



励学 · 金融学系列

金融数学简明教程

主 编 杨 婷
副主编 马 荣



南京大学出版社



励学 · 金融学系列

金融数学简明教程

主 编 杨 婷
副主编 马 荣



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金融数学简明教程/ 杨婷主编. —南京: 南京大学出版社, 2014. 4

(励学·金融学系列)

ISBN 978-7-305-12947-6

I. ①金… II. ①杨… III. ①金融—经济数学—高等学校—教材 IV. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 051599 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
网 址 <http://www.NjupCo.com>
出 版 人 左 健

丛 书 名 励学·金融学系列
书 名 金融数学简明教程
主 编 杨 婷
副 主 编 马 荣
责任编辑 陈 超 府剑萍 编辑热线: 025-83592193

照 排 江苏南大印刷厂
印 刷 南京京新印刷厂
开 本 787×1092 1/16 印张 15.25 字数 370 千
版 次 2014 年 4 月第 1 版 2014 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-12947-6
定 价 29.80 元

发行热线 025-83594756 83686452
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购图书销售部门联系调换

前 言

在高等教育日益普及的今天,各级民办高等院校如雨后春笋般应运而生。面对竞争愈发激烈的就业市场,如何使学生通过大学的学习在未来占有优势,是高校普遍关心的问题,对于民办高校更是突出!“实务型教学”成为民办高校当下生存的基础和办学的宗旨。但如何切实办出实务的特色是许多民办高校面临的迫切挑战。我国高校的教学计划与许多发达国家所实行的实务教学目前还有很大差距。

在德国,许多民办高校和专科学校的学生学历并不高,但他们很受用人单位青睐。原因在于这些高校走的是实务型“职业培训”的教学之路:在有限的时间内最有效地学习对具体工作最有用的知识,同时将省下来学书本的时间用到企业的实习中,使学生大大缩短了将来在企业的工作培训期和适应期,能更快上手,有力地增加学生的就业竞争力。

这种“职业培训”教学的成功经验,促使我们尝试改革传统高校金融系的数学教学体系。目的是减轻学生沉重的数学压力,提高数学学习效率,力争做到学有所用,突出实务性。目前,这种数学教学思路在全国高校的金融专业还没有先例,本教材就是在这种指导思想下诞生的。

本教材的特点:以金融系本科毕业生在金融领域工作中的技能需要为导向,首先对金融应用数学(即传统教学中的“金融数学”)的内容进行调整,只介绍常用到的金融数学模型,强调如何用,而不是如何证;强调面要广,而不是内容深;再对基础数学(即传统教学中的“高等数学”)的内容进行精选,删除一些艰深的数学内容,留下实用性强的内容,目的是使学生具备能够掌握上述金融数学模型所需要的数学基础;最后将精选的金融应用数学和基础数学内容全部汇总,整合成这本金融数学的教材。

教材分为两部分:第一部分主要介绍利息理论的知识,第二部分则包括资产资本定价理论及金融衍生品的定价理论;每一部分都分为基础数学篇和金融应用篇。教材汇总了金融系本科教学里的微积分、概率论及金融数学的内容,

大学四年里金融系学生所需基本的数学内容都涵盖在书中,内容全面、易懂和实用,旨在起到一个简单的“职业培训手册”作用。

本教材的目的是介绍一个金融数学基础,重在实用;学生若渴望在金融领域有更深的造诣,还需要结合其他相关教材。

教材编写之初得到了南京大学金融系于润老师、方先明老师、孙武军老师的大力支持和帮助,他们就本书的框架结构、特色方向给出了宝贵建议。在后期校对工作中严威、潘若愚、孙哲、孙义程提供了许多帮助,章丽霞参与了基础数学篇部分例题的编写,在此一并表示感谢!

本书在编写过程中参阅了大量的相关书籍、文献,在参考文献中都有标记,在此对于这些文献的作者表示诚挚的感谢。如尚存遗漏之处,请原谅我们的无心之失。

本书的写作分工如下:杨婷负责了全书的框架编排,内容拣选、全书统稿及金融应用篇的撰写。马荣负责基础数学篇的撰写。

因时间、精力等因素所限,本教材难免有不足之处,若能得到同行专家和读者的指正,不胜感谢。

杨 婷

2014年2月

目 录

导论 金融市场	1
---------	---

第一部分 利息理论

基础数学篇

第 1 章 函数与极限	7
第 1 节 函数	7
第 2 节 数列的极限	12
第 3 节 函数的极限	15
第 2 章 导数与微分	26
第 1 节 导数的概念	26
第 2 节 求导法则	29
第 3 节 微分	34
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	38
第 1 节 微分中值定理	38
第 2 节 洛必达(L'Hospital)法则	41
第 3 节 函数的单调性、极值与最值	43
第 4 章 不定积分	48
第 1 节 不定积分的概念和基本积分表	48
第 2 节 换元积分法	50
第 3 节 分部积分法	53

