普通高等教育航天类规划教材

（国家级重点教材）

航天器姿态动力学与控制

SPACECRAFT CARRIAGE DYNAMICS AND CONTROL

中国航天工业总公司人事劳动教育局　组织编写

陈士橹　主编

宇航出版社

普通高等教育航天类规划教材　（国家级重点教材）

航天器姿态动力学与控制

中国航天工业总公司人事劳动教育局组织编写

主编　陈士橹

编者　陈士橹　曾颖超

唐　硕　赵育善

宇航出版社

内 容 简 介

本书是中国航天工业总公司人事劳动教育局组织编写的航天系列教材中的一本。全书共分5章:刚性航天器的运动方程;航天器姿态控制的动力学问题;弹性飞行器动态特性分析与主动控制;液体燃料晃动问题和弹头再入时的滚转异常问题。重点介绍了航天器动力学与控制的基本概念、基本理论和一些基本方法。

本书主要读者对象为航天器设计、制导及飞行力学等专业的本科生及部分研究生。

图书在版编目(CIP)数据

航天器姿态动力学与控制/陈士橹主编.-北京:宇航出版社,1998.8

ISBN 7-80144-091-9

Ⅰ.航… Ⅱ.陈… Ⅲ.航天器-姿态飞行控制-动力学 Ⅳ.V412.4

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第04747号

宇航出版社出版发行

北京市和平里滨河路1号(100013)

发行部地址:北京阜成路8号(100830)

北京星月印刷厂印刷

新华书店经销

1998年8月第1版　1998年8月第1次印刷

开本:787×1092 1/16　印张:8.5　字数:210千字

印数:1～1000 册　定价:12.80元

中国航天工业总公司教材编审委员会名单

出版说明

按照国家教委关于高等教育教材工作分工原则，中国航天工业总公司负责组织全国高等教育航天类专业教材的规划、编审和出版。根据航天教育发展规划，为适应航天事业发展的需要和满足航天专业教学的要求，中国航天工业总公司教材编审委员会负责组织编审、出版“九五”期间航天专业教材，分成航天器、导弹、飞行力学、发动机、控制与制导、空间电子学六类。适应的专业范围为：飞行器系统工程、飞行器总体设计、飞行器结构与强度、飞行器动力工程、飞行器制造工程、飞行器控制与制导、飞行器发射技术与装置、飞行器环境与模拟工程、飞行力学、宇航光电工程、空间工程和卫星与卫星应用等。

编委会为航天专业教材制订的出版原则是：

1. 教材应保证思想性、科学性、先进性和启发性，注意理论联系实际。内容的深度与广度应有利于培养学生的自学能力、创造能力及解决实际问题的能力。

2. 技术专家长期从事航天科研工作，学校教师长期从事教学，他们各自都积累了丰富的经验。为使教材既有一定的理论水平，又能很好地联系实际，因此，要求教材的编审必须坚持技术专家与学校教师相结合的原则。

3. 这套教材除作为本科、研究生教材外，也可作为航天领域工程技术人员继续教育的教学参考书以及有关科技人员的参考书。

限于水平和经验，航天专业教材的编审出版工作肯定有不少缺点和不足之处，欢迎使用教材的单位、广大教师、同学和有关技术人员提出宝贵意见，以进一步提高航天类专业教材的质量。

中国航天工业总公司人事劳动教育局

1997 年 8 月

前　　言

《航天器姿态动力学与控制》一书系中国航天工业总公司人事劳动教育局负责组织编写的航天系列教材中的一本。主要读者对象为航天器设计、制导及飞行力学等专业的本科生及部分研究生。

全书共分5章。重点介绍航天器动力学与控制的基本概念、基本理论及姿态控制的一些基本方法。第1章——刚性航天器的运动方程，主要阐述航天器姿态动力学方程、航天器的无力矩运动、重力梯度力矩等；第2章——航天器姿态控制的动力学问题，内容包括自旋及双自旋稳定、飞轮控制、推力器的姿态控制；第3章——弹性飞行器动态特性分析与主动控制，主要介绍弹性飞行器的自由弯曲振型计算、非定常气动力模型建立，包括频域模型及时域模型，伺服气动弹性稳定性、弹性导弹的耦合特性、弹性振动的主动抑制与增稳技术；第4章——液体燃料晃动问题，内容包括晃动力及力矩的计算、晃动的机械模拟、考虑晃动时航天器的稳定性分析，同时考虑弹性变形及晃动时航天器的稳定性分析、晃动对航天器姿态控制的影响等；第5章——弹头再入时的滚转异常问题，阐述滚转异常机理、气动力小不对称及质量、惯量小不对称对滚转共振的影响等。

