线性代数

郑恒武　王树泉　编著

中国科学技术大学出版社

线性代数

郑恒武　王树泉　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

全书共分5章，内容包括：行列式、矩阵、线性方程组与向量、矩阵的特征值与特征向量、二次型与正定矩阵. 本书按节配备适当的习题.

本书精选内容，突出重点，注重基础理论的严谨性，强调基本方法的实用性，适合作为普通高等学校理工类、经济类、管理类本科专业的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/郑恒武，王树泉编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2014.6
ISBN 978-7-312-03472-5

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①郑…　②王…　Ⅲ. 线性代数　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第094330号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷　合肥现代印务有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　14.25
字数　231千
版次　2014年6月第1版
印次　2014年6月第1次印刷
定价　25.00元

前　言

日本数学家米山国藏在其专著《数学的精神、思想和方法》中的一段话引人深思, 他指出:“在学校学的数学知识, 毕业后没什么机会去用, 一两年后很快就忘掉了. 然而, 不管他们从事什么工作, 唯有深深铭刻在心中的数学精神, 数学的思维方法、研究方法、推理方法和看问题的着眼点等, 却随时随地发生作用, 使他们受益终生.” 而这正是当我们把所学的数学知识都排除或忘掉之后剩下的东西——数学素养.

线性代数作为理工类、经济类、管理类本科专业的必修课高等数学的重要组成部分, 对培养学生的数学素养发挥着无可替代的作用.

线性代数的主要研究对象是矩阵、线性方程组与向量以及线性空间与线性变换. 本书讲述线性代数的基本内容, 包括行列式、矩阵、线性方程组、向量、特征值与特征向量、二次型与正定矩阵. 线性空间与线性变换不在本书中介绍. 线性代数的内容对后续课程以及在自然科学、工程技术、经济学及管理科学等众多领域都有广泛的应用.

在本书的处理上有如下的一些想法和做法:

1. 精选内容, 突出重点, 着重体现以矩阵为工具, 以线性方程组为主线的思想.

行列式、矩阵、向量是以如何解线性方程组这个问题联结起来的. 利用行列式解线性方程组, 有克拉默法则. 利用矩阵解线性方程组, 有矩阵的初等行变换解线性方程组, 即高斯消元法. 利用向量解线性方程组, 有线性方程组解的结构. 特征值与特征向量是行列式与线性方程组的应用. 二次型是行列式、矩阵与线性方程组的综合应用.

矩阵不仅是数学中一个极其重要的工具, 更重要地, 它还是线性代数的研究对象, 它渗入线性代数的各个章节中. 这是因为, 行列式其实可以视为方阵的行列式, 线性方程组可以通过其增广矩阵刻画, 向量是特殊的矩阵, 二次型可以通过对称阵刻画.

2. 注重基础理论的严谨性和强调基本方法的实用性. 重视基本概念和基本理论的叙述, 力求做到深入浅出、清晰严谨.

在引入概念之前, 首先给出一个具体例子, 比如矩阵的秩、齐次线性方程组的基础解系、矩阵的特征值与特征向量; 或者首先回忆已有知识, 比如引入二阶及三阶行列式的概念之前介绍二元及三元线性方程组的求解, 然后利用归纳法推广到 n 阶行列式; 在给出矩阵的初等行变换的概念之前, 先看一个用消元法解三元线性方程组的具体例子; 向量组的线性相关性的引入先考察齐次方程组有非零解.

在介绍计算方法之前, 首先回忆已有相关知识, 比如介绍用可逆线性变换化二次型为标准形的方法时, 首先给出一个二元二次型化为标准形的例子.

有些定理与性质没有给出证明, 或因证明较复杂, 或因证明用到超出教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的非数学专业线性代数课程教学基本要求及教育部最新颁布的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的内容和要求, 有的只是通过实例加以说明. 这样做的目的是减少初学者的一些困难.

3. 注重逻辑性与叙述表述. 线性代数对于抽象性与逻辑性有较高的要求, 注重培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力. 同时线性代数是一门严谨的课程, 注意语言的叙述表达准确、简明.

4. 有意识地培养学生的数值计算能力. 虽然用数学软件 Mathematica 或 MATLAB 可以快速而准确地进行计算, 比如, 计算行列式, 求矩阵的逆矩阵, 求解线性方程组, 求向量组的秩与极大无关组等, 但是本书依然配备有关涉及数字或参数的行列式、矩阵、线性方程组、向量、二次型的例子. 只是在这些例子中有意选取特殊的数字, 以便教师授课和有意识地培养学生的数值计算能力, 尽管这些数字在实际应用中不那么巧合地出现.

