

大气、海洋

无穷维动力系统

郭柏灵 黄代文 著



P433/1014



NUAA2013035300

P433
1014-1

大气、海洋 无穷维动力系统

郭柏灵 黄代文 著



浙江出版联合集团 浙江科学技术出版社

2013035300

图书在版编目(CIP)数据

大气、海洋无穷维动力系统 / 郭柏灵, 黄代文著.

— 杭州: 浙江科学技术出版社, 2010. 12

ISBN 978-7-5341-3912-3

I. ①大… II. ①郭… ②黄… III. ①海洋动力学

IV. ①P731.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 232850 号

书 名 大气、海洋无穷维动力系统
著 者 郭柏灵 黄代文

出版发行 浙江科学技术出版社

杭州市体育场路 347 号 邮政编码: 310006

联系电话: 0571-85164982

E-mail: msn@zkpress.com

排 版 杭州理想广告有限公司
印 刷 浙江新华数码印务有限公司

开 本	787 × 1092 1/16	印 张	16.75
字 数	258 000		
版 次	2010 年 12 月第 1 版	2010 年 12 月第 1 次印刷	
书 号	ISBN 978-7-5341-3912-3	定 价	58.00 元

版权所有 翻印必究

(图书出现倒装、缺页等印装质量问题, 本社负责调换)

责任编辑 莫沈茗 刘 燕
责任校对 张 宁

责任美编 孙 菁
责任印务 田 文

0082808102

前 言

众所周知,天气预报和气候预测,台风、海啸等突发灾害以及全球变暖等都是涉及我国民生和经济发展的重大问题.因此,对这些问题进行科学研究是具有重大理论意义和应用价值的.1979年,我国著名大气物理学家曾庆存院士在文献[209]中对有关大气、海洋运动的数学模型的数学理论做了大量的开创性研究;20世纪80年代起,我国的丑纪范院士及其合作者对强迫耗散的大气原始方程组的全局分析理论做了大量的创新工作;1992年,法国著名数学家Lions J. L.、Temam R.和Wang S.在文献[129]中给出了带耗散的大气原始方程组的新形式,并证明了该方程组弱解的整体存在性,从而引发了许多数学家研究大气、海洋原始方程组的数学理论的兴趣.我国学者穆穆院士和中国科学院大气物理所李建平教授也在大气动力学的数学理论研究方面做了许多很有意义的工作.最近,周秀骥院士在文献[200]中提出了研究大气随机动力学的必要性及其重大意义.

近几年来,在国家自然科学基金委员会的组织和支持下,我们和中国科学院大气物理所、北京大学地球物理系的学者对海陆气非线性偏微分方程组及其无穷维动力系统进行合作研究,取得了一系列成果.

本书主要介绍了有关大气、海洋非线性发展方程及其(随机)无穷维动力系统研究的最新进展,以及我们取得的一些研究成果^[82~86, 98~101].这里我们要特别感谢曾庆存院士、穆穆院士、刘式适教授、李建平教授等许多专家学者的大力支持、指导和帮助.我们希望本书的出版有助于了解和研究数学如何与大气、海洋科学进行交叉,并由此探索出一条不同学科真正交叉起来的研究道路.

本书力求以简单明了的形式介绍上述内容.由于作者水平有限,书中一定有一些不当和错误之处,敬请读者批评指正.

郭柏灵

2009年10月11日

目 录

第一章	描述大气、海洋运动的非线性方程组	1
1.1	大气、海洋的基本方程组	2
1.1.1	大气的基本方程组	2
1.1.2	海洋的基本方程组	4
1.2	球坐标系下的大气、海洋方程组	5
1.2.1	球坐标系下的大气方程组	5
1.2.2	球坐标系下的海洋方程组	7
1.3	静力近似与气压坐标系下的大气方程组	7
1.4	地形坐标系下的大气方程组	10
1.5	β 平面近似与局地直角坐标系下的海洋和大气方程组	13
1.6	层结近似下的大气和海洋方程组	15
1.7	边界条件	18
第二章	准地转模式	21
2.1	正压模式及二维准地转方程	21
2.1.1	正压模式	21
2.1.2	二维准地转方程	23
2.2	三维准地转方程	27
2.3	多层准地转模式	32
2.4	面准地转方程	36
2.4.1	面准地转方程的引入	36
2.4.2	面准地转方程的一些研究成果	38
第三章	大气、海洋原始方程组的适定性和整体吸引子	55
3.1	湿大气原始方程组弱解和轨道吸引子的存在性	57
3.1.1	湿大气原始方程组	57
3.1.2	问题IBVP弱解的整体存在性	60
3.1.3	湿大气方程组的轨道和整体吸引子	70
3.2	湿大气原始方程组强解的长时间行为	77

