十一五

高等职业教育“十一五”规划教材

21世纪高等职业院校通识教育规划教材

Mathematics

高等数学（下册）

▪ 通识教育规划教材编写组 组编

▪ 于峰峰 主编

▪ 纪春静 代业明 乔晗 周长礼 副主编

人民邮电出版社

POSTS & TELECOM PRESS

高等职业教育"十一五"规划教材

21世纪高等职业院校通识教育规划教材

高等数学（下册）

- 通识教育规划教材编写组 组编
- 于峰峰 主编
- 纪春静 代业明 乔晗 周长礼 副主编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（C I P）数据

高等数学. 下册 / 通识教育规划教材编写组组编
-- 北京 ： 人民邮电出版社，2010.5
21世纪高等职业院校通识教育规划教材
ISBN 978-7-115-22593-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①通… Ⅲ. ①高等数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第047248号

内 容 提 要

本套教材是根据教育部颁布的《高职高专院校理工类专业高等数学课程教学的基本要求》和高职高专院校理工类专业高等数学课程的教学大纲，在认真总结高职高专高等数学教学改革经验的基础上，结合编者多年的教学实践经验和同类教材发展趋势，针对高职高专层次的理工类专业学生而编写的。

本套教材分上、下两册，共12章。本书为高等数学（下册），内容涵盖了空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容。本书讲解深入浅出、通俗易懂、论证严谨，并且按照循序渐进的原则选编了大量教学例题和习题。

本书可作为高职高专机械、电气、电子、土木、化工、冶金、计算机等理工类各专业及成人高等学校的数学基础课程教材，也可作为工程技术人员的数学参考书。

高等职业教育"十一五"规划教材
21世纪高等职业院校通识教育规划教材
高等数学（下册）

◆ 组　　编　通识教育规划教材编写组
主　　编　于峰峰
副 主 编　纪春静　代业明　乔　晗　周长礼
责任编辑　刘　琦

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京鑫正大印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：11
字数：210千字　2010年5月第1版
印数：1－3 000册　2010年5月北京第1次印刷

ISBN 978-7-115-22593-1

定价：20.00元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

Preface

本套教材是根据教育部颁布的《高职高专院校理工类专业高等数学课程教学的基本要求》，在认真总结高职高专高等数学教学改革经验的基础上，结合编者的教学实践经验和同类教材发展趋势编写而成的。

本套教材从高职高专理工类专业学生的实际需求出发，以培养学生的创新能力和解决实际问题的能力为目标，对传统的高等数学内容进行了适当的精简，力求突出高职高专教育学以致用的特点，从而为学生学习专业基础课、专业课提供必需的数学知识与数学方法，并为部分同学的后续学习和进一步深造奠定必要的数学基础。

在内容安排上，我们本着“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，着重数学方法的介绍，淡化理论的推导和证明，取消繁杂的计算，既保证基本知识要点，又满足各专业对数学的基本需要。本套教材叙述深入浅出、通俗易懂、简明扼要、循序渐进，结构上呈模块化，便于组合，以适合不同专业、不同层次的教学要求。

本套教材有以下几个特点。

（1）加强对基本概念、理论的理解和应用，借助几何图形和实际问题强化了概念和定理的直观性，注重与中学知识的衔接，培养学生的逻辑思维能力。

（2）为了突出重点、解释难点，在相应的地方给出了相应的注释。

（3）对常用公式及方法汇总成表格的形式，以便于对照记忆和查阅。

（4）每节都精选了大量例题和习题，以便于老师组织教学和学生自学。

（5）每章前列有学习目标，及时指出知识的要点和大纲要求，使读者提前了解各章内容，便于自学。每章最后都配有比较综合的复习题，以提高学生对所学知识的综合运用能力和解决实际问题的能力。

（6）本套教材在对传统高等数学内容进行适当精简的同时，又兼顾了内容的完整性，便于教师组织教学。

本套教材分上、下册，参考学时共 152 学时，其中教师讲授为 116 学时。各章的参考学时参见下面的学时分配表（其中标有“*”的章节为选学内容），使用本套教材的教师可根据教学实际灵活安排掌握。

