普通高等教育"十二五"规划教材
工科数学精品丛书

丛书主编 李德宜 等

工程数学
复变函数与积分变换学习指导

王志明 肖自碧 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书

丛书主编 李德宜 等

工程数学

复变函数与积分变换学习指导

王志明 肖自碧 主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论、共形映射、傅里叶变换和拉普拉斯变换.各章内容包括基本要求、内容提要、释疑解难、例题分析、复习题和自测题,并附有复习题和自测题解答.

本书各章具有内容充实、题型丰富、覆盖面较广的特点,可作为高等学校理工科相关专业的课程辅助教材,以及学生及自学人员学习的课外辅导书,也可作为教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.复变函数与积分变换学习指导/王志明,肖自碧主编.—北京:科学出版社,2014.7

(工科数学精品丛书)

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-041373-4

Ⅰ.①工… Ⅱ.①王… ②肖… Ⅲ.①工程数学—高等学校—教学参考资料 ②复变函数—高等学校—教学参考资料 ③积分变换—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①TB11 ②O174.5 ③O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第150553号

责任编辑:谭耀文 王雨舸/责任校对:董艳辉

责任印制:高 嵘/封面设计:苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本:B5(720×1000)

2014年8月第 一 版 印张:10 3/4

2014年8月第一次印刷 字数:205 000

定价:25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书

《工程数学·复变函数与积分变换学习指导》编委会

主　编　王志明　肖自碧

副主编　余长春　马建清　喻　敏　胡　佳

编　委（按姓氏笔画为序）

丁咏梅　马建清　王志明　杨　波

余长春　肖自碧　张传洲　胡　佳

龚谊泳　喻　敏

《工科数学精品丛书》序

工科学生毕业多年后时常感言，数学知识很多似乎没有派上用处，但数学训练、数学思想和精神，却无时无刻不在发挥着积极的作用，成为取得成功的最重要因素之一.

数学是一门高度抽象的学科，但是它非人类精神纯粹自由创造和想像，而是源于自然和工程问题.系统传授数学知识当然是工科数学教学的基本任务与责任，同时，掌握了数学的思想方法和精神实质，就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论，显示出无穷无尽的威力.工科数学创新教学，增强数学应用背景的讲授，拓宽学生的知识面，了解数学学科在科学研究领域的重要性，为学生打开数学与应用的窗口等，能培养学生的创新意识与精神，提高数学思维与素养，真正达到工科数学教学的目的.

工科数学精品教材的编写与成熟，在开放的视野与背景下，得到认同，自然成为纸质教材与数字出版的精品，从而得到广泛认可和使用.

在学会、领导和专家的关怀和指导下，本区域若干所全军重点、一本和省重点高校，其工科数学教材，在科学出版社出版和再版.10 余年以来，教学和教材理念从素质教育，到分类分层教学改革，到数学思想、方法与创新教育，历经各校几届领导和责任教授的共同努力，逐渐成熟，成为具有较高质量的核心精品.

教材转型与数字出版呼之欲出，大趋势赫然在前，教材又重新经历新的考验.《工科数学精品丛书》正是按此理念和要求，直面开放的视野与背景，将改革与创新的成果汇集起来，重新审视和操作，精益求精，以赢得内容先机，修订版和新编教材均是如此.

修订和新编的核心理念，一是体现数学思维，将数学思想和方法(如数学建模)融入教材体系、内容及其应用；二是深化改革与创新，面向开放和数字出版的大平台，赢得内容先机，营造精品.

《工科数学精品丛书》为工科数学课程教材：高等数学、线性代数、概率论与数理统计、数学建模、数学实验、复变函数与积分变换、数值分析、数学物理方程、离散数学、模糊数学、运筹学等.上述各课程大多为省级精品课程.

丛书注重质量，讲究适用和教学实践性，体系相对完整与系统，加强应用性，按照先进、改革与创新等编写原则和基本要求安排教材框架、结构和内容.

丛书具有明确的指导思想：

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂.