3.2.1	湿大气原始方程组	78
3.2.2	本节的主要结果	80
3.2.3	局部强解关于时间的一致估计	82
3.2.4	强解的整体存在性和唯一性	101
3.2.5	关于无穷维动力系统的一些预备知识	104
3.2.6	整体吸引子的存在性	106
3.3	大气原始方程组的整体适定性	107
3.3.1	本节的主要结果	107
3.3.2	IBVP的整体适定性	109
3.3.3	IBVP的光滑解的整体存在性	114
3.4	海洋原始方程组的适定性	123
3.4.1	带粘性的海洋原始方程组	123
3.4.2	本节的主要结果	125
3.4.3	强解的局部存在性	126
3.4.4	强解的整体存在性和唯一性	130
第四章	大气、海洋随机动力系统	141
4.1	二维准地转动力系统的随机吸引子	141
4.1.1	模型	142
4.1.2	解的整体存在性和唯一性	144
4.1.3	关于随机吸引子的预备知识	149
4.1.4	随机吸引子的存在性	150
4.2	带随机力的海洋方程组的整体适定性和吸引子	155
4.2.1	三维海洋随机方程组	155
4.2.2	海洋随机方程组的初边值问题IBVP的新形式	157
4.2.3	解的局部存在性和先验估计	162
4.2.4	IBVP的整体适定性	174
4.2.5	随机吸引子的存在性	176
4.3	具有随机边界的海洋方程组	178
4.3.1	模型	179
4.3.2	初边值问题(4.3.10)~(4.3.17)的新形式	180
4.3.3	带随机边界的海洋方程组的适定性	186
4.3.4	随机吸引子的存在性	192

第五章 稳定性和不稳定性理论	197
5.1 重力波的稳定性和不稳定性	197
5.1.1 分层流中重力内波的稳定性和不稳定性	197
5.1.2 一般重力内波的稳定性	201
5.1.3 一般惯性重力内波的稳定性	210
5.2 Rossby波的不稳定性	212
5.2.1 线性不稳定性的必要条件	213
5.2.2 纯正压的线性不稳定性	217
5.2.3 斜压的线性不稳定性	221
5.3 Rossby波的稳定性	224
5.3.1 二维准地转流的稳定性	224
5.3.2 鞍点型的二维准地转流的稳定性	229
5.4 Rayleigh-Bénard对流的临界Rayleigh数	234
5.4.1 线性稳定性	236
5.4.2 $R_a < R_a^*$ 时的非线性稳定性	241
5.4.3 $R_a > R_a^*$ 时的非线性不稳定性	242
参考文献	247

第一章 描述大气、海洋运动的非线性方程组

人们通常用两种方法实现天气预报和气候预测：第一种，统计方法，即利用天气的历史记录和现在状况以及数值分析来预测将来的天气和全球气候变化；第二种，动力学方法。由于大气是可压缩流体，海洋是不可压缩流体，由流体力学方程组和热力学方程组，再结合大气、海洋运动的特点，就可建立描述大气、海洋运动的数学模型和方程组，再通过偏微分方程、动力系统以及计算数学理论的研究，便可得到大气、海洋运动的一些定性理论和大气、海洋演化过程的数值计算结果。