学时分配表

章　节	课 程 内 容	学 时 分 配	
		讲　授	习题课时
第 1 章	函数与极限	12	4
第 2 章	导数与微分	10	4
第 3 章	微分中值定理与导数的应用	12	4
第 4 章	不定积分	8	2
第 5 章	定积分	8	2
第 6 章	定积分的应用	6	2
第 7 章	微分方程	8	2
第 8 章	空间解析几何与向量代数	12	4
第 9 章	多元函数微分学	14	4
第 10 章	重积分	8	2
第 11 章	*曲线积分与曲面积分	8	2
第 12 章	无穷级数	10	4
课 时 总 计		116	36

本书为高等数学（下册），由于峰峰任主编，纪春静、代业明、乔晗、周长礼任副主编。全书由于峰峰、纪春静、代业明共同编写。

本书由南京航空航天大学陈克兵副教授做了详细的审阅，田志远教授、赵凯教授、赵维加教授在本书的编写过程中给予了大力支持，并提出了许多宝贵意见和建议，在此表示衷心的感谢！

参加本书编写工作的还有沈精虎、黄业清、宋一兵、谭雪松、冯辉、郭英文、计晓明、董彩霞、滕玲、田晓芳、管振起等。由于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2010 年 2 月

目录

Contents

第 8 章　空间解析几何与向量代数

【学习目标】

- 了解向量的概念，掌握空间直角坐标系的定义及点的表示方法。
- 掌握单位向量、向量的分解和坐标表示式、方向角与方向余弦。
- 掌握向量的运算（加法运算、数乘运算、数量积、向量积）。
- 掌握两个向量垂直、平行的充要条件，了解向量夹角的求法。
- 了解一般曲面、旋转曲面、柱面的方程和常用二次曲面的方程及图形。
- 了解曲线的参数式方程、一般式方程，曲线的投影，投影柱面。
- 掌握平面与直线的方程的求法，平面与平面、直线与直线、直线与平面的位置关系。

空间解析几何的建立与平面解析几何类似，通过坐标法建立空间中的点与有序数组的一一对应，空间图形与方程的对应，从而用代数方法研究几何问题。

空间解析几何的知识在工程技术等领域有着广泛的应用，对多元函数微积分的学习也起着重要作用。本章将先介绍向量的概念及线性运算，然后建立空间直角坐标系，介绍空间解析几何的有关内容。

8.1　向量及其线性运算

本节先介绍向量的概念及线性运算，然后建立空间直角坐标系，利用坐标作向量的线性运算。

8.1.1　向量的概念

在客观世界中有两类量，一类只有大小没有方向，如温度、距离、质量、体积等，这一类量叫做**数量**（**标量**）；另一类既有大小又有方向，如力、力矩、位移、速

度、加速度等，这一类量叫做**向量**（**矢量**）。

在数学上，常用一条有方向的线段即有向线段来表示向量。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。以 A 为起点、B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$，如图 8-1 所示。

图 8-1

有时也用一个黑体字母（书写时，在字母上面加箭头）来表示，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等。

在数学上我们只研究与起点无关的向量，即**自由向量**（简称**向量**）。也就是说，我们只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方。当遇到与起点有关的向量时，可在一般原则下作特别处理。因此，如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。即经过平行移动后能完全重合的向量是相等的。

向量的大小叫做向量的**模**。向量 $\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$。模等于 1 的向量叫做**单位向量**。模等于零的向量叫做**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$。零向量的方向可看作是任意的。

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，设 $\theta=\angle AOB$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，则称 θ 为**向量 a 与 b 的夹角**，记作 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 或 $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$，如图 8-2 所示。若 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$。若 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$。如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 $0\sim\pi$ 之间取任意值。因此，可认为零向量与任何向量都平行或垂直。

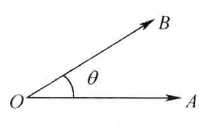

图 8-2

8.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC，如图 8-3 所示，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

上述作出两向量之和的方法称为向量相加的**三角形法则**。

与力学上求合力的平行四边形法则类似，我们也有向量相加的**平行四边形法则**。

即当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为边作一平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC，如图 8-4 所示，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

