数

(1) $y=3x+2$

(2) $y=2\sin 3x$

(3) $y=1+\ln(x+2)$

(4) $y=e^{2x}+2$

第二节　初等函数

本节对函数的类型、结构等进行系统的认识.

一、基本初等函数

我们学习过许多函数,比如:一次函数、二次函数、正比例函数、反比例函数、三角函数等.根据函数的运算特点,我们把五大类函数定义为基本初等函数,它们是构造其他函数的基础.下面我们将从形式、名称、定义域、图像、性质以及相关运算上进行讨论.

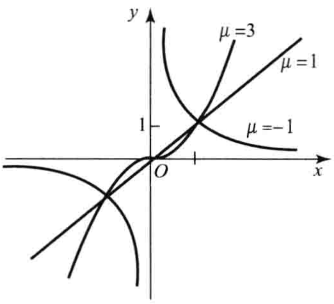


图 1-7

(一)幂函数

形如 $y=x^{\mu}$ 的函数称为幂函数,μ 为常数.它的定义域随 μ 的取值不同而不同,单调性也各不相同,如图 1-7 所示.

(二)指数函数

形如 $y=a^{x}$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的函数称为指数函数.定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$,值域为 $y\in(0,+\infty)$.

其图像分为 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两大类,如图 1-8 所示.

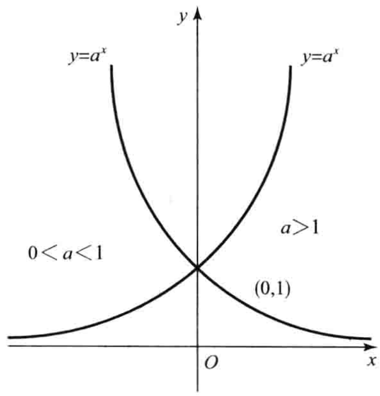


图 1-8

从中可看出:

当 $a>1$ 时,函数为单增函数;当 $0<a<1$ 时,函数为单减函数.

显然幂函数 $y=x^{\mu}$ 与指数函数 $y=a^{x}$ 的形式非常相似,所以我们要区分,以免混淆.它们的运算称幂指数的运算,公式如下:

$$a^{x}\cdot a^{y}=a^{x+y}$$

$$a^{x}\div a^{y}=a^{x-y}$$

$$(a^{x})^{y}=a^{x\cdot y}$$

$$a^{x}\cdot b^{x}=(ab)^{x}$$

$$a^{-x}=\frac{1}{a^{x}}$$

(三)对数函数

形如 $y=\log_{a}x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的函数称为对数函数.

由对数的定义,我们可看出对数函数是指数函数的反函数,故图像也分两类,如图 1-9 所示.

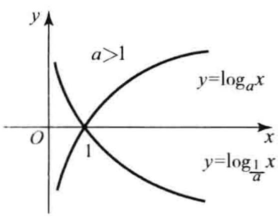


图 1-9

定义域为 $x\in(0,+\infty)$,值域为 $y\in(-\infty,+\infty)$.

当 $a>1$ 时,函数为单增函数;当 $0<a<1$ 时,函数为单减函数.

相关的运算公式:

$\log_{a}1=0$

$\log_a a = 1$

$a^{\log_a x} = x$

$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

$\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$

$\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x$

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

(四)三角函数

(1)正弦函数　　$y=\sin x$

定义域:$x\in(-\infty,+\infty)$

值域:$y\in[-1,+1]$(有界)

当 $x\in\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$($k=0,\pm1,\pm2\cdots$)时,此函数为单增函数;

当 $x\in\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$($k=0,\pm1,\pm2\cdots$)时,此函数为单减函数.

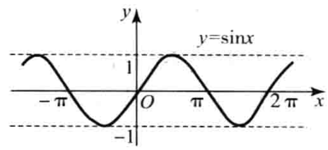


图 1-10

周期 $T=2\pi$.

奇函数,图像关于原点对称,如图 1-10 所示.

(2)余弦函数　$y=\cos x$

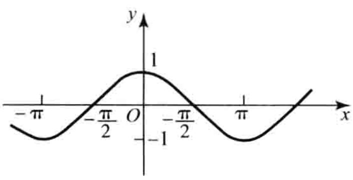


图 1-11

定义域:$x\in(-\infty,+\infty)$

值域:$y\in[-1,+1]$(有界)

当 $x\in[2k\pi-\pi,2k\pi]$($k=0,\pm1,\pm2\cdots$)时为单增函数,当 $x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]$($k=0,\pm1,\pm2\cdots$)时为单减函数.

