数学物理方程

闫　晗　王金良　李春明◆编著

黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

数学物理方程

数学物理方程

闫 晗 王金良 李春明◆编著

黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程 / 闫晗，王金良，李春明编著. -- 哈尔滨：黑龙江大学出版社，2014.6
ISBN 978-7-81129-752-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①闫… ②王… ③李… Ⅲ. ①数学物理方程 Ⅳ. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 115612 号

数学物理方程
SHUXUE WULI FANGCHENG
闫 晗 王金良 李春明 编著

责任编辑 张永生 王选宇
出版发行 黑龙江大学出版社
地 址 哈尔滨市南岗区学府路 74 号
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 720×1000 1/16
印 张 13.75
字 数 270 千
版 次 2014 年 6 月第 1 版
印 次 2014 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-81129-752-2
定 价 22.00 元

前言

本书是在黑龙江大学数学科学学院原《数学物理方程》基础上，参考国内外一些同类的教材，经过加工和补充编写而成的. 此次修订主要针对以下几个方面：

1. 本书在关于双曲型方程和抛物型方程部分增加了有关解的存在性与稳定性的讨论.

2. 对原书的许多地方进行了精简和改写，以求叙述简便、思路清晰，使得学生能够有条理地正确理解所学内容.

3. 在习题的配置上既注重方法的掌握，同时也考虑到逻辑思维和素质方面的训练.

本书的第 2 章、第 3 章由闫晗编写，第 1 章、第 4 章由王金良编写，习题及全书的统稿工作由李春明完成. 本书的修订再版得到了黑龙江大学数学科学学院领导和同志们的大力支持，特此深表谢意.

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和错误之处，敬请读者指正.

编　者

2014 年 5 月

内容简介

本书主要介绍三类典型方程 (双曲型方程、抛物型方程、椭圆型方程) 的导出、定解问题的解法以及三类典型方程的基本理论. 深入浅出地讲述了求解偏微分方程问题的行波法、分离变量法、 Fourier 变换和 Laplace 变换、 Green 函数法, 书中配有大量难易兼顾的例题与习题. 本书可作为数学与应用数学、计算数学、物理学、力学等专业本科生以及工科相关专业的研究生的教材和教学参考书使用.

目 录

第 1 章　典型定解问题的提法

数学物理方程的主要研究对象，是来自各种数学物理问题的偏微分方程. 本章将从几个简单的物理模型出发，推导出本课程将要讨论的三种典型方程及其相应的定解问题.

学习这一章，应该搞清楚每个方程和定解条件的实际背景，知道每个有实际意义的偏微分方程的定解问题，是从数量形式上去表述由相应的物理定律所确定的物理量之间的制约关系.

1.1　偏微分方程举例和基本概念

在学习常微分方程的过程中，读者已经知道，所谓常微分方程是由一个自变量和一个未知函数以及这个未知函数的某些阶导数构成的等式. 例如，

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + m^2 x = A\cos\omega t.$$

但在自然界中，许多物理量 (例如温度、速度等) 是随时间及空间位置而变化的，需由以时间坐标 t 及空间坐标 x 为自变量的函数 $u(x,t)$ 来表示，而这些物理量的变化规律，往往用关于时间坐标及空间坐标的某些阶变化率之间的关系式来描述，即可写为函数 u 关于 t 及 x 的某些阶偏导数之间的一些关系式.

所谓偏微分方程，是指含有未知的多元函数及其某些偏导数的关系式. 例如，导热物理的温度函数 $u=u(x,y,z,t)$ 满足的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) + f(x,y,z,t), \tag{1.1.1}$$

描述定常过程的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1.1.2}$$

弦振动时其位移函数 $u=u(x,t)$ 满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1.3}$$

梁的横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x,t), \tag{1.1.4}$$

出现于水波研究中的 KdV (Korteweg de Vries) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + cu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{1.1.5}$$

等等都是偏微分方程.