用第二种方法实现的天气预报，通常称为数值天气预报。数值天气预报是20世纪大气科学的一个重要应用研究成就，它的理论基础是大气动力学。1922年，Richardson首次提出了数值天气预报的概念^[170]。他的想法是：通过数值求解描述大气运动的原始方程组(primitive equations)，把大气的演变过程比较准确地模拟出来，从而定量地预报天气。由于当时计算能力比较落后，Richardson 无法实现数值天气预报的梦想。之后，在应用Rossby等人创立的长波理论和尺度分析理论的基础上，Charney建立了二维准地转模型，他与合作者于1950年利用这个模型在普林斯顿的高等研究所的ENIAC计算机上首次成功地作出了24小时的数值天气预报。随着大气科学的蓬勃发展和大型计算机加工处理资料 and 进行数值计算能力的增强，20世纪60年代中期人们开始转向应用原始方程组进行数值天气预报^[102,135,168,204]，从而大大延长了数值天气预报的时效。后来，人们开始应用大气、海洋原始方程组进行长期数值天气预报、气候预测和大气、海洋环流数值模拟。

要实现建立在数学物理方法基础上的数值天气预报、气候预测、大气和海洋环流数值模拟，必须建立合理的大气、海洋动力学模式，即描述大气、海洋运动的非线性偏微分方程(组)以及初边值条件。本章我们主要介绍描述大气、海洋运动的基本方程组和原始方程组及其边界条件。特别地，我们将详细给出第三章、第四章重点研究的大气、海洋原始方程组的推导过程。更加详细的内容可参见文献[209]，也可以参考文献[76, 150, 192, 195, 208]。

1.1 大气、海洋的基本方程组

1.1.1 大气的基本方程组

把大气、海洋看做连续介质,人们可以用Euler方法来描述大气、海洋运动.在惯性坐标系(坐标轴方向相对于恒星是固定的坐标系)下,依据Newton第二定律,得到大气的运动方程:

$$\frac{d_I \mathbf{V}_I}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_3 p + g_I + D,$$

其中 $\mathbf{V}_I$ 是大气的绝对速度(在惯性坐标系下的速度); $\frac{d_I \mathbf{V}_I}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}_I}{\partial t} + (\mathbf{V}_I \cdot \nabla_3) \mathbf{V}_I$ 是绝对加速度(在惯性坐标系下的加速度); ρ 为大气的密度; p 为大气的压强; $-\frac{1}{\rho} \text{grad}_3 p$ 是气压梯度力(由于空气压强不均匀,周围空气对空气微团的作用力); g_I 是地心引力; D 是分子粘性力(分子摩擦力、耗散力),它是由于空气的内摩擦或湍流动量传输所导致的耗散力.

通常情况下,人们关心的是大气相对于地球的运动.所以,我们可以取与地球一起自转的旋转坐标系作为参考坐标系来观察大气的相对运动.设旋转坐标系的旋转角速度为 Ω (即地球的自转角速度), $\mathbf{V}$ 是大气的相对速度, $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ 是大气在旋转坐标系的相对加速度,那么

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_I &= \mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r}, \\ \frac{d_I \mathbf{V}_I}{dt} &= \frac{d\mathbf{V}_I}{dt} + \Omega \times \mathbf{V}_I, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{r}$ 是矢径.上面两式是力学中常见的公式,第二式的证明见于文献[159]中的1.5节.根据前面的三式,我们知道:在旋转坐标系中,大气的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_3 p + g - 2\Omega \times \mathbf{V} + D, \quad (1.1.1)$$

这里 $g = g_I + \Omega^2 \mathbf{r}$ 为通常所说的重力(Ω 为地球的自转角速度的大小), $-2\Omega \times \mathbf{V}$ 为Coriolis力, $\Omega^2 \mathbf{r}$ 为惯性离心力,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_3$$

称为随体微商或实质导数.

因为大气的内部没有质量的源汇,而且大气可以看做连续介质,所以由质量守恒定律,可以得到大气的连续性方程

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}_3 \mathbf{V} = 0. \quad (1.1.2)$$

当人们研究地球大气圈内对流层和平流层中宏观的大规模运动的时候,可以把大气看做理想气体,从而得到大气的状态方程:

$$p = R\rho T, \quad (1.1.3)$$

这里不考虑大气中的水蒸气, T 为大气的绝对温度, $R = 287 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ 为干空气的气体常数.