本书第1,2章由曾颖超编写，第3章由唐硕编写，第4章由陈士橹编写，第5章由赵育善编写。全书由陈士橹统编。

本书除主要作为高等院校航天专业的教材或教学参考书外，对航天工业部门的科研设计人员也有参考价值。书中可能存在缺点错误，敬希不吝指正。

本书承中国航天工业总公司一院原院长王永志总师负责主审，他提出了不少宝贵意见，特此致谢 。

编者

1997年8月

目　　录

第 1 章

刚性航天器的运动方程

在航天器初步设计阶段，可将它视为刚体。定型设计需要精确分析航天器的姿态运动时，也是在刚体模型的基础上，再酌情扩充和完善姿态运动的模型。由刚体运动模型可以了解航天器姿态运动的基本性质，并确定有关姿态运动的控制方案及参数。因此，这里首先介绍刚体航天器姿态运动 Euler 方程，航天器的旋转动能，以及航天器的无力矩运动。这些内容是研究姿态运动的基本知识。

1.1 航天器的刚体姿态动力学

1.1.1 角动量

讨论航天器在微重力环境下的刚体动力学问题，角动量（或称动量矩）是一个重要的概念。航天器绕刚体质心 O 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动，一个质量为 m_i 的质点 i，对于质心 O 的角动量 $\boldsymbol{H}_i$ 定义为（见图 1-1）

$$\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{R}}_i \tag{1.1-1}$$

因为 $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_O + \boldsymbol{r}_i$，此式又可写成

$$\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{R}}_O \tag{1.1-2}$$

等式右边第一项是航天器固连动坐标系 $oxyz$ 内的角动量；第二项是航天器质心沿轨道运动产生的牵连项。

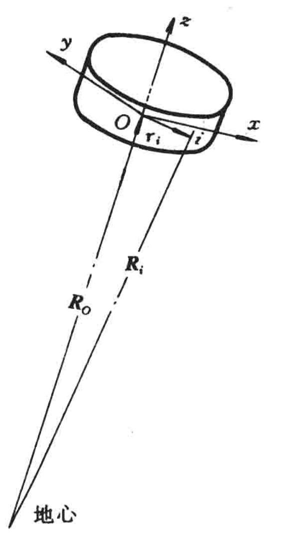

图 1-1 刚体上的质点

假设质点 i 上的作用力为 $\boldsymbol{F}$，对 O 点的力矩 $\boldsymbol{M}_i$ 等于

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_i &= \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \\ &= \boldsymbol{r}_i \times m_i (\ddot{\boldsymbol{R}}_O + \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \end{aligned} \tag{1.1-3}$$

由理论力学可知：

$$\boldsymbol{M}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_i}{\mathrm{d}t} \tag{1.1-4}$$

在以地心为原点的惯性坐标系中质点 i 的绝对速度 $\boldsymbol{V}_i$ 为

$$\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i + [\boldsymbol{V}_i]_{\mathrm{B}} \tag{1.1-5}$$

式中 $\boldsymbol{V}_O=\dot{\boldsymbol{R}}_O$；$\boldsymbol{V}_i=\dot{\boldsymbol{R}}_i$，因假设航天器为刚体，$[\boldsymbol{V}_i]_{\mathrm{B}}=0$，下标“B”为航天器。应用式(1.1-1)，引入式(1.1-5)后，质点 i 的角动量又可写成

$$\boldsymbol{H}_i=\boldsymbol{r}_i\times m_i(\boldsymbol{V}_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i) \tag{1.1-6}$$

设航天器对 O 点的总角动量为 $\boldsymbol{H}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\sum_i\boldsymbol{r}_i\times m_i(\boldsymbol{V}_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\\&=\sum_i\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)m_i-\boldsymbol{V}_O\times\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\end{aligned} \tag{1.1-7}$$

由于 $\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i=0$，总角动量表达式又可化简为

$$\boldsymbol{H}=\sum_i\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)m_i$$

当航天器每个质点的质量很小时，设 b 为刚体质量上式变成

$$\boldsymbol{H}=\int_b\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m \tag{1.1-8}$$