(2) 注重教学创新，加强教学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性.增强数学应用背景的介绍，拓宽学生的知识面，了解数学学科在科学研究领域的重要性，为学生打开数学与应用的窗口，培养学生的创新意识与精神，提高数学思维与素养，真正达到工科数学教学的目的.

(3) 融入现代数学思想(如数学建模)，分别将 Mathematic、Matlab、Sas、Sps 等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力.

(4) 强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便.

(5) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(6) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样.书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

丛书为科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材.

《工科数学精品丛书》编委会

2014 年 3 月

前　言

“复变函数与积分变换”是机电等工科专业必修的专业基础课程之一，是学习电路理论、通信工程、信号与系统等多门后继专业课的基础，学习这门课程对于培养学生的专业能力、创新精神以及未来的业务素质都是非常重要的.我们根据教育部“复变函数与积分变换”非数学类课程教学的基本要求，综合考虑该课程目前的实际教学情况以及实践性较强的特点，结合多年的教学经验，编写了这本《复变函数与积分变换学习指导》.作为学习辅导书，本书和尹水仿、李寿贵主编的《复变函数与积分变换》(第二版)教材相配合，旨在帮助读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法，提高分析问题和解决问题的能力.

本书按章编写，每章分为基本要求、内容提要、释疑解难、例题分析、复习题和自测题及复习题解答、自测题解答等部分.“基本要求”具体地指出学习每一章应掌握的内容和程度.“内容提要”概括每一章的基本概念、重要定理、常用公式以及它们之间的关系，使读者能从整体上把握每一章的脉络.“释疑解难”通过剖析疑难问题、易错概念及常见错误等，指导学生正确理解基本概念.“例题分析”部分精选各类题型，由浅入深，由易到难，进行深入细致的分析和详细的讲解，所选例题涵盖每章所有重要知识点.各章配有复习题和自测题.复习题供学生检测对各章内容的掌握情况.自测题可用于测试学生对各章基本知识和基本方法的掌握程度.

本书内容充实、题型丰富、覆盖面广，可作为高等学校理工科相关专业的课程辅助教材，以及学生及自学人员学习的课外辅导书，也可作为教师的教学参考书.

本书由王志明、肖自碧任主编，余长春、马建清、喻敏、胡佳任副主编，并由王志明提出编写思路及提纲.所有复习题和自测题都有详细解答，便于学生对照学习检查.全书由王志明、肖自碧统稿，杨波、龚谊承、丁咏梅、张传洲等参加了编写的整理及校对等工作.

由于编者水平有限，书中难免出现不妥及不足之处，敬请广大读者批评指正.

编者

2014 年 6 月

目　　录

第一章　复数与复变函数…… 1
基本要求…… 1
内容提要…… 1
释疑解难…… 5
例题分析…… 6
复习题一…… 9
自测题一…… 11
第二章　解析函数…… 13
基本要求…… 13
内容提要…… 13
释疑解难…… 17
例题分析…… 19
复习题二…… 26
自测题二…… 28
第三章　复变函数的积分…… 30
基本要求…… 30
内容提要…… 30
释疑解难…… 33
例题分析…… 35
复习题三…… 38
自测题三…… 40
第四章　级数…… 42
基本要求…… 42
内容提要…… 42
释疑解难…… 45
例题分析…… 48
复习题四…… 53
自测题四…… 54
第五章　留数理论…… 56
基本要求…… 56

内容提要 …… 56
释疑解难 …… 60
例题分析 …… 63
复习题五 …… 70
自测题五 …… 71
第六章　共形映射 …… 73
基本要求 …… 73
内容提要 …… 73
释疑解难 …… 76
例题选讲 …… 77
复习题六 …… 81
自测题六 …… 82
第七章　傅里叶变换 …… 84
基本要求 …… 84
内容提要 …… 84
释疑解难 …… 88
例题选讲 …… 88
复习题七 …… 95
自测题七 …… 95
第八章　拉普拉斯变换 …… 98
基本要求 …… 98
内容提要 …… 98
释疑解难 …… 102
例题选讲 …… 102
复习题八 …… 111
自测题八 …… 112
参考答案 …… 114

第一章　复数与复变函数

基本要求

1. 理解复数的相关概念，熟练掌握并灵活运用复数的各种表示法.