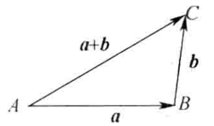

图 8-3

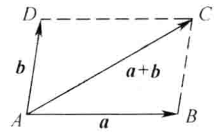

图 8-4

向量的加法符合下列运算规律：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，并按向量的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和。如图 8-5 所示，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$$

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$。由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$$

也就是说，把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，即可得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，如图 8-6 所示。

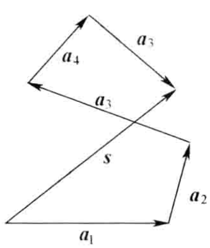

图 8-5

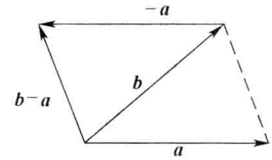

图 8-6

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$。

显然，由三角形法则，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$

的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 即为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，如图 8-7 所示。

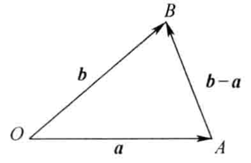

图 8-7

2. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的**乘积**记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，它的方向可以是任意的。特别地，当 $\lambda=1$ 时，有 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；当 $\lambda=-1$ 时，有 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$。

向量与数的乘积符合下列运算规律：

（1）结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（2）分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

向量相加及数乘向量统称为向量的**线性运算**。

设 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，按照向量与数的乘积的规定，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a,\quad \boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\ \text{其中}\ |\boldsymbol{a}|\neq 0$$

即一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量。

下面我们用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系。

定理 1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

定理 1 是建立数轴的理论依据。我们知道，给定一个点、一个方向和单位长度，就确定了一条数轴。由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，给定一个点和一个单位向量就确定了一条数轴。设点 O 和单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox，如图 8-8 所示，则对于轴上任一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由于 $\overrightarrow{OP}\,/\!/\,\boldsymbol{i}$，由定理 1，必有唯一的实数 x，使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$（实数 x 称为**轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值**），并且 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应。从而轴上的点 P 与实数 x 一一对应，即

图 8-8

$$\text{点}\ P \leftrightarrow \text{向量}\ \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i} \leftrightarrow \text{实数}\ x$$

由此，定义实数 x 为轴上点 P 的坐标，即轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$。

3. 空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和 3 个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，就确定了 3 条都以 O 为

原点的两两垂直的数轴，依次记为 **x 轴**（横轴）、**y 轴**（纵轴）、**z 轴**（竖轴），统一称为**坐标轴**。它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系或 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 坐标系，如图 8-9 所示。通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的 4 个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 8-10 所示。

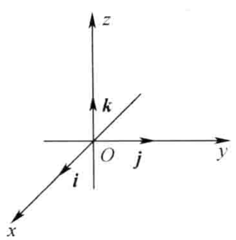

图 8-9

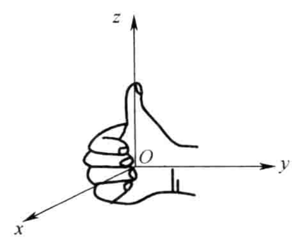

图 8-10

3 条坐标轴中任意两条所确定的平面称为**坐标面**，3 条坐标轴定出的 3 个坐标面依次为 **xOy 面**、**yOz 面**、**zOx 面**。3 个坐标面把空间分成 8 个部分，每一部分称为一个**卦限**。含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限称为**第一卦限**，第二、三、四卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定。第五至第八卦限，在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，8 个卦限分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示，如图 8-11 所示。

设 M 为空间任意一点，$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$。以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$，如图 8-12 所示，则有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。此式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 3 个坐标轴方向的**分向量**。

由此可见，点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与 3 个有序数 x、y、z 之间有一一对应关系：

$$M \leftrightarrow \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \leftrightarrow (x,y,z)$$

有序数 x、y、z 称为**向量 $\boldsymbol{r}$**（在坐标系 $Oxyz$ 中）**的坐标**，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；有序数 x、y、z 也称为**点 M**（在坐标系 $Oxyz$ 中）**的坐标**，记作 $M(x,y,z)$。向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$

