高等学校教学参考书 彭匡鼎 李湘如 编

热力学与统计物理学例题和习题

（统计物理学分册）

热力学与统计物理学
例题和习题
（统计物理学分册）

彭匡鼎　李湘如　编

高等教育出版社

内容提要

本书系作者根据其多年教学工作中积累的材料选编而成.

全书共九章. 每节开头有内容摘要，介绍基本物理概念及主要公式. 所举例题都具有一定典型性,並适当阐述解题思路和解题技巧,这对指导初学者解答统计物理学习题有一定实际意义. 书中还编排了 654 个习题可供读者练习,以巩固所学内容.

本书是一本教学参考书,可供大专院校物理专业及有关专业的师生参考.

热力学与统计物理学例题和习题

(统计物理学分册)

彭匡鼎 李湘如 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.5 字数 177,000

1989年 8 月第 1 版 1989 年 8月第 1 次印刷

印数 00 001— 2 475

ISBN 7-04-000003-2/O.3

定价 2.40 元

前　言

编者从长期教学中积累的三千多道例题和习题中精选出例题92道和习题654道，并结合自己的教学实践经验编成本书。不少师生反映，统计物理学的习题比较难解，而习题课也没有合适的参考书。编者希望本书能同时起到习题指导书、习题集及补充教材的作用。

本书各章开头都有内容摘要，介绍主要的物理概念及公式。这些内容密切结合我国现行教材，同时又前后呼应自成系统。在例题中系统介绍各类型习题的解题方法和技巧，加深和突出有关内容，并指出学生容易出错的地方和容易混淆的的概念。编者在注意基本理论学习的同时，力求反映统计物理学的现代应用，选编了一些与此有关的例题和习题。

郑智绵先生对本书的编写给予了很大的支持和帮助，提供了不少习题，并做了审稿工作。全书经陕西师范大学辛绵荣副教授校订，增色不少。云南大学物理系几位教师对本书的编写也做了许多工作，在此一并表示感谢。但由于编者水平有限，不妥之处在所难免，尚祈读者指正。

编　者

1986 年 5 月

目　录

第一章　数学准备

§1.1　排列组合　斯特令公式　一些定积分的计算　Γ 函数　误差函数

1、排列组合问题

a）排列

乘法定理：做甲事有 m 种不同的方法，做乙事有 n 种不同的方法，且这 m 种方法与 n 种方法也彼此不同，则甲乙两事都做共有 mn 种不同的方法。

定义 1：把 N 个不同的元素按照一定的顺序排成一列，叫做 N 个不同元素的全排列．其排列种数记为 P_N，

$$P_N = N!。\tag{1.1}$$

定义 2：从 N 个不同的元素中每次取出 $M(M<N)$ 个不同的元素，按照一定的顺序排成一列，叫做选排列．其排列种数记为 P_N^M，

$$P_N^M = \frac{N!}{(N-M)!}。\tag{1.2}$$

定义 3：在排列中允许元素重复出现，这种排列称为可重复排列．从 N 个元素中每次取出 M（M 可大于 N）个元素的可重复排列的种数记为 U_N^M，

$$U_N^M = N^M。\tag{1.3}$$

b）组合

定义 1：从 N 个不同的元素中，每次取出 $M(M\leqslant N)$ 个不同的元素，不管顺序并成一组，叫做组合．其方法数记为 C_N^M，

$$C_N^M = \frac{N!}{M!(N-M)!}。\tag{1.4}$$

定义 2：在组合中允许元素重复出现，这种组合称为可重复组合．从 N 个元素中每次取出 M(M 可大于 N) 个元素的可重复组合的方法数记为 F_N^M，

$$F_N^M=\frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!}. \tag{1.5}$$

c) 常用的分堆方法及公式

M 个全同的小球放在 N 个编号的盒子里．每个盒子中的小球数不大于 1，$M\leqslant N$，其方法数为 C_N^M。

M 个不同的小球放在 N 个编号的盒子里，每个盒子中的小球数无限制，其方法数为 U_N^M。

M 个全同的小球放在 N 个编号的盒子里，每个盒子中的小球数无限制，其方法数为 F_N^M。

把 N 个不同的小球分成 p 堆，使第一堆有 m_1 个，第二堆有 m_2 个，…，第 p 堆有 m_p 个，且有 $m_1+m_2+\cdots+m_p=N$，这样分堆的方法数记为 $V(m_1,m_2,\cdots,m_p)$，