如果作用在航天器 B 上的合力矩为 $\boldsymbol{M}$，则有

$$\boldsymbol{M}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1-9}$$

以上所得式(1.1-8)和式(1.1-9)是计算航天器角动量的主要公式，由此将会导出航天器的一般姿态动力学方程组，以及常用的 Euler 方程组。

在航天器的姿态运动中由空间环境产生作用力矩的因素是很多的，例如天气、磁场，太阳风和引力场等。

高空大气的密度按指数函数随高度变化，据各种测量与推算，在 1600km 高度以下都会受到稀薄大气产生的气动作用。

在地球高空数万公里内都有地磁场作用，对航天器的影响是通过体内磁性元件产生磁力矩。

引力场对卫星姿态的影响是产生重力梯度力矩，参看 1.4 节。

环境力矩是一种扰动作用，但也可以用来控制航天器的姿态，例如重力梯度稳定。

动量矩定理式(1.1-9)是相对惯性坐标系的。在飞行力学中研究问题则经常采用航天器固连坐标系，属于动坐标系性质。因此按照矢量的绝对导数与相对导数的关系，设动坐标系内的相对导数为 $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}\right)_b$ 或 $\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$，在航天器固连坐标系上式(1.1-9)应为

$$\boldsymbol{M}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}\right)_b+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H} \tag{1.1-10}$$

式中，$\boldsymbol{\omega}$ 是固连坐标系的角速度矢量。

1.1.2 航天器姿态角

由图 1-1 可知：与航天器固连的坐标系，其 Oz 轴为纵向对称轴。在垂直于 Oz 轴的航天器横截面内取彼此正交的 Ox 轴和 Oy 轴，并使 Ox 轴邻近于轨道运动方向。因此，上列三轴可以符合右手规则，并称为航天器体轴坐标系。航天器的姿态角是体轴坐标系与地心惯性坐标系之间的夹角。设 $Ox_cy_cz_c$ 为地心惯性坐标，一般设 Oz_c 轴沿地垂线指向地面为正，Ox_c 轴与 Oy_c 轴

在同一平面内正交，并与 Oz_c 轴相垂直，见图 1-2。

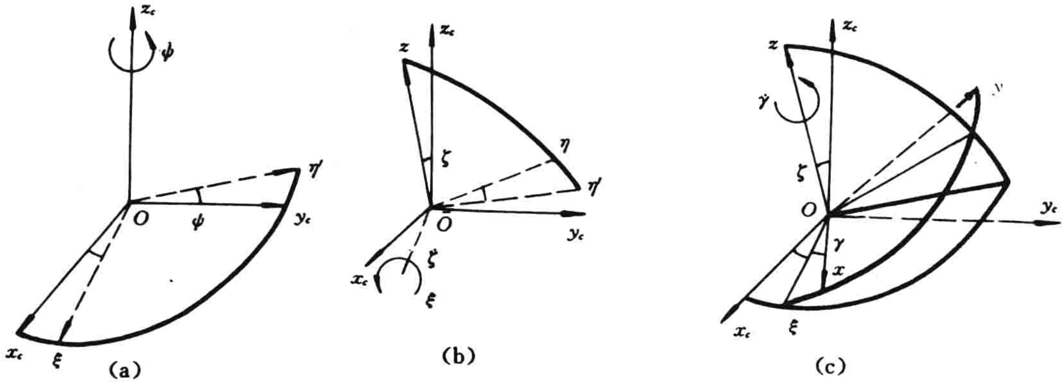

图 1-2　姿态 Euler 角

航天器姿态角常用 Euler 角表示。航天器体轴坐标系 $Oxyz$ 与参考系 $Ox_cy_cz_c$ 重合时，Euler 角等于零。假设按下列次序，发生坐标旋转：

1)绕 Oz_c 轴旋转 ψ 角，称为进动角，见图 1-2a；

2)绕 ξ 轴旋转 ζ 角，得到 $Ox\xi\eta$ 轴系，并称 ζ 角为章动角，见图 2-2b；

3)再绕 Oz 轴旋转 γ 角，形成 $Oxyz$ 坐标系，而 γ 角称为自旋角，见图 2-2c。

以上每次旋转都可以用一个正交变换矩阵说明坐标之间的转换

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta'\\ z_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_c\\ y_c\\ z_c\end{bmatrix} \tag{1.1-11}$$

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\zeta & \sin\zeta\\ 0 & -\sin\zeta & \cos\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi\\ \eta'\\ z_c\end{bmatrix} \tag{1.1-12}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma & 0\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ z\end{bmatrix} \tag{1.1-13}$$

应用上列三种旋转，可以直接得到从参考系 x_c,y_c,z_c 到体轴系 x,y,z 的变换

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\boldsymbol{D}\begin{bmatrix}x_c\\ y_c\\ z_c\end{bmatrix} \tag{1.1-14}$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 为坐标变换矩阵，由式(1.1-11)～(1.1-13)可得