2. 熟练掌握复数的加、减、乘、除、乘方、开方和共轭运算.

3. 了解复数的球面表示及无穷远点的概念.

4. 理解区域、单连通域、多连通域以及简单曲线的概念，会用复变数的方程和不等式表示常用曲线和区域.

5. 理解复变函数和映射的概念，理解复变函数和实二元函数的关系，能将一个复变量函数看成两个实二元函数，也能将两个实二元函数写成一个复变函数.

6. 理解复变函数的极限与连续的概念.

内容提要

一、复数的概念

(1) 对于任意二实数 x,y，称 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 为复数，其中 i 为虚数单位 ($\mathrm{i}^2=-1$).称 $x=\mathrm{Re}z$ 为复数 z 的实部，$y=\mathrm{Im}z$ 为复数 z 的虚部.

(2) 当 $x=0$ 且 $y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x+0\mathrm{i}$ 为实数.

(3) 两个复数相等，当且仅当它们的实部和虚部分别相等；一个复数 z 等于 0，当且仅当它的实部和虚部同时等于 0.

注　与实数不同，一般来说，任意两个复数不能比较大小.

(4) 实部相同而虚部互为相反数的两个复数称为共轭复数.复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数为 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

二、复数的各种表示法

1. 复数的复平面表示

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ $(x,y\in R)$ 可以用复平面上的点 (x,y) 来表示.

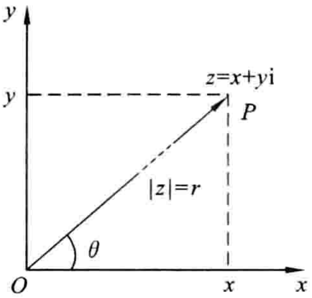

图 1.1

2. 复数的向量表示

如图 1.1 所示，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用起点为原点，终点为 $P(x,y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示.

(1) 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为 z 的模或绝对值，记为

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

显然，下列各式成立

$$|z|\leqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|,\quad \mathrm{Re}(z)\leqslant|z|,$$
$$\mathrm{Im}(z)\leqslant|z|,\quad z\bar{z}=|z|^2=|z^2|,\quad |z|=|\bar{z}|,$$
$$|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$
$$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

(2) 当 $z\neq 0$ 时，以正实轴为始边，以表示 z 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}z=\theta$. 显然，$\tan(\mathrm{Arg}z)=\dfrac{y}{x}$.

任何一个复数 $z\neq 0$ 有无穷多个辐角，如果 θ_1 是其中一个，则 $\mathrm{Arg}z=\theta_1+2k\pi$ (k 为整数) 就给出了 z 的全部辐角.

(3) 在 z ($\neq 0$) 的所有辐角中，满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记为 $\theta_0=\arg z$. 非零复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的辐角主值可由下式确定

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0;\\[2mm] \pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x<0,y>0;\\[2mm] -\pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x<0,y<0;\\[2mm] \pi, & \text{当 } x<0,y=0;\\[2mm] \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,y\gtrless 0.\end{cases}$$

3. 复数的三角形式

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

其中 r 是非零复数 z 的模，故为正实数；θ 是 z 的任意一个辐角.

4. 复数的指数形式

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\quad(r>0).$$

5. 复数的复球面表示

复数可以用复球面上的点表示.

(1) 球面上的点，除去北极 N 外，与复平面内的点之间存在着一一对应的

关系.

(2) 为了使复平面与球面上的点一一对应,我们规定:复平面上有一个唯一的"无穷远点",它与球面上的北极 N 相对应.相应地规定:复数中有一个唯一的"无穷大"与复平面上的无穷远点相对应,并记为 ∞.这样一来,球面上的每一个点,就有唯一的一个复数与它对应,这样的球面称为复球面.