周期 $T=2\pi$.

偶函数,图像关于 y 轴对称,如图 1-11 所示.

(3)正切函数　$y=\tan x$

定义域:$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$($k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$)

值域:$y\in(-\infty,+\infty)$(无界)

当 $x\in\left[k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)时为单增函数.

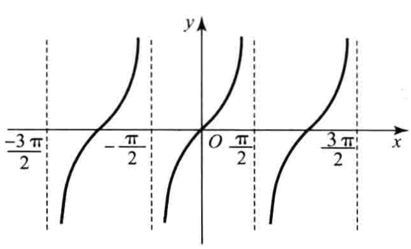


图 1-12

周期 $T=\pi$.

奇函数,图像关于原点对称,如图 1-12 所示.

(4)余切函数　$y=\cot x$

定义域:$x\neq k\pi$($k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$)

值域:$y\in(-\infty,+\infty)$(无界)

当 $x\in[k\pi,k\pi+\pi]$($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)时为单减函数.

周期 $T=\pi$.

奇函数,图像关于原点对称,如图 1-13 所示.

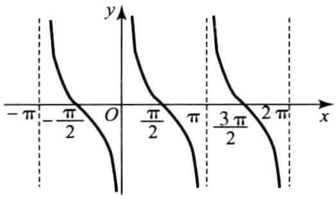


图 1-13

(5)正割函数 $y=\sec x$(讨论略)

(6)余割函数 $y=\csc x$(讨论略)

三角函数家族成员众多,函数的各种特性也反映得比较全面,它们的运算相对也较繁琐,运算公式数量较多,主要公式分三大块:

1. 基本恒等式

倒数关系:$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1,\cos x\cdot\sec x=1,\tan x\cdot\cot x=1$

商的关系:$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

平方关系:$\sin^2x+\cos^2x=1,1+\tan^2x=\sec^2x,1+\cot^2x=\csc^2x$

2. 诱导公式(简化公式)

将任意角化成:

$$k\frac{\pi}{2}+\alpha(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$$

遵循如下口诀:

奇变偶不变,符号看象限;

纵变横不变,正负看象限.

3. 加法定理及推论

(1)加法定理

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

(2)倍角公式(加法定理中 $\alpha=\beta$)

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\begin{aligned}\cos2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&=1-2\sin^2\alpha\qquad\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}\\&=2\cos^2\alpha-1\end{aligned}$$

$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(3)半角公式(倍角公式开方)

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

(4)积化和差公式(加法定理两边加减)

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

(5)和差化积公式(上组公式中 $\alpha+\beta=\theta,\alpha-\beta=\varphi$)

$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$

$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$

$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$

$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$

(五)反三角函数

三角函数定义在单值区间上的反函数:

(1)反正弦函数　$y=\arcsin x$

定义域:$x\in[-1,1]$

值域:$y\in\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$

单增函数.

奇函数;关于原点对称,如图 1-14 所示.

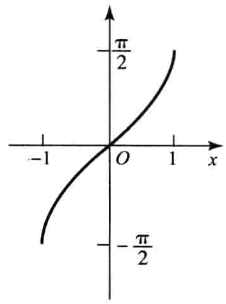


图 1-14

相关公式:

$\sin \arcsin x=x$

$\arcsin(-x)=-\arcsin x$

(2)反余弦函数　$y=\arccos x$

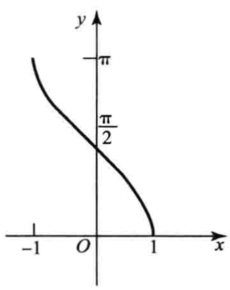


图 1-15

定义域:$x\in[-1,1]$

值域:$y\in[0,\pi]$

单减函数,如图 1-15 所示.

相关公式:

$\cos \arccos x=x$

$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$

(3)反正切函数　$y=\arctan x$

定义域:$x\in(-\infty,+\infty)$

值域:$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

单增函数,奇函数,关于原点对称,如图 1-16 所示.

相关公式:

$\tan \arctan x = x$

$\arctan(-x) = \pi - \arctan x$

(4)反余切函数　$y = \operatorname{arccot} x$

定义域:$x \in (-\infty, +\infty)$

值域:$y \in (0, \pi)$

单减函数,如图 1-17 所示.