由热力学第一定律, 得到大气的热力学方程

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\frac{1}{\rho}}{dt} = \frac{dQ}{dt},$$

这里 $c_v = 718 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ 为空气的定容比热, $\frac{dQ}{dt}$ 为单位时间内单位质量空气从外界得到的热量. 应用(1.1.3), 我们有

$$R \frac{dT}{dt} = \frac{d\frac{p}{\rho}}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + p \frac{d\frac{1}{\rho}}{dt} = \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} + p \frac{d\frac{1}{\rho}}{dt}.$$

把前面两式加起来, 我们可以得到

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{dQ}{dt}, \quad (1.1.4)$$

其中 $c_p = c_v + R$ 为空气的定压比热.

方程组(1.1.1)~(1.1.4)称为干大气的基本方程组. 该方程组中的未知函数是 V, ρ, p, T . 如果 D 和 $\frac{dQ}{dt}$ 是给定的, 那么方程组(1.1.1)~(1.1.4)是封闭的.

当人们必须考虑空气中的水蒸气时, 湿大气的状态方程为

$$p = R\rho T(1 + cq), \quad (1.1.5)$$

这里 $q = \frac{\rho_1}{\rho}$ 是空气中水蒸气的混合比, ρ_1 是空气中水蒸气的密度. 在本书中, c 将代表正的常数并根据具体的位置变化, 这里 $c = 0.618$. 湿大气的热力学方程为

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT(1 + cq)}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{dQ}{dt}, \quad (1.1.6)$$

空气中的水蒸气守恒方程为

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} W_1 + W_2, \quad (1.1.7)$$

其中 W_1 表示单位体积的水蒸气由于相变而引起的变化率, W_2 表示单位质量的水蒸气由于水平和垂直方向上的水蒸气扩散而引起的体积变化率. 方程组(1.1.1)、(1.1.2)、(1.1.5)~(1.1.7)称为湿大气的基本方程组.

1.1.2 海洋的基本方程组

假设海洋内部没有质量的源汇, 那么在旋转坐标系中, 海洋的基本方程组由如下的方程组成:

运动方程

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\text{grad}_3 p + \rho g - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + D,$$

连续性方程

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}_3 \mathbf{V} = 0,$$

状态方程

$$\rho = f(T, S, p),$$

热力学方程

$$\frac{dT}{dt} = Q_1,$$

盐度守恒方程

$$\frac{dS}{dt} = Q_2,$$

其中 S 是盐度, Q_1 为单位时间内单位质量海水从外界得到的热量, Q_2 为单位时间内单位质量海水从外界得到的盐量.

由于上面的方程组太复杂, 人们必须对它做一定的简化处理. 通常情况下, 可以取Boussinesq近似, 即把项 ρg 和状态方程中的 ρ 看做未知的函数, 但是把其他各处的 ρ 均视为常数 ρ_0 . 并且, 人们用如下的近似函数代替上面的状态方程

$$\rho = \rho_0[1 - \beta_T(T - T_0) + \beta_S(S - S_0)],$$

其中 β_T, β_S 为正的常数, T_0, S_0 分别为温度和盐度的参考值. 因此, 我们可以得到如下的海洋方程组:

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\text{grad}_3 p + \rho g - 2\rho_0 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + D, \quad (1.1.8)$$

$$\text{div}_3 \mathbf{V} = 0. \quad (1.1.9)$$

$$\rho = \rho_0[1 - \beta_T(T - T_0) + \beta_S(S - S_0)], \quad (1.1.10)$$

$$\frac{dT}{dt} = Q_1, \quad (1.1.11)$$

$$\frac{dS}{dt} = Q_2. \quad (1.1.12)$$

注记 1.1.1 状态方程(1.1.10)是一个经验方程, 出现于文献[196]. 更一般的形式为

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \beta_T(T - T_0) + \beta_S(S - S_0) + \frac{p}{\rho_0 c_s^2} \right],$$

其中 c_s 是正的常数, 该方程出现于文献[192]的2.4.1小节中.