一般地，对于一个 n $(n \geqslant 2)$ 元函数 $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 而言，关于它的偏微分方程的一般形式为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, Du, D^2u, \cdots, D^N u) = 0, \tag{1.1.6}$$

其中 F 是其变元的已知函数， Du 表示 u 的一阶偏导数

$$Du = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big),$$

而一般地， $D^k u$ $(k = 2, 3, \cdots, N)$ 表示 u 的 k 阶偏导数

$$D^k u = \Big(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}},\ \sum_{i=1}^{n} k_i = k,\ \ k_1, k_2, \cdots, k_n \text{均为非负整数}\Big).$$

包含在偏微分方程中的未知函数的偏导数的最高阶数，称为方程的**阶**. 例如，在方程 (1.1.6) 中，若 F 含有 $D^N u$ 项，则方程 (1.1.6) 的阶为 N, 称方程 (1.1.6) 为 N 阶偏微分方程，而称方程 (1.1.1) 为二阶偏微分方程. 特别地，当自变量的个数 $n = 1$ 时，方程 (1.1.6) 化为常微分方程，而一般的偏微分方程则对应于自变量的个数 $n \geqslant 2$ 的情形.

如果一个偏微分方程关于未知函数及其所有偏导数都是线性的，则称其为**线性偏微分方程**, 否则，就称其为**非线性偏微分方程**. 如果一个非线性偏微分方程所含未知函数的一切最高阶偏导数都是线性的，则称其为**拟线性偏微分方程**. 在线性偏微分方程中，不含未知函数及其偏导数的非零项称为**非齐次项**, 或简称为**非齐项**. 不含非齐次项的线性偏微分方程称为**齐次方程**, 也称为**齐方程**, 否则称为**非齐次方程** 或**非齐方程**.

在前面列举的例子中，方程 (1.1.1) 是二阶线性非齐次方程，方程 (1.1.2) 和 (1.1.3) 是二阶线性齐次方程，方程 (1.1.4) 是四阶线性非齐次方程，方程 (1.1.5) 是三阶拟线性方程.

例 1.1.1 方程

$$u\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

为二阶拟线性偏微分方程.

例 1.1.2 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2 = 0$$

为二阶非线性偏微分方程.

对于方程 (1.1.6), 什么是它的解呢？设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域[①], 如果 u 是在 Ω 中有定义的足够光滑的函数，将它代入式 (1.1.6) 中能使其在 Ω 中恒等地成立，

①在本教材中，均以 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间，而 $\mathbb{R}^n$ 中的区域均指开区域.

则称 u 是方程 (1.1.6) 在 Ω 中的一个古典意义下的解，简称**古典解**. 这里需要指出，偏微分方程的解的概念可以用各种各样的方法加以扩充，但上述古典解的概念是最易于理解的，也是本教材着重讨论的对象. 今后，如无特别需要，我们就将古典解称为解.

一个 m 阶偏微分方程在某区域内的 (古典) 解，是指这样的函数：它具有直到 m 阶的一切偏导数，本身和这些偏导数都连续，将它及其偏导数替代方程中的未知函数及其对应的偏导数后，这个方程对其全体自变量在该区域内成为一个恒等式.

一般来说，一个偏微分方程常常有许多解. 为了从一个偏微分方程的许许多多解中找出一个特定的解，就必须引进适当的附加条件，我们称其为**定解条件**. 一个偏微分方程和附加它的定解条件合在一起，称为**定解问题**. 所谓定解问题的解，就是相应的偏微分方程的解中之满足附加的定解条件者.

例 1.1.3 函数 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$ 是二阶常系数线性方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

的 (古典) 解.

例 1.1.4 函数 $u(x,t)=\mathrm{e}^{-a^2t}\sin x$ 是二阶常系数线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

的解.

例 1.1.5 函数 $u(x,t)=F(x-at)+G(x+at)$ 是二阶常系数线性方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1.1.7}$$

的通解，其中 F 和 G 是任意两个二阶连续可微的单变量函数.

显然函数 $u(x,t)=C_1x+C_2t$ 是方程 (1.1.7) 的 (古典) 解，但不是通解. 这里 C_1 和 C_2 可以是任意常数.

本教材主要研究含一个未知函数的二阶线性偏微分方程，而上述方程 (1.1.1)、(1.1.2)、(1.1.3) 等就是其典型例子. 我们分别称方程 (1.1.1)、(1.1.2)、(1.1.3) 为热传导方程、Poisson 方程、波动方程.