$$V(m_1,m_2,\cdots,m_p)=\frac{N!}{m_1!m_2!\cdots m_p!}. \tag{1.6}$$

把 N 个不同的小球分成许多堆，使每堆有一个小球者共有 m_1 堆，每堆有两个小球者共有 m_2 堆，…，每堆有 k 个小球者共有 m_k 堆，…，且有 $\sum km_k=N$，这样分堆的方法数为

$$N!/\prod_k m_k!(k!)^{m_k}. \tag{1.7}$$

2. 斯特令公式

$$N!=\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N e^{\frac{\theta}{12N}},\quad 0<\theta<1. \tag{1.8}$$

一般用它的近似式

$$\ln N!\approx N\ln N-N. \tag{1.9}$$

当 N 很大时有

$$\frac{d}{dN}\ln N! \approx \ln N. \tag{1.10}$$

3. 一些定积分公式

$$\int_0^\infty e^{-bu^2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}, \tag{1.11a}$$

$$\int_0^\infty u^2e^{-bu^2}du = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{b^3}}, \tag{1.11b}$$

$$\int_0^\infty u^4e^{-bu^2}du = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{b^5}}, \tag{1.11c}$$

....

$$\int_0^\infty u^{2k}e^{-bu^2}\,du = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2^{k+1}}\sqrt{\frac{\pi}{b^{2k+1}}}. \tag{1.11d}$$

$$\int_0^\infty ue^{-bu^2}du = \frac{1}{2}\,\frac{1}{b}, \tag{1.12a}$$

$$\int_0^\infty u^3e^{-bu^2}du = \frac{1}{2}\,\frac{1}{b^2}, \tag{1.12b}$$

$$\int_0^\infty u^5e^{-bu^2}du = \frac{1}{2}\,\frac{2!}{b^3}, \tag{1.12c}$$

....

$$\int_0^\infty u^{2k+1}e^{-bu^2}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{k!}{b^{k+1}}. \tag{1.12d}$$

4. Γ 函数和 β 函数

a) 定义

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\quad \mathrm{Re}\,z>0, \tag{1.13}$$

$$\beta(p,q) \equiv \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{1.14}$$

式中，z, p, q 为复变数.

b) 性质

$$\Gamma(1) = 1, \tag{1.15a}$$

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}, \tag{1.15b}$$

$$\Gamma(n+1)=n!,\ n\text{为正整数}, \tag{1.15c}$$

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \tag{1.15d}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\pi/\sin\pi z. \tag{1.15e}$$

$$\beta(p,q)=\beta(q,p), \tag{1.16a}$$

$$\beta(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q). \tag{1.16b}$$

5. 误差函数

$$\mathrm{erf}(x)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\,dy. \tag{1.17}$$

【例 1.1】 证明式(1.6)。

【解】 这类问题一般可直接用排列组合理论来解答，有些情况下也可用数学归纳法来解答。

解法 1 我们把这 N 个小球排列成序，令最前面的 m_1 个小球作为第一堆，接下来的 m_2 个小球作为第二堆，…，最后 m_p 个小球作为第 p 堆。N 个不同小球的排列数有 $N!$ 种。但各堆内的小球互相交换并不产生新的分法。所以，总的方法数为

$$N!/m_1!m_2!\cdots m_p!.$$

解法 2 对 p 实行数学归纳法。$p=1$ 时该式成立。

设

$$V(m_1,\cdots,m_{p-1})=\frac{(m_1+\cdots+m_{p-1})!}{m_1!\cdots m_{p-1}!}$$

成立。由于第 p 堆的 m_p 个小球可以 N 个小球中任意选出，故

$$\begin{aligned}V(m_1,\cdots,m_{p-1},m_p)&=C_N^{m_p}V(m_1,\cdots,m_{p-1})\\&=N!/m_1!m_2!\cdots m_p!.\end{aligned}$$