1.2 球坐标系下的大气、海洋方程组

1.2.1 球坐标系下的大气方程组

大气在旋转的地球表面上运动. 为了研究大气的相对运动, 如果不考虑地形的起伏, 人们可以用球面来近似地表示地球表面, 进而可以在球坐标系中讨论大气运动.

下面, 我们来推导球坐标系中的大气基本方程组. 令地心为球坐标的原点, $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 代表地球的余纬(它与纬度互余), $\varphi (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ 代表地球的经度, r 代表地球上点到地心的距离, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ 和 $\mathbf{e}_r$ 分别是 θ , φ , r 方向上的单位向量, $\mathbf{e}_\theta$ 的方向为沿着经圈向南, $\mathbf{e}_\varphi$ 的方向为沿着纬圈向东, $\mathbf{e}_r$ 的方向为沿着向径向上, 若采用微分几何的符号, 则表示为:

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}.$$

按照速度的定义, 空气的速度 $\mathbf{V}$ 可以表示为

$$\mathbf{V} = v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_r \mathbf{e}_r,$$

其中

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} = r \sin \theta \dot{\varphi}, \quad v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}.$$

在球坐标系中, 任一量 F 的随体微商为:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [F(t + \Delta t, \theta(t + \Delta t), \varphi(t + \Delta t), r(t + \Delta t)) - F(t, \theta(t), \varphi(t), r(t))] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) F = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial}{\partial r} \right) F. \end{aligned}$$

因为在球坐标系中, $\nabla_3 = \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}$, 所以, 在球坐标系中的随体微商为

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_3.$$

利用上式, 经过计算, 可以得到

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{v_\varphi \cot \theta}{r} \mathbf{e}_\varphi - \frac{v_\theta}{r} \mathbf{e}_r,$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} &= -\frac{v_\varphi \cot \theta}{r} \mathbf{e}_\theta - \frac{v_\varphi}{r} \mathbf{e}_r, \\ \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= -\frac{v_\varphi}{r} \mathbf{e}_\varphi + \frac{v_\theta}{r} \mathbf{e}_\theta.\end{aligned}$$

因为地球的自转角速度 $\boldsymbol{\Omega} = -\Omega \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \Omega \cos \theta \mathbf{e}_r$, 则

$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 2\Omega \cos \theta v_\varphi \mathbf{e}_\theta + (-2\Omega \cos \theta v_\theta - 2\Omega \sin \theta v_r) \mathbf{e}_\varphi + 2\Omega \sin \theta v_\varphi \mathbf{e}_r.$$

利用球坐标系中的散度公式

$$\operatorname{div}_3 \mathbf{V} = \nabla_3 \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r},$$

和

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{d(v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_r \mathbf{e}_r)}{dt} \\ &= \mathbf{e}_\theta \frac{dv_\theta}{dt} + \mathbf{e}_\varphi \frac{dv_\varphi}{dt} + \mathbf{e}_r \frac{dv_r}{dt} + v_\theta \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} + v_\varphi \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} + v_r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt},\end{aligned}$$

我们可以把方程组(1.1.1) ~ (1.1.4) 写为如下球坐标系中的大气基本方程组:

$$\begin{aligned}\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{1}{r}(v_r v_\theta - v_\varphi^2 \cot \theta) &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + 2\Omega \cos \theta v_\varphi + D_\theta, \\ \frac{dv_\varphi}{dt} + \frac{1}{r}(v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \cot \theta) &= -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2\Omega \cos \theta v_\theta - 2\Omega \sin \theta v_r + D_\varphi, \\ \frac{dv_r}{dt} - \frac{1}{r}(v_\theta^2 + v_\varphi^2) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\Omega \sin \theta v_\varphi + D_r, \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} \right) &= 0, \\ c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} &= \frac{dQ}{dt}, \\ p &= R\rho T,\end{aligned}$$

其中 $D = (D_\theta, D_\varphi, D_r)$ 是粘性项.