(3) 包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面;不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面或称复平面.

三、复数的运算

1. 复数的代数运算

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,

(1) 加减法:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2);$$

(2) 乘法:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 + x_1 y_2); \end{aligned}$$

(3) 除法:

$$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 \neq 0,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2};$$

(4) 共轭及其性质:

1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

2) $\overline{\overline{z}} = z$;

3) $z \cdot \overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;

4) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z), z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

2. 复数的乘幂和方根

(1) 乘积与商:若复数 $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$,则有

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 - \theta_2)} \ (r_2 \neq 0).$$

即:两个复数乘积的模等于它们的模的乘积,两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和;两个复数的商的模等于它们的模的商,两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

(2) 乘方:若 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$,则

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

(3) 开方：若 $\omega^n = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则

$$\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0,1,2,\cdots,n-1).$$

注 非零复数 z 一定有 n 个不同的 n 次方根.

四、平面点集的有关概念

(1) 区域的概念.

(2) 单连通域与多连通域.

(3) 平面曲线的复参数方程

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

过点 z_1, z_2 的直线的复方程为 $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$ $(t \in R)$.

五、复变函数

1. 定义

设 G 是一个复数集合，如果有一个确定的法则 f 存在，按照这一法则，对于集合 G 中的每一个复数 $z = x + iy$，有一个或几个复数 $\omega = u + iv$ 与之对应，则称复变数 ω 是复变数 z 的复变函数，记 $\omega = f(z)$.

2. 映射的概念

函数 $\omega = f(z)$ 在几何上可以看做是把 z 平面上的一个点集 G（定义集合）变到 ω 平面上的一个点集 G^*（函数值集合）的映射（或变换）.

六、复变函数的极限和连续

1. 复变函数的极限

(1) 定义：设函数 $\omega = f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内有定义，如果有一确定的数 A 存在，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，相应地必有一正数 $\delta(\varepsilon)$ $(0 < \delta \leqslant \rho)$，使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时有 $|f(z) - A| < \varepsilon$，那么称 A 为 $f(z)$ 在 $z \to z_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

(2) 设

$$\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad A = u_0 + iv_0, z_0 = x_0 + iy_0,$$

则 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ 的充分必要条件为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

注　(1) 复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的极限问题转化成为求两个二元实变函数的极限问题.

(2) 复变函数的极限定义虽然在形式上与一元实函数的极限定义相似,但实质上却相当于二元实函数的极限.定义中 z 趋向 z_0 的方式是任意的,即无论 z 从什么方向、以何种方式趋于 z_0,$f(z)$ 都要趋向于同一个常数 A,这比一元实变函数极限定义的要求苛刻得多.

(3) 如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$,$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$,则

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B,\quad \lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\quad (B\neq 0).$$

2. 复变函数的连续性

(1) 定义:如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$,则 $f(z)$ 在 z_0 处连续.如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续,则 $f(z)$ 在 D 内连续.

(2) 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x,y)$,$v(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处连续.

(3) 连续函数的和、差、积、商(分母不为零) 仍是连续函数.连续函数的复合函数仍为连续函数.

(4) 常用结论:有理整函数(多项式)$\omega=P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ 在复平面上处处连续;有理分式函数 $\omega=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$(其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式) 在复平面内使分母不为零的点处连续.

释疑解难

问题 1　是否任意复数都有辐角?

答　否.非零复数都有确定的辐角,而复数 $z=0$ 的模为零,辐角不确定.

问题 2　下列等式是否正确?