【例 1.2】 证明

$$\sum_{S=0}^{k}C_{n_1}^{s}C_{n_2}^{k-s}=C_{n_1+n_2}^{k},$$

式中 k,n_1,n_2 为正整数。

【解】 我们注意到高阶导数的莱布尼兹公式及牛顿二项式定

理中含有组合数,尝试用这些公式来解。

解法 1 考虑和式

$$\sum_{s=0}^{k} C_{n_1}^s C_{n_2}^{k-s} x^{n_1+n_2-k} = \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!(k-s)!} \cdot \frac{d^s x^{n_1}}{dx^s} \cdot \frac{d^{k-s} x^{n_2}}{dx^{k-s}}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{k} C_k^s \frac{d^s x^{n_1}}{dx^s} \cdot \frac{d^{k-s} x^{n_2}}{dx^{k-s}} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d_x{}^k}(x^{n_1} x^{n_2})$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} x^{n_1+n_2} = C_{n_1+n_2}^k x^{n_1+n_2-k}.$$

所以有
$$\sum_{s=0}^{k} C_{n_1}^s C_{n_2}^{k-s} = C_{n_1+n_2}^k.$$

解法 2 由二项式定理,

$$(1+x)^{n_1+n_2} = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} C_{n_1+n_2}^k x^k, \tag{1}$$

$$(1+x)^{n_1}(1+x)^{n_2} = \left(\sum_{s=0}^{n_1} C_{n_1}^s x^s\right)\left(\sum_{i=0}^{n_2} C_{n_2}^i x^i\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n_1+n_2} x^k \sum_{s=0}^{k} C_{n_1}^s C_{n_2}^{k-s}. \tag{2}$$

比较式(1)及式(2),故得证。

【例 1.3】 斯特令公式有如下四种常用形式:

a) $N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$,

b) $N! \approx N^N e^{-N}$,

c) $\ln N! \approx N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln(2\pi N)$,

d) $\ln N! \approx N \ln N - N$.

问上列各式各自要求多大的 N 时,其相对误差小于 1%。

【解】 用具体数字验算尝试求解。

当 $N=9$ 时,$9! = 362880$,$9^9 e^{-9}(2\pi \times 9)^{1/2} = 359537$,第一个表达式的相对误差为 0.92%。

第二个表达式的相对误差根本不可能小于 1%。

第三个表达式,当 $N=4$ 时,$\ln 4! = 3.1780538$,

$$4\ln 4-4+\frac{1}{2}\ln(8\pi)=3.1572627,$$

相对误差为 0.65%。

第四个表达式，当 $N=90$ 时，

$$\ln 90!=318.15262,\quad 90\ln 90-90=314.98287$$

相对误差为 0.996%。

本题指出了斯特令近似公式的应用范围及误差，使用各近似公式时应考虑此点。

【例 1.4】 证明(1.11a)到(1.12d)各式。

【解】 观察各式发现有如下规律：

$$f(n+2)=-\frac{\partial}{\partial b}f(n),\quad f(n)=\int_0^{\infty}u^n e^{-bu^2}du, \tag{1}$$

故只需要证明(1.11a)及(1.12a)两式。

令 $t=\sqrt{b}\,u$，则

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt,$$

$$[f(0)]^2=\frac{1}{b}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt\int_0^{\infty}e^{-u^2}du.$$

令 $t=\alpha\cos\beta,\quad u=\alpha\sin\beta$，则有

$$[f(0)]^2=\frac{1}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\beta\int_0^{\infty}\alpha e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\frac{\pi}{4b},$$

$$f(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}. \tag{2}$$

$$f(1)=\int_0^{\infty}ue^{-bu^2}du=\frac{1}{2}\frac{1}{b}. \tag{3}$$

【例 1.5】 证明

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\pm x_0}^{\infty}x^2 e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\pm\left[\frac{x_0}{\sqrt{\pi}}e^{-x_0^2}-\frac{1}{2}\operatorname{erf}(x_0)\right].$$

【解】 这类问题常用分部积分法来证明。

原式左边等于

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\pm x_0}^{\infty}x^2\left(-\frac{1}{2x}\right)de^{-x^2}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\pm x_0}^{\infty}xde^{-x^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-xe^{-x^2}\Big|_{\pm x_0}^{\infty}+\int_{\pm x_0}^{\infty}e^{-x^2}dx\right]$$

$$=\pm\frac{x_0}{\sqrt{\pi}}e^{-x_0^2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pm x_0}e^{-x^2}dx+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\pm\left[\frac{x_0}{\sqrt{\pi}}e^{-x_0^2}-\frac{1}{2}\operatorname{erf}(x_0)\right].$$

习 题

1.1 一批产品共有 n 个，其中 k 个是废品. 任选 m 个产品(其中有 l 个废品)，共有几种选择方式?