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\cos\gamma\cos\psi-\sin\gamma\cos\zeta\sin\psi & \cos\gamma\sin\psi+\sin\gamma\cos\zeta\cos\psi & \sin\gamma\sin\zeta\\ -\sin\gamma\cos\psi+\cos\gamma\cos\zeta\sin\psi & -\sin\gamma\sin\psi+\cos\gamma\cos\zeta\cos\psi & \cos\gamma\sin\zeta\\ -\sin\zeta\sin\psi & -\sin\zeta\cos\psi & \cos\zeta\end{bmatrix} \tag{1.1-15}$$

如果已知体轴系分量，需要确定参考系上的分量，应用矩阵转置性质可得

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.1-16}$$

航天器在空间发生姿态角变化，说明航天器绕质心产生了旋转，其角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 可用 Euler 角的变化率表示

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\zeta}} + \dot{\vec{\gamma}} \\ &= [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{1.1-17}$$

式中角速度分量 ω_x, ω_y 和 ω_z 是 $\boldsymbol{\omega}$ 在体轴坐标系上的分量。

1.1.3 姿态运动的 Euler 方程

讨论航天器角动量和姿态角的目的是引出姿态运动的动力学方程。参照角动量变化率式(1.1-10)建立姿态动力学方程之前，应先导出角动量在体轴坐标系上的标量表达式。假设 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别是体轴系的三个单位矢量，而对应的角动量的轴上分量为 h_x, h_y, h_z，所以

$$\boldsymbol{H} = h_x \boldsymbol{i} + h_y \boldsymbol{j} + h_z \boldsymbol{k} \tag{1.1-18}$$

在式(1.1-9)中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{bmatrix} \\ &= (\omega_y r_z - \omega_z r_y)\boldsymbol{i} + (\omega_z r_x - \omega_x r_z)\boldsymbol{j} + (\omega_x r_y - \omega_y r_x)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{1.1-19}$$

式中，r_x, r_y, r_z 是 r 在体轴系上的分量。等式(1.1-19)中矩阵对于下式是等价的

$$\begin{bmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

因此在式(1.1-8)中，可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = & [\omega_x (r_y^2 + r_z^2) - \omega_y r_x r_y - \omega_z r_x r_z] \boldsymbol{i} \\ & + [-\omega_x r_x r_y + \omega_y (r_x^2 + r_z^2) - \omega_z r_y r_z] \boldsymbol{j} \\ & + [-\omega_x r_x r_z - \omega_y r_y r_z + \omega_z (r_x^2 + r_y^2)] \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{1.1-20}$$

对此式左右两端积分，因角速度分量与航天器外形、以及航天器内部位置无关，再取 $x = r_x, y = r_y, z = r_z$，对于刚体可定义下列参数

$$\begin{aligned} & I_x = \int_b (y^2 + z^2) \mathrm{d}m, \qquad I_y = \int_b (x^2 + z^2) \mathrm{d}m, \\ & I_z = \int_b (x^2 + y^2) \mathrm{d}m \end{aligned} \tag{1.1-21}$$

$$\begin{aligned} & I_{xy} = \int_b xy \mathrm{d}m, \qquad I_{xz} = \int_b xz \mathrm{d}m, \\ & I_{yz} = \int_b yz \mathrm{d}m \end{aligned} \tag{1.1-22}$$

其中 I_x, I_y, I_z 分别为航天器绕体轴 x, y, z 轴的转动惯量，I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} 为航天器的惯量积。由此可得航天器角动量(1.1-18)表达式中的各分量的关系式

$$
\begin{aligned}
h_x &= I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\
h_y &= -I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\
h_z &= -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z
\end{aligned} \tag{1.1-23}
$$

对于角动量分量又可设下列等式

$$
H_x = h_x, H_y = h_y, H_z = h_z \tag{1.1-24}
$$

对于角动量标量 H_x, H_y, H_z，由式(1.1-23)可知它们分别是角速度分量的线性方程，可得如下矩阵表达式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}
\end{aligned} \tag{1.1-25}
$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 称为惯性张量，综合概括了航天器质量分布对姿态运动的影响。显然

$$
\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \tag{1.1-26}
$$

以上述内容为基础，下面讨论航天器姿态运动的 Euler 方程。由式(1.1-9)表达的导数是角动量对时间的绝对导数，若以相对导数 $(\mathrm{d}\boldsymbol{H}/\mathrm{d}t)_B$ 表示，在航天器固连坐标系上则有

$$
\boldsymbol{M} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}\right)_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H} \tag{1.1-27}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H} &= \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{H} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y H_z - \omega_z H_y \\ \omega_z H_x - \omega_x H_z \\ \omega_x H_y - \omega_y H_x \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.1-28}
$$