(1) $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$

(2) $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$

(3) $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$

(4) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$

答　(1)、(3) 两个等式是正确的.设 θ_1,θ_2 分别是复数 z_1,z_2 的辐角的一个值

是复数 z_1, z_2 的辐角的一个值，则 $\theta_1+\theta_2$ 是复数 $z_1 \cdot z_2$ 的辐角的一个值，故

$$\mathrm{Arg}z_1=\theta_1+2k_1\pi,\quad \mathrm{Arg}z_2=\theta_2+2k_2\pi,$$
$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2+2k\pi\quad (k_1,k_2,k\in Z),$$

因此

$$\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2=\theta_1+\theta_2+2(k_1+k_2)\pi=\mathrm{Arg}(z_1z_2).$$

由于任意非零复数的辐角都有无穷多个值，因此这两个等式两边的取值都可以看成是一个集合，等式成立的意义是指两个集合相等，是全体意义上的相等，而不是某一组值相等.同理，(3) 式也成立.

(2)、(4) 不正确.如 $\arg(-1+\mathrm{i})=\dfrac{3\pi}{4}$，$\arg(\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{2}$，$\arg(-\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{2}$，但

$$\arg[(-1+\mathrm{i})\mathrm{i}]=\arg(-1-\mathrm{i})=-\frac{3\pi}{4}\neq\arg(-1+\mathrm{i})+\arg(\mathrm{i}),$$
$$\arg\left(\frac{-1+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}\right)=\arg(-1-\mathrm{i})=-\frac{3\pi}{4}\neq\arg(-1+\mathrm{i})-\arg(-\mathrm{i}).$$

例题分析

例 1.1 将复数 $z=\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$ 化为三角形式与指数形式.

分析 将一个复数 z 化为三角形式与指数形式的关键在于求出该复数的模与辐角的一个值(通常取主值).通常的方法是先将 z 化成代数形式 $z=x+\mathrm{i}y$，再利用 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 和反正切公式分别求出它的模与辐角主值.注意到复数 z 的形式特点，本题还可以利用乘积和商的模和辐角公式求复数 z 的模与辐角.

解法 1 将 z 的分子与分母同乘以 $(\sqrt{3}+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$，得

$$z=\frac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2(1-\mathrm{i})^2}{|\sqrt{3}-\mathrm{i})|^2\ |1+\mathrm{i}|^2}=\frac{(2+2\sqrt{3}\mathrm{i})(-2\mathrm{i})}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

所以

$$|z|=1,\arg z=\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}.$$

从而得到 z 的三角形式与指数形式

$$z=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

解法 2 $|z|=\dfrac{|\sqrt{3}+\mathrm{i}|\ |1-\mathrm{i}|}{|\sqrt{3}-\mathrm{i}|\ |1+\mathrm{i}|}=1,$

$$\operatorname{Arg}z=\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+\mathrm{i})+\operatorname{Arg}(1-\mathrm{i})-\operatorname{Arg}(\sqrt{3}-\mathrm{i})-\operatorname{Arg}(1+\mathrm{i})=-\frac{\pi}{6}+2k\pi.$$

例 1.2　求复数 $z=1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\ (0<\theta\leqslant\pi)$ 的模和辐角主值.

解　$$z=1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

由于 $0<\theta\leqslant\pi$,故有 $0<\frac{\theta}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$,$0\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$,且 $\sin\frac{\theta}{2}>0$,因此

$$|z|=2\sin\frac{\theta}{2},\quad \arg z=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}.$$

例 1.3　若 $|z|=1$,试证对任何复数 a 与 b,有 $\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1$.

证法 1　$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|^2=\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\cdot\overline{\left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right)}=\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\cdot\frac{\overline{az}+\bar{b}}{b\bar{z}+a}$$
$$=\frac{a\bar{a}z\bar{z}+b\bar{b}+az\bar{b}+\bar{a}b\bar{z}}{b\bar{b}z\bar{z}+a\bar{a}+az\bar{b}+\bar{a}b\bar{z}}$$
$$=\frac{|a|^2\ |z|^2+|b|^2+2\operatorname{Re}(az\bar{b})}{|b|^2\ |z|^2+|a|^2+2\operatorname{Re}(az\bar{b})}$$
$$=\frac{|a|^2+|b|^2+2\operatorname{Re}(az\bar{b})}{|b|^2+|a|^2+2\operatorname{Re}(az\bar{b})}=1,$$

所以 $\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1$.