1.2 求 C_n^r 为最大值时的 r 值.

1.3 N 个不同的物体排在 N 个位置上，物体可重复取，证明方法数为 N^N.

1.4 用 0，1，2，3，4 五个数字，可以组成多少个不同的五位数.

1.5 N 个不同的小球放在 C 个编号的盒子里，每个盒中的小球数不大于1($N\leqslant C$)，求其方法数.

1.6 证明式(1.5)

1.7 证明式(1.7).

1.8 用组合理论证明牛顿二项式定理.

1.9 试求 $\sum\limits_{M=0}^{N}\frac{N!}{(N-M)!M!}$ 及 $\sum\limits_{M=0}^{N}\frac{(-1)^M N!}{(N-M)!M!}$.

1.10 证明：$\sum\limits_{r}C_N^{2r}=\sum\limits_{r}C_N^{2r+1}=2^{n-1}$, $n>0$, $r\geqslant 0$.

1.11 试求 $\sum\limits_{M=0}^{N}\frac{(-1)^M N!}{(N-M)!M!}(A+BM)^k$, $k<N$.

1.12 证明：$\sum\limits_{l=0}^{N}(C_N^l)^2=C_{2N}^N$ 及 $\sum\limits_{k=0}^{N}(-1)^k C_k^l C_N^k=0$.

1.13 证明：$\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}C_N^k=\frac{N}{N+1}$ 及 $\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_N^k=\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$.

1.14 证明: $C_{N+1}^{M}=C_{N}^{M-1}+C_{N}^{M}$, $F_{N}^{M}=F_{N}^{M-1}+F_{N-1}^{M}$

及 $P_{N}^{M}=MP_{N-1}^{M-1}+P_{N-1}^{M}$.

1.15 证明: $\sum_{M=0}^{M_1}\frac{(M+N)!}{M!N!}=\frac{(M_1+N+1)!}{M_1!(N+1)!}$.

1.16 证明: $C_{N}^{M}\leqslant\frac{N^{N}}{M^{M}(N-M)^{N-M}}$, $0<M<N$.

1.17 当 $N=5$ 及 $N=10$ 时,分别求出用式(1.9)计算 $\ln N!$ 时所产生的百分误差。

1.18 用 Γ 函数推证斯特令近似公式

$$N!\approx\sqrt{2\pi N}\ (N/e)^{N}.$$

1.19 利用上题结果计算 10!,并与精确值比较.

1.20 证明: $\frac{\pi}{2}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\left[\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\right]^{2}$.

*1.21 证明式(1.8).

1.22 计算 5!,并验证

$$\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^{N}e^{\frac{1}{12N+0.5}}<N!<\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^{N}e^{\frac{1}{12N}}.$$

*1.23 推导斯特令公式

$$N!\approx N^{N}e^{-N}\sqrt{2\pi N}\left[1+\frac{1}{12N}+\frac{1}{288N^{2}}+\cdots\right].$$

1.24 证明式(1.15a)及(1.15b),并利用 Γ 函数的性质求解例 1.4.

1.25 证明式(1.15e).

1.26 证明式(1.16b).

1.27 试证明:当 $a\ll1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{p}e^{-an}=\int_{0}^{p}e^{-an}\,dn.$$

*1.28 试比较

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{-l(l+1)\sigma}\text{ 与 }\int_{0}^{\infty}(2x+1)e^{-x(x+1)\sigma}\,dx,$$

求出积分,并证明两者之差小于 $\sigma^{-1/2}$.