相关公式:

$\cot \operatorname{arccot} x = x$

$\operatorname{arc\ cot}(-x) = \pi - \operatorname{arc\ cot} x$

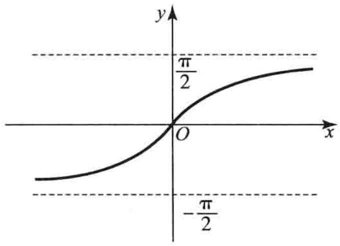


图 1-16

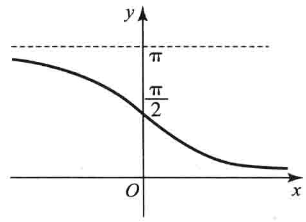


图 1-17

二、复合函数

复合函数是函数构造的重要方式. 当函数中的变量 x、y 的关系不易直接找到时,我们可借助第三个变量 u——被称为中间变量的来沟通,比如:

$y = f(u)$,$u = \varphi(x)$,可复合成　$y = f[\varphi(x)]$,这个函数称为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

这里重点研究一个复杂的复合函数是由哪些函数复合而成的.

例 1-7　下列函数是由哪些函数复合而成的?

(1)$y = (2x-1)^3$　　(2)$y = \sqrt{\sin 2x}$

(3)$y = e^{\ln\cos x}$　　(4)$y = \arctan^2 \sin\ln(2x-1)$

解　(1)$y = (2x-1)^3$ 是由 $y = u^3$ 和 $u = 2x-1$ 复合而成.

(2)$y = \sqrt{\sin 2x}$是由 $y = \sqrt{u_1}$和 $u_1 = \sin u_2$ 以及 $u_2 = 2x$ 复合而成.

(3)$y = e^{\ln\cos x}$是由 $y = e^{u_1}$ 和 $u_1 = \ln u_2$ 以及 $u_2 = \cos x$ 复合而成.

(4)$y = \arctan^2 \sin\ln(2x-1)$是由 $y = u_1{}^2$、$u_1 = \arctan u_2$、$u_2 = \sin u_3$、$u_3 = \ln u_4$和 $u_4 = 2x-1$ 复合而成.

从例 1-7 中,我们可以看出,一个复合函数,不管多么复杂,中间变量有多少,只要每次看到一个中间变量,就可以把形式复杂的复合函数变成简单的函数形式. 这种能力对今后的函数运算起着重要作用.

三、初等函数

由基本初等函数,经过有限次四则运算或有限次复合且可用一个等式表示的函数称为初

等函数. 今后我们所讨论的函数多为初等函数.

四、分段函数

有些变化过程中,两个变量 x、y 的关系不能用一个式子来表示,必须分段考虑.

例 1 - 8　某市出租车收费标准为:2 公里内起步价 6 元,超过 2 公里以后,每公里加价 1.5 元. 试求出租车收费与行驶路程的函数关系式,并作图.

解　设出租车行驶路程为 x,出租车收费设为 y.

依题意:$y=\begin{cases}6 & 0<x\leqslant 2\\ 6+1.5(x-2) & x>2\end{cases}$

$\Rightarrow y=\begin{cases}6 & 0<x\leqslant 2\\ 1.5x+3 & x>2\end{cases}$

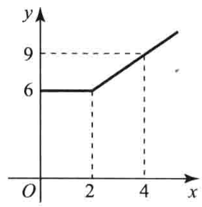


图 1 - 18

图像如图 1 - 18 所示.

以上形式的函数称为分段函数. 显然分段函数是非初等函数.

例 1 - 9　设 $f(x)=\begin{cases}2x+3, x>0\\ 1, \quad x=0\\ x^2, \quad x<0\end{cases}$ 求:$f(0)$,$f(-\frac{1}{2})$,$f(\frac{1}{2})$.

解:$f(0)=1$,$f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$,$f(\frac{1}{2})=2\times\frac{1}{2}+3=4$

练习题 1 - 2

1. 指出下列函数的复合过程

(1)$y=(3x+2)^5$

(2)$y=2^{\sin^2 x}$

(3)$y=\ln\cos(x^2+1)$

(4)$y=\sqrt{\ln \arctan\sqrt{x}}$

2. 已知函数:

$$f(x)=\begin{cases}-1, x>0\\ 0, \quad x=0\\ 1, \quad x<0\end{cases}$$

求:$f(0)$,$f(1)$,$f(-1)$,$f\{f[f(-1)]\}$.

第三节　函数关系式的建立

本节主要培养我们将实际问题转化成数学模型的能力.

建立数学模型,研究数学模型,是我们运用数学知识解决实际问题的一个重要方面,其主要步骤可分为:

(1)分析问题中的变量与常量,分别用字母表示出来,并设定自变量 x 与函数 y.

(2)运用实际问题中的相关专业知识,根据所给条件确定等式关系.