由于人们所研究的大气层的厚度(约120 km)远小于地球的半径($a \approx 6371$ km), 故可将上面方程组中以系数出现的 r 用 a 来替代(通常称为取薄层大气近似), 而且对于大尺度的运动, 可略去连续性方程中的项 $\frac{2v_r}{r}$, 因此我们可以将上面方程组简化为以下形式:

$$\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{1}{a}(v_r v_\theta - v_\varphi^2 \cot \theta) = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \theta} + 2\Omega \cos \theta v_\varphi + D_\theta, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{dv_\varphi}{dt} + \frac{1}{a}(v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \cot \theta) = -\frac{1}{\rho a \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2\Omega \cos \theta v_\theta - 2\Omega \sin \theta v_r + D_\varphi, \quad (1.2.2)$$

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{1}{a}(v_\theta^2 + v_\varphi^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\Omega \sin \theta v_\varphi + D_r, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = 0, \quad (1.2.4)$$

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{dQ}{dt}, \quad (1.2.5)$$

$$p = R\rho T, \quad (1.2.6)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial}{\partial r}.$$

1.2.2 球坐标系下的海洋方程组

设海水的速度 $\mathbf{V} = (u, v, w)$, u, v, w 分别是 θ, φ, r 方向上海水的速度. 类似于上面的推导, 我们可以得到: 在球坐标系中, Boussinesq 近似下的海洋方程组为

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{a}(wu - v^2 \cot \theta) = -\frac{1}{\rho_0 a} \frac{\partial p}{\partial \theta} + 2\Omega \cos \theta v + D_u, \quad (1.2.7)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{a}(wv + uv \cot \theta) = -\frac{1}{\rho_0 a \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2\Omega \cos \theta u - 2\Omega \sin \theta w + D_v, \quad (1.2.8)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{1}{a}(u^2 + v^2) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\rho}{\rho_0} g + 2\Omega \sin \theta v + D_w, \quad (1.2.9)$$

$$\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial u \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad (1.2.10)$$

$$\rho = \rho_0[1 - \beta_T(T - T_0) + \beta_S(S - S_0)], \quad (1.2.11)$$

$$\frac{dT}{dt} = Q_1, \quad (1.2.12)$$

$$\frac{dS}{dt} = Q_2, \quad (1.2.13)$$

其中 $D = (D_u, D_v, D_w)$ 是粘性项,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial r}.$$

1.3 静力近似与气压坐标系下的大气方程组

因为描述大气运动的基本方程组含有太多复杂的信息(运动尺度从10 km的小尺度、100 km的中尺度一直到1000 km的大尺度都有), 所以人们目前仍然无法从数值和理论上彻底地解决它. 为此, 人们必须略去一些中小尺度的因素, 合理地简化描述大气运动的基本方程组, 才能实现数值天气预报. 由于全球大气的垂直方向上的尺度比水平方向上的尺度小得多, 在精确度要求不高的情况下, 最自然的简化方法就是取**静力近似**(hydrostatic approximation), 即把垂直方向上的运动方程用静力平衡方程

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g$$

来代替. 静力平衡方程表明了大气的垂直方向上的气压梯度力与重力之间的平衡关系, 它符合大尺度大气的气象观测数据, 同时也符合理论上的分析.

这里, 我们用尺度分析来简要说明静力近似的合理性. 对于大尺度的大气运动, 运动的水平特征长度尺度 $L \approx O(10^6)$, 运动的垂直特征长度尺度 $D \approx O(10^4)$, 水平方向的速度的特征尺度 $U \approx O(10^1)$, 垂直方向的速度的特征尺度 $W \approx O(10^{-2})$, $\Omega \approx O(10^{-4})$, 气压的特征尺度 $P \approx O(10^5)$. 从而, 我们知道: 在垂直方向上的运动方程中, 除了 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \approx O(10^1)$, $-g \approx O(10^1)$, 其他各项的尺度均不超过 $O(10^{-3})$, 所以, 我们可以用静力平衡方程来代替垂直方向上的运动方程.