作用在航天器上的外力矩 $\boldsymbol{M}$ 分解在体坐标系上的三个标量分别为 M_x, M_y, M_z。于是，由式(1.1-27)和(1.1-28)可得航天器姿态运动的 Euler 方程为

$$
\begin{aligned}
M_x &= \dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y \\
M_y &= \dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z \\
M_z &= \dot{H}_z + \omega_x H_y - \omega_y H_x
\end{aligned} \tag{1.1-29}
$$

式中角动量标量的相对导数由式(1.1-23)求导数后并代入上式，可得航天器绕体坐标系三轴的姿态动力学方程如下

$$
\begin{aligned}
& I_x\dot{\omega}_x - I_{xz}\dot{\omega}_y - I_{xy}\dot{\omega}_z + (-I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z)\omega_y - (-I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z)\omega_z = M_x \\
& I_y\dot{\omega}_y - I_{xy}\dot{\omega}_x - I_{yz}\dot{\omega}_z + (I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z)\omega_y - (-I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z)\omega_x = M_y \\
& I_z\dot{\omega}_z - I_{xy}\dot{\omega}_x - I_{yz}\dot{\omega}_y + (-I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_y)\omega_x - (I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\omega_y = M_z
\end{aligned} \tag{1.1-30}
$$

如果航天器的体坐标系是惯量主轴系，由于惯量积等于零，$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$，航天器姿态

动力学方程组可简化为

$$\begin{aligned}
I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z &= M_x \\
I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z &= M_y \\
I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y &= M_z
\end{aligned} \tag{1.1-31}$$

这是一组常用的航天器姿态运动 Euler 方程组。应用这种形式的姿态动力学方程组,体坐标系必须是惯量主轴,后续章节将会应用这种形式的姿态运动 Euler 方程组。

1.2 航天器的旋转动能

航天器在空间保持姿态不变,经常对体坐标系轴旋转,以求稳定。航天器绕质心旋转的动能称为旋转动能。质点的质量为 $\mathrm{d}m$ 的动能 $\mathrm{d}T$ 等于

$$\mathrm{d}T = \frac{1}{2}V^2\mathrm{d}m \tag{1.2-1}$$

式中绝对速度的矢量等于

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

其中 $\boldsymbol{V}_0=\dot{\boldsymbol{R}}_0$(见图 1-1)。绝对速度点积为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V} &= V^2 \\
&= V_0^2 + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{V}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{1.2-2}$$

于是,航天器的旋转动能应是

$$T = \frac{1}{2}\int_b V^2\mathrm{d}m = \frac{1}{2}m_bV_0^2 + \frac{1}{2}\int_b(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m + \boldsymbol{V}_0\cdot\boldsymbol{\omega}\times\int_b\boldsymbol{r}\mathrm{d}m \tag{1.2-3}$$

因为 $\boldsymbol{r}$ 是以航天器质心为基准,故上式最后一项的积分必为零。剩余的两项中,一项是航天器质量 m_b 集中在质心上的平移动能,另一项是绕质心的旋转动能 T_r,即

$$\begin{aligned}
T_\mathrm{r} &= \frac{1}{2}\int_b((\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{2}\int_b[(\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2]\mathrm{d}m
\end{aligned} \tag{1.2-4}$$

此式展开后变成

$$\begin{aligned}
T_\mathrm{r} = \frac{1}{2}\int_b[&\omega_x^2(y^2+z^2) + \omega_y^2(x^2+z^2) \\
&+ \omega_z(x^2+y^2) - 2\omega_x\omega_z xz \\
&- 2\omega_y\omega_z yz - 2\omega_x\omega_y xy]\mathrm{d}m
\end{aligned} \tag{1.2-5}$$

应用转动惯量表达式(1.1-21)和惯量积表达式(1.1-22),又可将旋转能量写成

$$\begin{aligned}
2T_\mathrm{r} = &\omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z - 2\omega_x\omega_z I_{xz} \\
&- 2\omega_y\omega_z I_{yz} - 2\omega_x\omega_y I_{xy}
\end{aligned} \tag{1.2-6}$$

进一步归纳为

$$\begin{aligned}
2T_\mathrm{r} = &\omega_x[\omega_x I_x - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{xz}] + \omega_y[-\omega_x I_{xy} + \omega_y I_y - \omega_z I_{yz}] \\
&+ \omega_z[-\omega_x I_{xz} - \omega_y I_{yz} + \omega_z I_z]
\end{aligned} \tag{1.2-7}$$

代入式(1.1-23),可以简化上式的书写

$$2T_r = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I\omega} \tag{1.2-8}$$