1.29 证明:

a) $$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\pm x_0}^{\infty} e^{-x^2}dx = 1 \mp \operatorname{erf}(x_0),$$

b) $$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\pm x_0}^{\infty} x e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_0^2},$$

c) $$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\pm x_0}^{\infty} x^3 e^{-x^2}dx = \frac{x_0^2+1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_0^2}.$$

1.30 证明:

$$\operatorname{erf}(x_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x_0 - \frac{x_0^3}{1!3} + \frac{x_0^5}{2!5} - \cdots\right].$$

1.31 证明:

$$\int_x^{\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = x^{\frac{1}{2}} e^{-x}\left[1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \cdots\right],$$

$$\int_x^{\infty} \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} e^{-x} dx = e^{-x}\left[\frac{x^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{x^{s-2}}{(s-2)!} + \cdots + 1\right].$$

§1.2 黎曼 ζ 函数 欧勒求和公式 玻色函数

1. ζ 函数及伯努利数

a) 当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时,可定义黎曼 ζ 函数

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1.18}$$

当 $\mathrm{Re}(s)<1$ 时需另外定义。

$\zeta(s)$ 的常见值如下:

$\zeta(0) = -0.5$, $\zeta(1) = \infty$,

$\zeta(0.5) = -1.460$, $\zeta(-0.5) = -0.2079$,

$\zeta(1.5) = 2.612$, $\zeta(2) = \pi^2/6$,

$\zeta(2.5) = 1.341$, $\zeta(3) = 1.202$,

$\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(5) = 1.037$.

另一常用公式是

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s). \tag{1.19}$$

b）伯努利数

$$B_m = \frac{(2m)!}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}, m\text{为正整数}, \tag{1.20}$$

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30}.$$

2. 欧勒求和公式

a）欧勒求和公式是

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}[f(0)+f(n)]$$

$$+\frac{B_1}{2!}[f'(n)-f'(0)] - \frac{B_2}{4!}[f'''(n)-f'''(0)] + \cdots$$

$$+(-1)^n\frac{B_{m+1}}{(2m+2)!}$$

$$\cdot[f^{(2m+1)}(n) - f^{(2m+1)}(0)] + \cdots, \tag{1.21}$$

式中 $B_1, B_2, \cdots$为伯努利数．$f', f'', f''', \cdots, f^{(n)}, \cdots$表示$f(x)$的各阶导数。

b）泊松求和公式

$$\sum_{s=1}^{\infty} f(s) + \frac{1}{2}f(0) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} f(s)\, e^{2\pi i s r} ds, \tag{1.22a}$$

也可写为

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} f(s) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\mathscr{F}(r), \tag{1.22b}$$

式中 $\mathscr{F}(r)$为$f(s)$的傅里叶变换象函数。

3. 玻色函数

a）定义

$$G_s(\alpha) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} l^{-s} e^{-l\alpha}. \tag{1.23}$$

b）性质

$$\frac{\partial^n G_s(\alpha)}{\partial \alpha^n} = (-1)^n G_{s-n}(\alpha), \tag{1.24a}$$

$$G_s(0) = \zeta(s). \tag{1.24b}$$

【例 1.6】 证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

【解】 傅里叶级数中的系数常含 n 的负幂次，所以可用傅里叶展开法.

令 $f(x)=x^2$，$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$. 将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx,$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

所以有

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx. \tag{1}$$

式(1)中令 $x=0$ 及 $x=\pi$，得证.

【例 1.7】 证明欧勒求和公式(1.21).

【解】 设 $f(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时有定义，且有连续的导数. 设 n 和 k 为非负整数，$k<n$，则可写

$$f(n)-f(k)=\int_k^n f'(x)dx.$$

对 k 从 0 到 n 相加，得

$$(n+1)f(n)-\sum_{k=0}^{n}f(k)=\sum_{k=0}^{n}\int_k^n f'(x)dx. \tag{1}$$

上式右边可展开而写为

$$\sum_{k=0}^{n}\int_k^n f'(x)dx=\int_0^n f'(x)dx+\int_1^n f'(x)dx+\cdots$$
$$+\int_{n-1}^{n}f'(x)dx+\int_n^n f'(x)dx. \tag{2}$$

上式中最后一项显然等于零. 若 m 为小于 n 的非负整数，则上式中在区间 $(m,m+1)$ 上的积分出现 $(m+1)$ 次，例如当 $m=1$ 时在区