由静力平衡方程, 我们可以看出气压 p 是 r 的单调下降的函数, 从而 $(\theta, \varphi, r; t)$ 和 $(\theta, \varphi, p; t)$ 是一一对应的. 因此, 我们可以用气压坐标系 $(\theta, \varphi, p; t)$ (也称为等压面坐标系) 来代替坐标系 $(\theta, \varphi, r; t)$. 记新的气压坐标系为 $(\theta^*, \varphi^*, p; t^*)$, 则:

$$t^* = t, \theta^* = \theta, \varphi^* = \varphi, p = p(\theta, \varphi, r; t).$$

下面我们来推导球坐标系下大气基本方程组在新的气压坐标系 $(\theta^*, \varphi^*, p; t^*)$ 下的形式. 首先, 在气压坐标系中, 任一量 F 的随体微商为:

$$\frac{dF}{dt^*} = \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \dot{\theta}^* \frac{\partial}{\partial \theta^*} + \dot{\varphi}^* \frac{\partial}{\partial \varphi^*} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) F = \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) F.$$

为了得到运动方程在新的气压坐标系下的形式, 我们只要求气压梯度力的形式. 在气象学中, 通常用高度 $z = r - a$ 来代替 r , 从而可以把原坐标表示为新坐标的函数 $t = t^*, \theta = \theta^*, \varphi = \varphi^*, z = r - a = z(\theta^*, \varphi^*, p; t^*)$, 因此, 我们有如下的关系式:

$$p = p(\theta, \varphi, a + z(\theta^*, \varphi^*, p; t^*); t).$$

对上面的关系式关于 p 求微商, 得到

$$1 = \frac{\tilde{\partial} p}{\tilde{\partial} r} \frac{\partial r}{\partial p} = \frac{\tilde{\partial} p}{\tilde{\partial} r} \frac{\partial z}{\partial p},$$

这里, 为了区别两个坐标系中的求导, 我们用 $\frac{\tilde{\partial} p}{\tilde{\partial} r}$ 表示 p 对原来坐标 r 的求导, 用 $\frac{\partial z}{\partial p}$ 表示 z 对新坐标 p 的求导, 本节下面的符号也类似地定义. 对 p 的关系式关于 θ^* 和 φ^* 求微商, 我们可以得到

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\tilde{\partial} p}{\tilde{\partial} \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \theta^*} + \frac{\tilde{\partial} p}{\tilde{\partial} r} \frac{\partial r}{\partial \theta^*} = \frac{\tilde{\partial} p}{\tilde{\partial} \theta} + \frac{\tilde{\partial} p}{\tilde{\partial} r} \frac{\partial r}{\partial \theta^*}, \\ 0 &= \frac{\tilde{\partial} p}{\tilde{\partial} \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi^*} + \frac{\tilde{\partial} p}{\tilde{\partial} r} \frac{\partial r}{\partial \varphi^*} = \frac{\tilde{\partial} p}{\tilde{\partial} \varphi} + \frac{\tilde{\partial} p}{\tilde{\partial} r} \frac{\partial r}{\partial \varphi^*}. \end{aligned}$$

利用上面的两个式子和静力平衡方程, 得到

$$-\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta^*}, \quad -\frac{1}{\rho a \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{1}{a \sin \theta^*} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*},$$

其中 $\Phi = gz$ 通常称为地势。利用式子 $1 = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial p}$ 和静力平衡方程, 我们可以得到

$$p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -RT,$$

因此, 运动方程在新的气压坐标系下的形式为:

$$\frac{dv_\theta}{dt^*} - \frac{1}{a} v_\varphi^2 \cot \theta^* = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta^*} + 2\Omega \cos \theta^* v_\varphi + D_\theta, \quad (1.3.1)$$

$$\frac{dv_\varphi}{dt^*} + \frac{1}{a} v_\theta v_\varphi \cot \theta^* = -\frac{1}{a \sin \theta^*} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*} - 2\Omega \cos \theta^* v_\theta + D_\varphi, \quad (1.3.2)$$

$$p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -RT. \quad (1.3.3)$$

在推导过程中, 我们用到了随体微商不随坐标系改变这一知识, 又根据 Coriolis 力不做功的原理略去项 $-2\Omega \sin \theta^* v_r$, 并且因为对于大尺度的大气运动, v_r 很小, 我们也略去了 $\frac{1}{a} v_r v_\theta$, $\frac{1}{a} v_r v_\varphi$.