第 5 章 定积分	56
第 1 节 定积分的概念	56
第 2 节 定积分的计算	58
第 6 章 多元函数微积分	64
第 1 节 二元函数的极限	64
第 2 节 偏导数	66
第 3 节 二重积分	71
第 7 章 无穷级数	80

金融应用篇

第 8 章 利息理论	87
第 1 节 利息的基本函数	88
第 2 节 利息的计算	90
第 3 节 小区间的利息度量工具	96
第 9 章 年金	101
第 1 节 期末付年金	101
第 2 节 期初付年金	103
第 3 节 延期年金	105
第 4 节 永续年金	105
第 10 章 投资收益分析	107
第 1 节 贴现现金流分析	107
第 2 节 再投资分析	110
第 3 节 投资收益分配	111
第 11 章 债务偿还	114
第 1 节 等额分期偿还	114
第 2 节 等额偿债基金	116

第二部分 金融产品定价理论

基础数学篇

第 12 章 随机事件及其概率	121
第 1 节 随机事件.....	121
第 2 节 概率.....	126
第 3 节 条件概率.....	128
第 4 节 事件的独立性.....	132
第 13 章 随机变量及其分布	136
第 1 节 随机变量及其概率分布.....	136
第 2 节 常见的几种重要分布.....	140
第 3 节 随机变量函数的分布.....	145
第 4 节 二维随机变量.....	146
第 14 章 随机变量的数字特征	153
第 1 节 数学期望.....	153
第 2 节 方差、协方差	155
第 3 节 大数定理.....	160
第 4 节 中心极限定理.....	162
第 15 章 参数估计与假设检验	167
第 1 节 参数估计.....	167
第 2 节 假设检验.....	171

金融应用篇

第 16 章 债券和股票	175
第 1 节 固定收益证券的类型和特点.....	175
第 2 节 债券基本定价.....	176
第 3 节 普通股票.....	178

第 17 章 资产组合管理	180
第 1 节 投资组合理论.....	181
第 2 节 资本资产定价理论.....	186
第 18 章 远期与期货	191
第 1 节 基本衍生证券.....	191
第 2 节 衍生产品定价理论.....	193
第 3 节 远期合约的应用.....	197
第 19 章 期权	200
第 1 节 期权的基本原理.....	200
第 2 节 二叉树的定价理论.....	206
第 3 节 连续时间模型定价理论.....	216
附录	225
参考文献	236

导论 金融市场

学习目的

了解金融数学的发展历程和研究领域。

引 言

早在古希腊时代,第一张借据产生的那一刻,金融(Finance)就出现了.时至今日,金融的概念已经扩展到了银行的利息、各种证券交易.那么究竟什么是金融?其需要解决的核心问题是什么?为此不得不动用经济学家历来钟爱的荒岛鲁宾逊(Robinson Crusoe)传奇.故事仍然从鲁宾逊在沉船的残骸中取回了最后的一些谷子开始.他必须现在就消费其中的一部分,否则立刻就会饿死;但又不能图一时享受把谷子全部吃光,还必须拿出一部分用于耕种,期待来年有所收获以维持生计.到此为止一切那样有条不紊.但很快鲁宾逊遇到一个新问题,在他耕种得已经很熟悉的那块土地上,每年的产出量都是一个不太多的固定数目,他对此不太满意.一次在岛东边巡视时,他发现了一片看上去非常肥沃的冲积平原.他估计如果把谷子播种在这块土地上,来年可能会有更好的收成.但是他对此又没有十分的把握,如果把所有的种子都投放在这个风险项目上,而又不幸出了什么差错的话,那么他辛辛苦苦一年,到头来仍然难逃饿死的命运.现在问题复杂了,鲁宾逊必须同时决定现在消费多少谷子、投放多少谷子在原来的土地上,又投放多少谷子在有风险的土地上.

一、金融与金融数学

我们很容易想到所谓金融,顾名思义就是指资金的融通或者说资本的借贷.通过上面的故事更进一步看,我们认为,金融需要解决的核心问题就是:如何在不确定的环境下,对资源进行跨期地最优配置.这还算不上是一个定义,但是它确实为我们提供了一条线索,换句话说,作为消费者的鲁宾逊必须决定如何跨期地在不确定的环境下,把资源最优地配置给同时又是生产者的鲁宾逊.这就是金融所要解决的核心问题.