习题 1.1

1.1.1 对于下列各偏微分方程，试判断它们是线性的，还是非线性的. 如果是线性的，说明它是齐次的，还是非齐次的，并确定它的阶.

(1) $u\dfrac{\partial u}{\partial x}-2xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;　　(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$;

(3) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + u\dfrac{\partial u}{\partial x} - 1 = 0$; (4) $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$;

(5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x = 0$; (6) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + \ln u = 0$.

1.1.2 设 $f(v)$ 是一可微函数，证明：函数 $u = f(xy)$ 满足方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

1.1.3 试找出方程 $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y} = 0$ 的所有二阶连续可微的解.

1.1.4 如果函数 $u(x,t) = \mathrm{e}^{\alpha x+\rho t}$ 是方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

的解，那么常数 α 和常数 ρ 应满足什么关系式？

1.1.5 设 $f(x)$, $g(y)$ 二次可微，证明 $u = f(x)g(y)$ 满足方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

1.1.6 验证单值解析函数 $F(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 的实部满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

其中 $z = x + \mathrm{i}y$.

1.1.7 验证函数 $u(x,y,z,t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z + at)$ 是波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

的解①, 其中 f 为任意二阶连续可微的单变量函数，实常数 α、β、γ 满足 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

1.2 方程的导出及定解条件

自然界中许多物理问题都能归结出微分方程. 下面以弦振动问题和热传导问题为例，导出刻画其问题的微分方程.

1.2.1 弦振动方程及定解条件

物理模型 一根长为 l 的均匀细弦，拉紧后让它离开平衡位置，在垂直于弦的外力作用下作微小横向振动 (即弦的运动发生在同一平面内，且弦上各点的位移与平衡位置垂直), 求不同时刻弦线的形状.

弦的往返运动的主要原因是张力的影响和外力的作用. 弦在运动中，各点的位移、加速度、张力等都在不断变化，但它们遵循动量守恒定律：物体在某一时段

①这种形式的解称为波动方程的平面波解.

$[t_1, t_2]$ 内的动量的增量等于作用在该物体上所有外力在这一时段内产生的冲量，即

$$\boxed{\begin{matrix}\text{动 量}\\ t=t_2\end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix}\text{动 量}\\ t=t_1\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{所有外力产生的冲量}\\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\end{matrix}}$$

下面我们应用这个定律建立弦上各点的位移所满足的微分方程.

首先建立坐标系，取弦的平衡位置为 x 轴，在弦线运动的平面内，以垂直于弦线的平衡位置且通过弦线的一个端点的直线为 u 轴 (图 1.2.1).

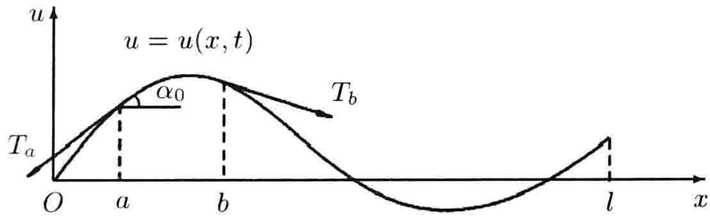

图 1.2.1

记 $u=u(x,t)$ 为弦线在点 x 处、在时刻 t 所发生的位移. 在弦上任意截取一小段弦 $[a,b]$, 考虑它在任意时段 $[t_1,t_2]$ 内动量的变化.

设 ρ 为弦的线密度， $f_0(x,t)$ 为作用在弦线上且垂直于平衡位置的强迫外力密度，从而在任意时刻 t, 弦线 $[a,b]$ 的动量为 $\displaystyle\int_a^b \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}x$, 在时段 $[t_1,t_2]$ 内动量的增量为

$$\int_a^b \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{t=t_2}\mathrm{d}x - \int_a^b \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{t=t_1}\mathrm{d}x. \tag{1.2.1}$$

为了写出作用在弦线 $[a,b]$ 上所有垂直于弦线的外力产生的冲量，我们来分析作用于弦线 $[a,b]$ 上的外力情况. 事实上，作用在弦上的外力只有外加强迫力和周围弦线通过端点 $x=a$、$x=b$ 作用于弦线 $[a,b]$ 上的张力.