下面, 我们来推导连续性方程在新的坐标系下的形式。由静力平衡方程, 可得 $\rho = -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial r}$. 将这一式子代入方程(1.2.4), 得到

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} \left(\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = 0. \quad (1.3.4)$$

利用原来坐标下的随体微商的定义

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial}{\partial r},$$

及

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{a \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial p}{\partial r},$$

得到

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \frac{\partial p}{a \partial \theta} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \frac{\partial p}{a \sin \theta \partial \varphi} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (1.3.5)$$

应用气压坐标系与原来坐标系的关系, 我们可以得到

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial}{\partial p}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta^*} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial p}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi^*} + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial p}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{dp}}{\partial r} &= \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}, \\
-\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \frac{\partial \tilde{p}}{a \partial \theta} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{a \sin \theta \partial \theta} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{a \partial \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial p} - \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{a \sin \theta \partial \theta} \right) \\
&= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \left[\frac{\partial \tilde{p}}{a \partial \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial p} - \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta^*} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial p} \right) v_\theta \sin \theta \right] = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \left(\frac{\partial v_\theta \sin \theta^*}{a \sin \theta^* \partial \theta^*} \right), \\
-\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \frac{\partial \tilde{p}}{a \sin \theta \partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \frac{\partial v_\varphi}{a \sin \theta \partial \varphi} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{a \sin \theta \partial \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial p} - \frac{\partial v_\varphi}{a \sin \theta \partial \varphi} \right) \\
&= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \left[\frac{\partial \tilde{p}}{a \sin \theta \partial \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial p} - \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^*} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial p} \right) v_\varphi \right] = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{a \sin \theta^* \partial \varphi^*} \right),
\end{aligned}$$

这里在证明第一个等式的过程中用到 $\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dt^*}$. 结合上面三个等式, 我们可以从(1.3.4)和(1.3.5)推得气压坐标系下的连续性方程:

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} + \frac{1}{a \sin \theta^*} \left(\frac{\partial v_\theta \sin \theta^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi^*} \right) = 0, \quad (1.3.6)$$

气压坐标系下的热力学方程:

$$c_p \frac{dT}{dt^*} - \frac{RT}{p} \dot{p} = \frac{dQ}{dt^*}. \quad (1.3.7)$$

我们把方程组(1.3.1)~(1.3.3)、(1.3.6)和(1.3.7)称为气压坐标系下的干大气方程组, 其中

$$\frac{d}{dt^*} = \frac{\partial}{\partial t^*} + \dot{\theta}^* \frac{\partial}{\partial \theta^*} + \dot{\varphi}^* \frac{\partial}{\partial \varphi^*} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p}.$$

由气压坐标系下的随体微商的定义和静力平衡方程, 我们可以得到垂直方向上的速度:

$$\begin{aligned}
v_r &= \frac{dr}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t^*} + \dot{\theta}^* \frac{\partial z}{\partial \theta^*} + \dot{\varphi}^* \frac{\partial z}{\partial \varphi^*} + \dot{p} \frac{\partial z}{\partial p} \\
&= \frac{\partial z}{\partial t^*} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial z}{\partial \theta^*} + \frac{v_\varphi}{a \sin \varphi^*} \frac{\partial z}{\partial \varphi^*} + \dot{p} \frac{\partial z}{\partial p} \\
&= \frac{\partial z}{\partial t^*} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial z}{\partial \theta^*} + \frac{v_\varphi}{a \sin \varphi^*} \frac{\partial z}{\partial \varphi^*} - \frac{\dot{p}}{\rho g}.
\end{aligned}$$

1.4 地形坐标系下的大气方程组

在实际的应用中, 人们有时需要考虑地形的起伏. 因为在这种情况下地表面不是一个等压面, 所以不能采用气压坐标系, 否则人们将难于提出合理的下边界条件. 为此, 可以采用如下的地形坐标系 $(\theta, \varphi, \zeta; t)$, 即