如果航天器只绕纵向对称轴 oz 旋转,因为 ω_y 与 ω_x 均为零,旋转动能就变成

$$T_r = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 \tag{1.2-9}$$

由式(1.2-6)所确定的旋转动能还可称为 ω 分量的二次型,并导出惯量主轴。其实角动量的三个标量 H_x, H_y, H_z 均可由式(1.2-6)的偏导数表示

$$H_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_i}(2T_r) \qquad i = x, y, z \tag{1.2-10}$$

再对照式(1.1-25)可以看出:由于惯性张量 $\boldsymbol{I}$ 是一个对称矩阵,在此矩阵中删除惯量积,类似于旋转动能只有角速度分量的平方项,并称旋转动能的表达式为规范式。为此目的,对角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 进行矢量变换,选择一个新的固连参考坐标系,使旋转动能只与角速度分量平方项有关。假设新的坐标系与含惯量积坐标系间的转换矩阵为 $\boldsymbol{C}$,且有

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{\omega}' \tag{1.2-11}$$

将此式代入式(1.2-8)后,得到旋转动能的表达式为

$$\begin{aligned} 2T_r &= (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{\omega}') \cdot \boldsymbol{I} \cdot (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{\omega}') \\ &= \boldsymbol{\omega}'^T \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{I} \boldsymbol{C} \boldsymbol{\omega}' \end{aligned} \tag{1.2-12}$$

令 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}'$,则有旋转动能的矩阵表达式

$$2T_r = \boldsymbol{\omega}'^T \boldsymbol{I}' \boldsymbol{\omega}' \tag{1.2-13}$$

此式说明:如果新的惯性张量 $\boldsymbol{I}'$ 不含惯量积,转换矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的形式必须使 $\boldsymbol{I}'$ 为下列对称矩阵

$$\boldsymbol{I}' = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \tag{1.2-14}$$

显然矩阵对角线上元素分别是惯量主轴系的三个主转动惯量。在此条件下,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可简称为形成惯量主轴系的转换矩阵,并具有正交性,$\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{C}^T$。

使用以下方法可以求出转换矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的表达式。惯性张量的特征值是主转动惯量,设 $\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,于是

$$|\boldsymbol{I} - \lambda E| = 0 \tag{1.2-15}$$

再设对应于特征值的单位矢量是 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$,则有

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{e}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{e}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{e}_3 = \lambda_3 \boldsymbol{e}_3$$

由此可以选出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素。令 e_{1x}, e_{1y}, e_{1z} 分别是 $\boldsymbol{e}_1$ 与原体轴坐标系三个轴的方向余弦。类似地也可令 $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 的方向余弦分别为 e_{2x}, e_{2y}, e_{2z} 以及 e_{3x}, e_{3y}, e_{3z}。于是正交型的变换矩阵可以写成

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{bmatrix} \tag{1.2-16}$$

式中的每一个元素由惯性张量 I 的特征值确定。已知各元素后,在新设的惯量主轴系上,角速度 $\boldsymbol{\omega}'$ 的三轴分量 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$,由 $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{\omega}$ 可得

$$\omega_1 = e_{1x}\omega_x + e_{1y}\omega_y + e_{1z}\omega_z$$

$$\omega_2 = e_{2x}\omega_x + e_{2y}\omega_y + e_{2z}\omega_z$$
$$\omega_3 = e_{3x}\omega_x + e_{3y}\omega_y + e_{3z}\omega_z \tag{1.2-17}$$

由上列有关表达式，可以求出航天器绕新设的惯量主轴旋转的动能。

1.3 航天器的无力矩运动

航天器是轴对称的，自身又不产生控制力矩，是一种自旋式人造卫星。不考虑这种卫星受到空间飞行环境的影响，视为无力矩作用，则 $M_x=M_y=M_z=0$。

卫星是轴对称的，可使转动惯量 $I_x=I_y$，见图 1-3。在这种情况下，航天器姿态动力学方程组(1.1-31)可写成下列形式

$$\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z &= 0 \\ I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z &= 0 \\ I_z\dot{\omega}_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.3-1}$$

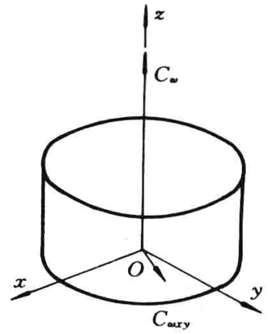

图 1-3 无力矩作用

上列方程组虽然是非线性耦合的，但可以得出解析的结论。由第三式可知绕对称轴的角速度 ω_z 为常数 C_ω。再设

$$\eta = \frac{I_z - I_x}{I_x}C_\omega = \frac{I_y - I_x}{I_x}C_\omega \tag{1.3-2}$$