金融核心:在不确定的环境下,通过资本市场,对资源进行跨期(最优)配置.

无论从哪个角度看,这个不确定环境下的资源跨期最优配置问题都是相当棘手的.那么现实中的经济体系是如何对这个问题做出解答的呢?伴随着金融学的深化与发展,金融数学(Financial Mathematics)应运而生.

在现代金融学的发展过程中,两次华尔街革命产生了一门新兴的学科,即金融数学.随着金融市场的发展,金融创新日益涌现,各种金融衍生产品层出不穷,这给金融数学的发展提出了更高的要求,同时也为金融数学这一门学科的发展提供了广阔的空间.

金融数学是金融学自身发展而衍生出来的一个新的分支,是数学与金融学相结合而产生的一门新的学科,是金融学由定性分析向定性分析与定量分析相结合,由规范研究向实证

研究为主转变,由理论阐述向理论与实用研究并重,金融模糊决策向精确化决策发展的结果.

金融数学:运用数学工具来定量研究金融问题的一门学科.与其说是一门独立学科,还不如说是作为一系列方法而存在.

金融数学研究的中心问题是风险资产(包括衍生金融产品和金融工具)的定价和最优投资策略的选择.

二、金融工具分类

金融市场是指资金供求双方运用各种金融工具,通过各种途径实现货币借贷和资金融通的交易活动的总称.其含义有广义和狭义之分.广义是指金融机构与客户之间、各金融机构之间、客户与客户之间所有以资金商品为交易对象的金融交易,包括存款、贷款、信托、租赁、保险、票据抵押与贴现、股票债券买卖等全部金融活动.狭义则一般限定在以票据和有价证券为交易对象的融资活动范围之内.

按是否与实际信用活动相关,金融工具可分为原生金融工具和衍生金融工具.

1. 原生金融工具

原生金融工具指在实际信用活动中出具的能证明债权债务关系或所有权关系的合法凭证.其种类主要有商业票据、债券等债权债务凭证,以及股票、基金等所有权凭证.原生金融工具是金融市场上最广泛使用的工具,也是衍生金融工具赖以生存的基础.常见的原生金融工具如下:

(1) 商业票据:由金融公司或某些信用较高的企业开出的无担保短期票据,分为本票和汇票两种.

(2) 股票:一种由股份有限公司签发的用以证明股东所持股份的凭证,分为普通股和优先股.

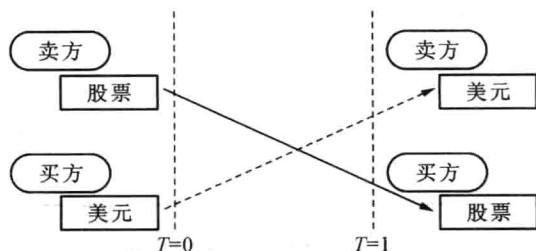
(3) 债券:一种有价证券,是社会各类经济主体为筹措资金而向债券投资者出具的,并且承诺按一定利率定期支付利息和到期偿还本金的债券债务凭证,按发行人分为国家债券与公司债券.

2. 衍生金融工具

衍生金融工具是在原生金融工具的基础上派生出来的各种金融合约及其组合形式的总称.其种类包括远期、期货、期权、互换.衍生产品的特点相较于原生产品更突显出杠杆性、高风险性和虚拟性.

(1) 远期合约:甲、乙双方(目前)时刻 t 签订一份合约:在将来给定时刻 T 以(当前)设定的价格成交一种物品(称为标的资产(Underlying Asset)或标的物品(Underlying Commodity)),这样的一份合约称为 $[t, T]$ 上的一个远期(合约)(Forward (Contract)).所设定的成交价格称为交割价格(Strike Price),也称执行价格(Exercise Price),时刻 T 称为到期时刻(Maturity).在到期时刻 T 将成为标的资产买方的称为多头(Long Position),而将成为标的资产卖方的称为空头(Short Position).