5. 书中出现以数学家姓氏命名的结果, 则在该节的最后用“人物简介”栏目

介绍该数学家.

6. 书中出现的概念用中英文在书末以索引列出, 以便学生查找.

7. 部分内容加 * 号, 目的是便于青年教师备课时参考, 并供学生进一步学习时使用.

本书在编写过程中得到王宜举教授的大力支持和帮助, 雷玉霞博士和王琳提出了诸多好的建议, 在此编者对他们表示衷心的感谢. 本书的出版得到曲阜师范大学教材建设立项资助, 在此表示感谢. 特别感谢中国科学技术大学出版社, 由于他们对本书的出版给予了热情的支持和帮助, 本书才得以顺利与读者见面.

由于作者水平有限, 书中难免会出现这样那样的缺点和错误, 恳请专家和读者提出宝贵的意见, 给予批评和指正.

编 者

2014 年 3 月

目　　录

第 1 章　行　列　式

管理科学与工程技术等领域的很多实际问题都可以归结为解一个线性方程组的问题. 在中学里我们学过用消元法解二元及三元线性方程组. 一般的线性方程组如何求解? 这一章讨论一类特殊线性方程组的求解, 所用工具是行列式. 一般的线性方程组将在第 3 章中讨论.

行列式是重要的数学工具和概念之一, 它来源于解线性方程组. 在矩阵、线性方程组、向量、二次型中都需要用到行列式. 行列式在数学、工程技术、经济学及管理科学等众多领域也有广泛的应用. 本章首先从求二元及三元线性方程组的解引入二阶及三阶行列式的概念, 然后利用归纳法引入 n 阶行列式的概念. 接着讨论行列式的性质及其计算方法. 最后介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默 (Cramer) 法则.

除特殊说明, 本书所涉及的数都是实数.

1.1　行列式的概念

本节首先从求二元及三元线性方程组的解引入二阶及三阶行列式的概念, 然后利用归纳法引入 n 阶行列式的概念.

1.1.1 二阶行列式

在中学里我们学过用加减消元法解二元线性方程组. 对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1}$$

a_{22} 乘以第一个方程, a_{12} 乘以第二个方程, 然后将两式相减, 消去 x_2, 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

类似地, a_{21} 乘以第一个方程, a_{11} 乘以第二个方程, 然后将两式相减, 消去 x_1, 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

因此当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时, 方程组 (1) 有唯一解:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

我们发现, 公式 (2) 中两个分式的分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 把这些未知量的系数按照在方程组 (1) 中的位置排成一个正方形:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix},$$

在正方形四个数的两侧各画一条竖线, 得到符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

规定它等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, 并称为二阶行列式, 即下列的

定义 1 由 4 个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 组成的**二阶行列式** (determinant)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的**元素**，横排称为**行**，纵排称为**列**.

图 1 所示的对角线法则: 图中有一条实线 (**主对角线**, 即从左上角到右下角这条对角线), 一条虚线 (**次对角线**, 即从右上角到左下角这条对角线), 实线上两元素的乘积冠正号, 虚线上两元素的乘积冠负号.

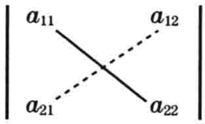

图 1

例如,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2.$$

按照二阶行列式的定义, 式 (2) 中分母都是二阶行列式

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

而两个分子分别是

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

容易看出, D_1 是 D 的第 1 列换成 b_1,b_2 而第 2 列不变所得到的行列式, D_2 是 D 的第 2 列换成 b_1,b_2 而第 1 列不变所得到的行列式.