于是，第一与第二式变成

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x + \eta\omega_y &= 0 \\ \dot{\omega}_y - \eta\omega_x &= 0 \end{aligned} \tag{1.3-3}$$

联立这两个方程而得到

$$\omega_x\dot{\omega}_x + \omega_y\dot{\omega}_y = 0$$

因此

$$\omega_x \mathrm{d}\omega_x + \omega_y \mathrm{d}\omega_y = 0$$

其积分结果为

$$C_{\omega xy}^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = 常数 \tag{1.3-4}$$

此时卫星的角动量 H_x 和 H_y 分别等于

$$H_x = I_x\omega_x, \qquad H_y = I_y\omega_y$$

卫星在 xoy 平面内的合成角动量 H_{xy} 等于

$$H_{xy} = I_y C_{\omega xy}$$

而卫星的角动量 $\boldsymbol{H}$ 及角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 分别为

$$\boldsymbol{H} = \overline{H}_{xy} + I_z\overline{C}_\omega \tag{1.3-5}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \overline{C}_\omega + \overline{C}_{\omega xy} \tag{1.3-6}$$

式中，$C_{\omega xy}$ 是角速率 ω_x 与 ω_y 的合成值，称为横向角速率。它与卫星体轴系固连，处于同自旋轴

垂直的平面内，并绕对称轴旋转。卫星的速率 $\boldsymbol{\omega}$ 由轴向与横向两部分组成，其值除与 C_ω 有关外，还取决于 ω_x 与 ω_y 的初始值。角动量 $\boldsymbol{H}$ 也是由轴向与横向两部分组成，见式(1.3-5)。这些由无力矩运动所得的概念，对第 2 章将是有用的。

1.4 重力梯度力矩

航天器在空中飞行要产生重力梯度力矩是在地球引力场内的一种自然现象，图 1-4 可以清楚地说明这一点。图中 O 点是航天器的质心，距地心的矢径为 $\boldsymbol{R}_0$，轨道矢径显然也由 $\boldsymbol{R}_0$ 表示。假设在卫星上有两个质量相等的质点 m_1 和 m_2，因为 $\boldsymbol{R}_1<\boldsymbol{R}_0$，$\boldsymbol{R}_2>\boldsymbol{R}_0$，所以两个质点上的引力不等，引力 $\boldsymbol{F}_1$ 大于引力 $\boldsymbol{F}_2$。再设两个质点相距质心的矢径 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$，其模相等。可见，由于两质点的引力差，将对质心产生力矩，称之为重力梯度力矩 $\boldsymbol{M}_g$。

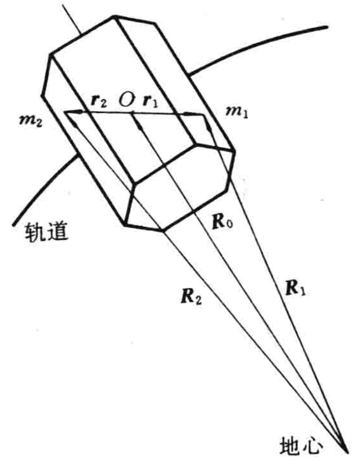

图 1-4 重力梯度力矩

根据万有引力定律，重力梯度力矩的计算公式为

$$\boldsymbol{M}_g=\int_b \boldsymbol{r}\times\frac{\mu(\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{r}|^3}\mathrm{d}m \tag{1.4-1}$$

式中，μ 为地球引力常数，分母可以展成 Taylor 级数。考虑到航天器是有限尺寸的几何体，$|\boldsymbol{r}|\ll|\boldsymbol{R}_0|$，在 $\boldsymbol{R}_0$ 邻近 $|\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{r}|^{-3}$的 Taylor 级数表达式如下

$$|\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{r}|^{-3}=R_0^{-3}\left(1+\frac{2\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{r}}{R_0^2}+\frac{r^2}{R_0^2}\right)^{-3/2}$$

$$\approx\frac{1}{R_0^3}\left(1-\frac{3\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{r}}{R_0^2}\right) \tag{1.4-2}$$

在此式中略去了高阶小量项。于是重力梯度力矩又可写成

$$\boldsymbol{M}_g=\frac{\mu}{R_0^3}\int_b \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{r})\left(1-3\frac{\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{r}}{R_0^2}\mathrm{d}m\right) \tag{1.4-3}$$

因为在上式中 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}=0$，上式变成

$$\boldsymbol{M}_g=\frac{3\mu}{R_0^5}\int_b(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{R}_0)(\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}m \tag{1.4-4}$$