强迫力在时段 $[t_1,t_2]$ 内所产生的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_a^b f_0(x,t)\,\mathrm{d}x, \tag{1.2.2}$$

而作用在端点 $x=a$ 和 $x=b$ 点的张力 $\vec{T}_a$ 和 $\vec{T}_b$, 它们的方向如图 1.2.1 所示，它们在 u 轴方向的分量为

$$\begin{aligned}\vec{T}_a\cdot\boldsymbol{i}_u &= |\vec{T}_a|\cos(\vec{T}_a,\boldsymbol{i}_u) = -|\vec{T}_a|\sin\alpha_a,\\ \vec{T}_b\cdot\boldsymbol{i}_u &= |\vec{T}_b|\cos(\vec{T}_b,\boldsymbol{i}_u) = |\vec{T}_b|\sin\alpha_b,\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{i}_u$ 表示 u 轴上的单位向量. 由于我们假设弦线是均匀的，弦作微小横振动，故可以认为 $|\vec{T}_a| = |\vec{T}_b| = T_0$(常数), 且

$$|\alpha_a| \ll 1,\ |\alpha_b| \ll 1,\quad \sin\alpha_a \approx \tan\alpha_a,\quad \sin\alpha_b \approx \tan\alpha_b,$$

即

$$-|\vec{T}_a|\sin\alpha_a \approx -|\vec{T}_a|\tan\alpha_a = -T_0\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a},$$
$$|\vec{T}_b|\sin\alpha_b \approx |\vec{T}_b|\tan\alpha_b = T_0\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=b}.$$

因此张力 $\vec{T}_a$ 和 $\vec{T}_b$ 垂直于弦线的分量在时段 $[t_1,t_2]$ 内产生的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}-\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}\right]\mathrm{d}t. \tag{1.2.3}$$

由动量守恒定律及 (1.2.1)、(1.2.2)、(1.2.3) 式可得到小段弦 $[a,b]$ 作微小横振动所满足的方程为

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left[\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=t_2}-\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=t_1}\right]\mathrm{d}x\\ =&\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}-\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}\right]\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

如果假设 u 在区域 $[0,l]\times[0,\infty)$ 上连续，在区域 $(0,l)\times(0,\infty)$ 内存在连续的二阶偏导数，则上式可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

如果假设 f_0 在区域 $[0,l]\times[0,\infty)$ 上连续，由于 (a,b)、(t_1,t_2) 的任意性，可得 u 适合的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f_0.$$

又由于弦是均匀的，故 $\rho=$ 常数，因此上式可改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \tag{1.2.4}$$

其中 $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$，$f(x,t)=\dfrac{f_0(x,t)}{\rho}$.

方程 (1.2.4) 刻画了均匀弦的微小横振动的一般规律，我们称其为弦振动方程.

一根弦线特定的振动状况，还依赖于初始时刻弦线的状态和通过弦线的两端所受到的外界的影响. 因此，为了确定一个具体的弦振动，除了列出它满足的方程以外还必须给出它适合的初始条件和边界条件.

初始条件 给出弦上各点在初始时刻的位移和速度，即

$$\begin{cases}u(x,0)=\varphi(x),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant l),\end{cases} \tag{1.2.5}$$

这里 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 为已知函数. 特别当 $\varphi(x)\equiv\psi(x)\equiv 0$ 时，称初始条件为齐次的.

边界条件一般说来有三类.

第一类边界条件 已知弦线端点的位移变化，即

$$\begin{cases} u(0,t) = g_1(t), \\ u(l,t) = g_2(t) \qquad (t \geqslant 0). \end{cases} \tag{1.2.6}$$

特别地，当 $g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$ 时，称弦线两端具有固定端点.

第二类边界条件 已知在弦线端点所受垂直于弦线的外力作用，即

$$\begin{cases} -T\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = g_1(t), \\ T\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = g_2(t) \qquad (t \geqslant 0). \end{cases} \tag{1.2.7}$$

特别地，当 $g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$ 时，称弦线具有自由端.