称为点 M 关于原点 O 的**向径**。

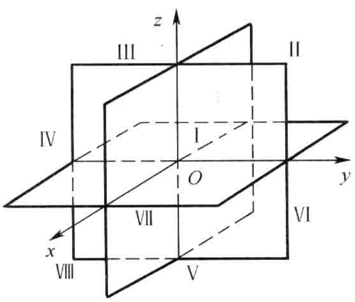

图 8-11

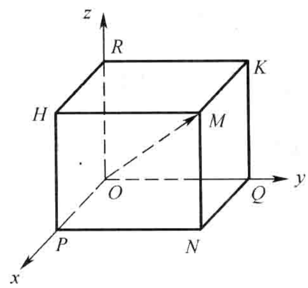

图 8-12

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征。例如：在 yOz 面上的点，有 $x=0$；在 zOx 面上的点，有 $y=0$；在 xOy 面上的点，有 $z=0$。在 x 轴上的点，有 $y=z=0$；在 y 轴上的点，有 $x=z=0$；在 z 轴上的点，有 $x=y=0$。对于原点 O，有 $x=y=z=0$。

4. 利用坐标作向量的线性运算

利用坐标对向量进行加、减及与数的乘法，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算。设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),\quad \lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

由定理 1 可知，当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，其坐标表示式为

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$$

即向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z} \tag{1}$$

注 当 a_x、a_y、a_z 有一个为零，如 $a_x=0$，a_y、$a_z\neq 0$，此时（1）式应理解为

$$\begin{cases} b_x=0 \\ \dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z} \end{cases}$$

当 a_x、a_y、a_z 有两个为零，如 $a_x=a_y=0$，$a_z\neq 0$，此时式（1）应理解为

$$\begin{cases} b_x=0 \\ b_y=0 \end{cases}$$

例 1 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$，试用坐标表示式表示向量 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$。

解 因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(1,-1,0)-(0,1,2)=(1,-2,-2)$，所以 $-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$。

5. 向量的模与方向余弦

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，由图 8-12 可知

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

由勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2}$$

从而可得向量模的坐标表示式

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$，则点 A 与点 B 间的距离 $|AB|$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模。

由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，即可得 A、B 两点间的距离

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与 3 条坐标轴的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**。由图 8-13 可知，设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，因为 x 是有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值，$MP\perp OP$，所以

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OM|}=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}$$

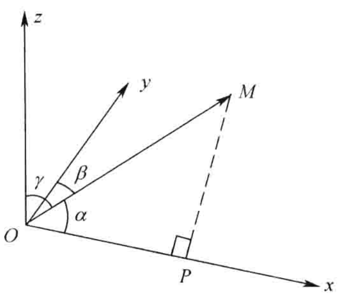

图 8-13

类似可得

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

于是

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e}_r$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**。上式表明，以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$。由此可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

例 2 求证以三点 $M_1(4,1,9)$、$M_2(10,-1,6)$、$M_3(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形。

证 因为

$$|M_1M_2|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49$$
$$|M_2M_3|^2=(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2=98$$
$$|M_3M_1|^2=(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2=49$$

所以 $|M_1M_2|=|M_3M_1|$，且 $|M_1M_2|^2+|M_3M_1|^2=|M_2M_3|^2$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰直角三角形。

例 3 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量 $\boldsymbol{e}$。

解 因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=\sqrt{121}=11$，而与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{11}(6,7,-6)=(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{7}{11})$$

所以，平行于 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\boldsymbol{e}=\pm\boldsymbol{e}_a=\pm(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{7}{11})$。

例 4 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角。

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1)$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$$
$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=\frac{1}{2}$$
$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{3\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$$

6. 向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴，见图 8-14。任给向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'（点 M' 称为**点 M 在 u 轴上的投影**），则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量。设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影**，记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$。

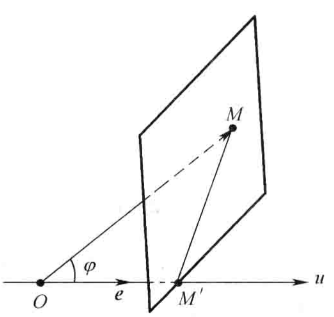

图 8-14

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则坐标 a_x、a_y、a_z 就是 $\boldsymbol{a}$