因为

$$\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{R}_0=\frac{3\mu}{R_0^5}(\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{R})\int_b r^2\boldsymbol{E}\mathrm{d}m=0 \tag{1.4-5}$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。相加式(1.4-4)和(1.4-5)，同时考虑到矢径 $\boldsymbol{R}_0$ 与积分变量 $\mathrm{d}m$ 无关，可得

$$\boldsymbol{M}_g=\frac{3\mu}{R_0^5}\left[\boldsymbol{R}_0\times\left(\int_b r^2\boldsymbol{E}\mathrm{d}m\right)\cdot\boldsymbol{R}_0-\int_b(\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{R}_0)\mathrm{d}m\right]$$

$$=\frac{3\mu}{R_0^5}\left[\boldsymbol{R}_0\times\left(\int_b r^2\boldsymbol{E}\mathrm{d}m\right)\cdot\boldsymbol{R}_0-\boldsymbol{R}_0\times\left(\int_b \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}\mathrm{d}m\right)\cdot\boldsymbol{R}_0\right]$$

$$=\frac{3\mu}{R_0^5}\boldsymbol{R}_0\times\left(\int_b(r^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{rr})\mathrm{d}m\right)\cdot\boldsymbol{R}_0 \tag{1.4-6}$$

式中，$r^2=x^2+y^2+z^2$，而

$$r^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{rr}=r^2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y&z\end{bmatrix}$$

$$\int_b(r^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{rr})\mathrm{d}m=\int_b\begin{bmatrix}y^2+z^2&-xy&-xz\\-xy&x^2+z^2&-yz\\-xz&-yz&x^2+z^2\end{bmatrix}\mathrm{d}m$$

$$=\begin{bmatrix}I_x&-I_{xy}&-I_{xz}\\-I_{xy}&I_y&-I_{yz}\\-I_{xz}&-I_{yz}&I_z\end{bmatrix}=\boldsymbol{I} \tag{1.4-7}$$

所以，作用在卫星上的重力梯度力矩等于

$$\boldsymbol{M}_g=\frac{3\mu}{R_0^5}\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{I}\boldsymbol{R}_0=\frac{3\mu}{R_0^5}\begin{bmatrix}0&-R_z&R_y\\R_z&0&-R_x\\-R_y&R_x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_x&-I_{xy}&-I_{xz}\\-I_{xy}&I_y&-I_{yz}\\-I_{xz}&-I_{yz}&I_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_x\\R_y\\R_z\end{bmatrix} \tag{1.4-8}$$

在航天器固连体坐标轴系上，重力梯度力矩分解为三轴分量 M_{gx}，M_{gy}，M_{gz}，所以有

$$\boldsymbol{M}_g=M_{gx}\boldsymbol{i}+M_{gy}\boldsymbol{j}+M_{gz}\boldsymbol{k} \tag{1.4-9}$$

将式(1.4-8)展开可得

$$\begin{aligned}M_{gx}&=\frac{3\mu}{R_0^5}[-R_z(-I_{xy}R_x+I_yR_y-I_{yz}R_z)+R_y(-I_{xz}R_x-I_{yz}R_y+I_zR_z)]\\M_{gy}&=\frac{3\mu}{R_0^5}[R_z(I_xR_x-I_{xy}R_y-I_{xz}R_z)-R_x(-I_{xz}R_x-I_{yz}R_y+I_zR_z)]\\M_{gz}&=\frac{3\mu}{R_0^5}[-R_y(I_xR_x-I_{xy}R_y-I_{xz}R_z)+R_x(-I_{xy}R_x+I_yR_y-I_{yz}R_z)]\end{aligned} \tag{1.4-10}$$

式中，R_x，R_y，R_z 是卫星距地心的矢径在体轴系上的分量。当体轴系为惯量主轴系时，因 $I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0$，重力梯度力矩分量的公式又可简化成如下形式

$$\begin{aligned}M_{gx}&=\frac{3\mu}{R_0^5}(I_z-I_y)R_yR_z\\M_{gy}&=\frac{3\mu}{R_0^5}(I_x-I_z)R_xR_z\\M_{gz}&=\frac{3\mu}{R_0^5}(I_y-I_x)R_xR_y\end{aligned} \tag{1.4-11}$$

作为例子，卫星沿圆周轨道飞行时可以看出重力梯度力矩的性质。在圆周轨道上，万有引力等于卫星质量 m 与向心加速度的乘积。由于万有引力与矢径 $\boldsymbol{R}_0$ 共线，设轨道角速度为 Ω，可得

$$\frac{\mu}{R_0^2}m=m\cdot(\Omega^2\cdot R_0) \tag{1.4-12}$$