证法 2　因为 $|z|=1$,所以 $z\cdot\bar{z}=1$.故
$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=\left|\frac{az+b}{\bar{b}+\bar{a}\bar{z}}\cdot\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{az+b}{\overline{b+az}}\cdot\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{az+b}{\overline{b+az}}\right|\cdot\frac{1}{|z|}=1.$$

例 1.4　解方程 $(1+z)^3=(1-z)^3$.

解　观察可知 $z=1$ 不是方程的根,所以原方程可写成 $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^3=1$.令 $\omega=\frac{1+z}{1-z}$,则 $\omega^3=1$,其解为

$$\omega=\cos\frac{2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}\quad(k=0,1,2).$$

即 $\omega=1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.而 $z=\frac{\omega-1}{\omega+1}$,因此,原方程的根为

$$z=0,\ \sqrt{3}\mathrm{i},\ -\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

例 1.5　指出下列各式中点 z 所确定的平面图形,并作出草图.

(1) $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)$

(2) $\frac{\pi}{3} \leqslant \arg z \leqslant \frac{2\pi}{3}$ 且 $2 < |z| < 3$

(3) $|z-2| + |z+2| \leqslant 6$

(4) $z\bar{z} - (2+\mathrm{i})z - (2-\mathrm{i})\bar{z} = 4$

解　(1) $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)$ 即 $x > y$，表示直线 $y = x$ 右下方的半平面(如图 1.2 所示).

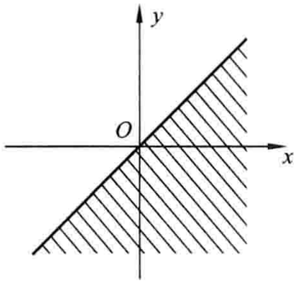

图 1.2

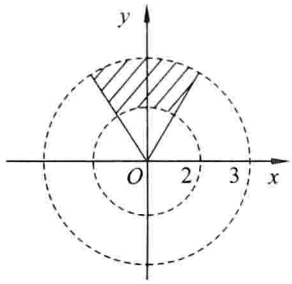

图 1.3

(2) $\arg z = \frac{\pi}{3}$ 表示的是以原点为端点，斜率为$\sqrt{3}$ 的半射线 $y = \sqrt{3}x$ $(x > 0)$，$\arg z = \frac{2\pi}{3}$ 表示的是以原点为端点，斜率为 $-\sqrt{3}$ 的半射线 $y = -\sqrt{3}x$ $(x < 0)$，而 $|z| = 2$ 和 $|z| = 3$ 分别表示以原点为圆心半径为 2 和半径为 3 的圆.因此满足 $\frac{\pi}{3} \leqslant \arg z \leqslant \frac{2\pi}{3}$ 且 $2 < |z| < 3$ 的一切点所构成的是上述两条射线和两个圆所围成的部分(如图 1.3 所示).

(3) 根据复数差的模的几何意义知，$|z-2|$ 和 $|z+2|$ 分别表示动点 z 到 2 和 -2 的距离，由椭圆的定义可知满足不等式的一切点所确定的是以 ± 2 为焦点，长半轴为 3 的椭圆及其内部(如图 1.4 所示).

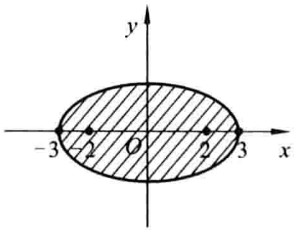

图 1.4

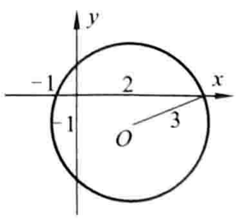

图 1.5

(4) 设 $z = x + \mathrm{i}y$，方程可写成

$$x^2 + y^2 - (2+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) - (2-\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y) = 4,$$