我们以标的资产是股票的远期合约通过图示来解释,远期是如何操作的:



合约条款:

① 在确定的日期(到期日),合约的买方必须支付规定数量的现金(即交割价格)给合约的卖方。

② 合约的卖方必须在到期日转让相应股票给买方。

到期日买方的利润或损失: $S_T - K$ 。

S_T ——到期时的股票价格;

K ——交割价格。

(2) 期货合约(Futures Contracts): 由期货交易所统一制订的、规定在将来某一特定的时间和地点交割一定数量和质量实物商品或金融商品的标准化合约。

(3) 期权(Option): 在未来一定时期可以买卖的权利,是买方向卖方支付一定数量的金额(指权利金)后拥有的在未来一段时间内(指美式期权)或未来某一特定日期(指欧式期权)以事先规定好的价格(执行价格)向卖方购买(指看涨期权)或出售(指看跌期权)一定数量的特定标的物的权利,但不负有必须买进或卖出的义务。期权交易事实上就是这种权利的交易。买方有执行的权利,也有不执行的权利,完全可以灵活选择。

(4) 互换(Swaps): 两个或两个以上当事人按照商定条件,在约定的时间内交换一系列现金流的合约。可以看作是一系列远期的组合。主要的互换类别有利率互换(Interest Rate Swap, IRS)和货币互换(Currency Swap)。

投资者可以通过互换这样的工具获益的原因是基于一个重要的比较优势理论。

比较优势理论(Comparative Advantage)是英国著名经济学家大卫·李嘉图(David Ricardo)提出的。他认为,在两国都能生产两种产品,且一国在这两种产品的生产上均处于有利地位,而另一国均处于不利地位的条件下,如果前者专门生产优势较大的产品,后者专门生产劣势较小(即具有比较优势)的产品,那么通过专业化分工和国际贸易,双方均能从中获益。

接下来我们以一个利率互换的例子来解释比较优势理论如何在操作中发挥它的神奇作用的。

例 利率互换(Interest Rate Swaps)是指双方同意在未来的一定期限内根据同种货币的同样的名义本金交换现金流,其中一方的现金流根据浮动利率计算出来,而另一方的现金流根据固定利率计算。常见期限包括1年、2年、3年、4年、5年、7年与10年,也偶见30年与50年的利率互换。

双方进行利率互换的主要原因是双方在固定利率和浮动利率市场上具有比较优势。假定A、B公司都想借入5年期的1000万美元的借款,A想借入与6个月期相关的浮动利率借款,B想借入固定利率借款。但两家公司信用等级不同,故市场向它们提供的利率也不同:

	固定利率	浮动利率
A 公司	10.0%	6 个月 LIBOR+0.30%
B 公司	11.2%	6 个月 LIBOR+1.00%
借款成本差额	1.2%	0.7%

A 较 B 在固定利率和浮动利率方面均有绝对优势. 假设 A、B 都想借入期限为 5 年的 1 000 万美元, A 在固定利率借款方面有比较优势, B 在浮动利率方面有比较优势.

根据比较优势理论, A 以年利率 10% 的固定利率借入 5 年的 1 000 万美元, B 以 6 个月 LIBOR+1.00% 借入 1 000 万美元.

这样操作之后, 双方总的筹资成本降低了

$$(11.2\% + 6 \text{ 个月 LIBOR} + 0.30\%) - (10.00\% + 6 \text{ 个月 LIBOR} + 1.00\%) = 0.5\%.$$

这是互换利益, 假设由双方各分享一半.

三、重要的金融数学工具

金融数学的主要目的就是根据标的资产的价格计算衍生产品的价格. 而发现其价格的两个金融数学工具就是无套利的条件与复制的方法.

1. 无套利

若在一个市场中, 人们可以身无分文入市, 通过资产的买卖(允许卖空和借贷)使得能够最终不欠债, 且有正概率的机会获得盈利, 则称该市场存在套利机会. 假如市场不存在套利机会, 则称市场无套利.

无套利市场满足以下条件:

$$V(t=0) = 0 \Rightarrow V(t>0) = 0,$$

其中 $V(t)$ 表示 t 时刻的资产价值. 相反地, $V(t>0) > 0$ 说明市场上有套利机会.

一般假设投资者是理性的, 理性的金融市场是满足无套利的. 套利机会往往发生在不同地域间的短时期内.

例 一股票在纽约 140 美元, 在伦敦 100 英镑, 而汇率为每英镑 1.43 美元. 套利者会如何操作?

美国买入股票, 英国卖出. 无风险获利 $143 - 140 = 3$ (美元).

这时大量的套利者就会在纽约市场买入该股票, 导致纽约市场上该股票价格上涨; 而在伦敦市场卖出该股票, 导致伦敦市场上该股票价格下跌. 供求关系的变化使两个市场上的股票价格趋于一致并最终平衡, 此时再无套利机会.

2. 复制

复制是指将一个金融工具以组合头寸来加以表示.