第三类边界条件 已知弦线端点的位移与所受外力作用的一个线性组合，即

$$\begin{cases} \left(-T\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha_1 u\right)\Big|_{x=0} = g_1(t), \\ \left(T\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 u\right)\Big|_{x=l} = g_2(t) \qquad (t \geqslant 0), \end{cases} \tag{1.2.8}$$

其中 $\alpha_1 > 0$、$\alpha_2 > 0$ 分别表示弦线端点支承的弹性系数.

特别地，当 $g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$ 时，表示弦的两端固定在弹性支承上.

上述三类边界条件中， $g_1(t)$、$g_2(t)$ 为已知函数，当 $g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$ 时，称对应的边界条件为齐次的.

通常把初始条件和边界条件统称为**定解条件**. 描述初始时刻物理状态的定解条件称为初始条件或初值条件，描述边界上物理状态的定解条件称为边界条件或边值条件. 一个方程和与之相应的定解条件就构成定解问题.

在区域 $\{(x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0\}$ 上，由方程 (1.2.4) 、初始条件 (1.2.5) 以及边界条件 (1.2.6) 、 (1.2.7) 、 (1.2.8) 中间的任意一个组成的定解问题，称为弦振动方程的混合问题.

例 1.2.1 对两端固定有界弦的受迫振动，其混合问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

如果对于弦上的某一段，在所考虑的时间内，弦线端点的影响可以忽略不计，那么可以认为弦长是无限的 (即 $-\infty < x < +\infty$), 这样就不必考虑边界条件. 我们把在区域 $\{(x,t) \mid -\infty < x < +\infty,\ t \geqslant 0\}$ 上，由方程 (1.2.4) 和初始条件 (1.2.5) 组成的定解问题称为弦振动方程的初值问题或 Cauchy 问题.

例 1.2.2 对无限长弦的自由振动，其初值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

类似地可以给出关于弦振动方程半无界问题的定义.

例 1.2.3 半无限长弦的受迫振动，其混合问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

方程 (1.2.4) 虽然称为弦振动方程, 但绝不仅仅用来描述弦的横振动. 事实上, 在工程和物理中，许多由物体的振动产生的波的传播问题同样可以用方程 (1.2.4) 来刻画，因此方程 (1.2.4) 一般也称为一维波动方程.

例 1.2.4* 一根长为 l 的弹性细杆，因外力而产生纵向振动，假设振动过程服从 R.Hooke 定律，试推导弹性杆所满足的微分方程.

解 将弹性细杆横放在 x 轴上，选取坐标系如图 1.2.2. 用 $S(x)$ 表示弹性细杆在点 x 处的横截面，又表示该横截面的面积. 假设在 $S(x)$ 面上，杆是均匀的，其密度记为 $\rho(x)$, 在 $S(x)$ 面上每一点所受力与位移都是相同的，张力密度记为 $\sigma(x,t)$. 方向平行于 x 轴，外力密度记为 $F(x,t)$, 方向平行于 x 轴. 用 $u(x,t)$ 表示在点 x 处的横截面 $S(x)$ 在时刻 t 、沿平行于 x 轴方向的位移，并且假设 $u(x,t)$ 关于变量 x 及 t 二阶连续可微.

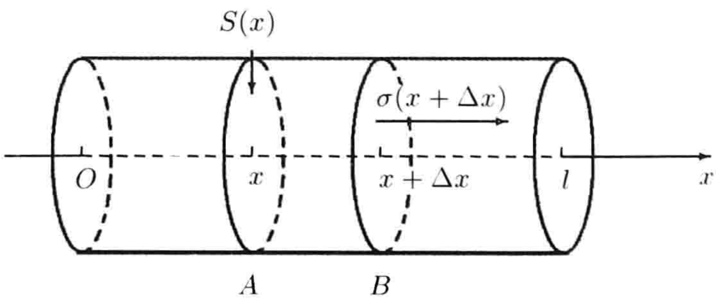

图 1.2.2

下面在假设振动过程中所发生的应力服从 R.Hooke 定律的条件下推导方程.

任取杆的一小段 $[x, x+\Delta x]$, 记为 AB (图 1.2.2). 在时刻 t, 小段 AB 端点的坐标分别为 $x+u(x,t)$, $x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)$, 于是小段 AB 平均伸长率为

$$\frac{[x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)-x-u(x,t)]-\Delta x}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}.$$