当 $D\neq 0$ 时, 方程组 (1) 的唯一解可改写为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

1.1.2 三阶行列式

解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{3}$$

从方程组 (3) 的前两个方程中消去 x_3, 后两个方程中消去 x_3, 再从所得到的两个方程中消去 x_2, 得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\&\quad=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.\end{aligned}$$

若

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0,$$

则

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3).$$

同样, 得到

$$\begin{aligned}x_2&=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}),\\x_3&=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}).\end{aligned}$$

我们发现, 上述 x_1,x_2,x_3 的表达式中三个分式的分母都是 D. 把这些未知量的系数按照在方程组 (3) 中的位置排成一个正方形:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

在这些正方形数的两侧各画一条竖线, 得到符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

规定它等于

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

并称之为三阶行列式, 即下列的

定义 2　由 9 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 组成的**三阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

图 2 所示的对角线法则: 图中有三条实线看作是平行于**主对角线** (从左上角到右下角这条对角线) 的连线, 三条虚线看作是平行于**次对角线** (从右上角到左下角这条对角线) 的连线, 实线上三元素的乘积冠正号, 虚线上三元素的乘积冠负号.

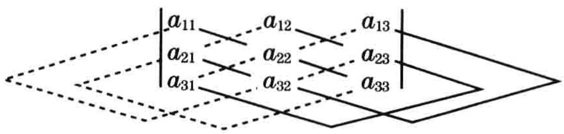

图 2

例如, 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times2\times5+2\times1\times2+3\times3\times3$$

$$-1\times1\times3-2\times3\times5-3\times2\times2$$

$$=-4.$$

引入三阶行列式后, 上述 x_1,x_2,x_3 的表达式中分母都是三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

而分子分别是行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

容易看出, D_i 是 D 的第 i 列换成 b_1,b_2,b_3 而其余两列不变所得到的行列式, $i=1,2,3$. 当 $D\neq0$ 时, 方程组 (3) 的解可改写为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

1.1.3 n 阶行列式

有了二阶和三阶行列式的概念, 线性方程组 (1) 与 (3) 的解就可以分别用二阶和三阶行列式简捷地表示出来. 在这一章中我们将把这个结果推广到 n 元线性

方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
$$

这里遇到的问题是如何定义 n 阶行列式. 为此, 先考察二阶和三阶行列式, 找出内在的联系, 然后根据这些联系定义 n 阶行列式.

先考察二阶行列式. 首先规定一阶行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}.
$$

注意一阶行列式与数的绝对值的区别. 因此

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}|.
$$

令

$$
M_{11} = |a_{22}|, \quad M_{12} = |a_{21}|.
$$

注意到, M_{1j} 是 D 中划去元素 a_{1j} 所在的第 1 行和第 j 列后余下的 1 个元素构成的 1 阶行列式, 其中 $j = 1,2$. 则

$$
D = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}.
$$

上式右边第 1 项前面是正号, 而第 2 项前面是负号. 为了使每一项前面都是正号, 注意到

$$
D = a_{11} \cdot (-1)^{1+1}M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2}M_{12}.
$$

令

$$
A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}.
$$

则

$$
D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}.
$$

注意到, 上式右边的 2 个数 a_{11},a_{12} 是 D 的第一行. 因此二阶行列式可以由一阶行列式表示.

例如,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1A_{11}+2A_{12} = 1(-1)^{1+1}M_{11}+2(-1)^{1+2}M_{12}$$

$$= 1\times|4|-2\times|3| = -2.$$

接下来考察三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

令

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

注意到, M_{1j} 是 D 中划去元素 a_{1j} 所在的第 1 行和第 j 列后余下的 4 个元素按照在 D 中原来的位置构成的二阶行列式, 其中 $j=1,2,3$. 则

$$D = a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}.$$

上式右边第 2 项前面是负号, 其余两项是正号. 为了使每一项前面都是正号, 注意到

$$D = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}.$$

令

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}.$$

则

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

注意到, 上式右边的 3 个数 a_{11}, a_{12}, a_{13} 是 D 的第一行. 因此三阶行列式可以由二阶行列式表示.

例如, 三阶行列式

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 1A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} \\ &= 1(-1)^{1+1}M_{11} + 2(-1)^{1+2}M_{12} + 3(-1)^{1+3}M_{13} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 7 - 2 \times 13 + 3 \times 5 \\ &= -4.\end{aligned}$$

现在根据二阶和三阶行列式的规则, 用归纳法定义 n 阶行列式.

定义 3 由 $n^2(n \geqslant 2)$ 个数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 组成的 **n 阶行列式**

$$\begin{aligned}D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},\end{aligned}$$

其中

$$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j},$$

而 M_{1j} 是 D 中划去元素 a_{1j} 所在的第 1 行和第 j 列后余下的 $(n-1)^2$ 个元素按照在 D 中原来的位置构成的 $n-1$ 阶行列式, 其中 $j = 1, 2, \cdots, n$.