关于这两个工具的具体应用, 我们在后面的章节里还会作进一步更详细的介绍.

第一部分

利息理论

一切金融现象都离不开“利息”二字,它是解决复杂的金融问题的基础,故我们在本书开始先要重点介绍一下基本的利息理论。为了掌握利息理论我们需要具备基础的微积分知识。第一部分的基础数学篇着重介绍微积分的内容,在具备基础的数学知识前提下,在金融应用篇再来介绍利息理论。

基础数学篇

第1章 函数与极限

学习目的

1. 掌握基本初等函数的性质及其图形;
2. 熟练掌握利用极限的性质和四则运算法则,以及利用两个重要极限求极限的方法;
3. 理解无穷小量、无穷大量的概念,会用等价无穷小量求极限.

函数是高等数学的主要研究对象,极限是微积分的基本工具,因此,我们先来研究函数和极限.

第1节 函 数

一、函数的概念和基本性质

定义 1-1 设 D 是一个非空实数集, x, y 是两个变量. 若对于 $\forall x \in D$, 按照某个对应法则 f , 总有唯一确定的 y 值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, $x \in D$. 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, 集合 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域.

$f(x)$ 的全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$.

例 1-1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x-2}; \quad (2) y = \frac{1}{x} + \ln(x^2-4).$$

解 (1) 要使 $y = \sqrt{3x-2}$ 有意义, 需 $3x-2 \geq 0$, 则 $x \geq \frac{2}{3}$, 故函数的定义域为 $\left\{x \mid x \geq \frac{2}{3}\right\}$;

(2) 要使 $y = \frac{1}{x} + \ln(x^2-4)$ 有意义, 需

$$x^2-4 > 0, \text{ 且 } x \neq 0,$$

则 $x < -2$ 或 $x > 2$, 故函数的定义域为 $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$.

函数的定义中,每一个 $x \in D$, 只能有唯一的一个 y 值与它对应, 这样定义的函数称为**单值函数**; 若同一个 x 值可以对应多于一个 y 值, 则称这种函数为**多值函数**.

函数 $f(x)$ 给出了 x 轴上的点集 D 到 y 轴上的点集 R_f 之间的单值对应, 也称为**映射**, 对于 $a \in D$, $f(a)$ 称为映射 f 下 a 的**象**, a 则称为 $f(a)$ 的**原象**.

函数常用的三种表示方法: 解析法(或公式法)、列表法和图像法.

注 函数的定义中有两个基本要素: 定义域与对应法则. 因此, 只有当两个函数的定义域与对应法则完全相同时, 才认为它们是同一个函数.

函数具有以下的基本性质:

(1) 有界性

定义 1-2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若存在一个常数 $M(L)$, 使得 $\forall x \in D$, 都有

$$f(x) \leq M (f(x) \geq L),$$

则称 $f(x)$ 为 D 内有上(下)界的函数, 数 $M(L)$ 称为 $f(x)$ 在 D 内的一个上(下)界.

定义 1-3 设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 若存在一个正数 $K > 0$, 使得 $\forall x \in D$, 都有

$$|f(x)| \leq K,$$

则称 $f(x)$ 在 D 内是有界函数; 否则, 称为无界函数.

有界函数的等价定义是: 若 $y = f(x)$ 在 D 内既有上界又有下界, 则称 $f(x)$ 在 D 内是有界函数.

$y = f(x)$ 在 D 内有界当且仅当数集 $f(D)$ 是有界集, 即

$$\forall f(x) \in f(D), L \leq f(x) \leq M,$$

其中 M, L 为常数, 分别称为 $f(D)$ 的一个上界和一个下界.

无界的正面描述是:

$y = f(x)$, $x \in D$ 是无界函数当且仅当 $\forall M > 0, \exists x \in D$, 使得 $|f(x)| > M$.

有界函数的几何意义:

若函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 为有界函数, 则 $f(x)$ 的图像

$$\text{graph } f(x) = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

完全落在直线 $y = M$ 和 $y = -M$ 之间.

注 函数的有界性与函数自变量 x 的取值范围有关, 如: $y = x$, 在 $\mathbf{R}$ 内无界, 但在任何有限区间内都有界.

(2) 单调性

定义 1-4 设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 对区间 $I \subseteq D$, 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 \leq x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) \leq f(x_2) (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称 $y = f(x)$ 在区间 I 内**单调递增**(**单调递减**), 也称 $y = f(x)$ 为区间 I 内的**单调递增函数**(**单调递减函数**). 单调递增函数和单调递减函数统称为**单调函数**.