线性代数

陆剑虹 编

XIAN XING DAI SHU

航空工业出版社

线 性 代 数

陆剑虹 编

航空工业出版社

2002

内 容 提 要

本书是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会制定的《线性代数》教学基本要求以及编者多年讲授该课程的讲义整理、修改而成的。内容包括 n 阶行列式，n 维向量空间，线性方程组，矩阵，矩阵的对角标准形和二次型，最后一部分还介绍了线性空间和线性变换的基本知识。每章后面附有一定数量的习题，书末附有部分习题答案。最后一章及书中小部分打"*"的内容可供选用。

本书适用于一般高等院校工科各专业选作教材使用，也可供教师教学参考。使用本书，课内学时为40学时～45学时。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陆剑虹编.—北京:航空工业出版社,1997.2
ISBN 7-80134-112-0

Ⅰ.线…　Ⅱ.陆…　Ⅲ.线性代数-高等院校-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 25578 号

前　言

本书是在南京航空航天大学本科生讲义《线性代数》的基础上修改、补充而写成的。全书共六章，附有习题及部分习题答案。根据高等学校工科数学课程指导委员会的有关要求，本书系统地阐述了线性代数中的一些基本理论，介绍了一些基本的计算方法，为工科本科生提供了必备的数学知识和数学工具。

线性代数课一般安排在一年级下学期和二年级上学期。根据学生的实际情况，本教材力求做到在体系完整的基础上，保证基本，突出重点。在内容的叙述上，遵循由具体到抽象，由特殊到一般的原则，力争为学生提供一本内容要求适中，便于学习的教科书。

本书要求授课时间为40学时～45学时。凡是打“*”的可不作基本要求，供学生自学或教师补充授课使用。

本书修改和出版过程中，南京航空航天大学教材科，理学院有关同志及同事们给予作者很大的支持，吕炯兴教授仔细审阅了书稿，在此向他们表示深切的谢意。

限于水平，书中缺点和错误难免，望读者指正。

目　录

第一章　n 阶行列式

行列式是一个重要的数学工具，不但在数学的各领域中，而且在其他学科中也会经常用到它，在线性代数中更是不可缺少。因此，本书首先介绍行列式。我们将给出 n 阶行列式的定义，并讨论它的性质、计算及简单应用。同时，将介绍求解一类非齐次线性方程组的 Cramer 法则，以及由此得到的方程个数与未知量个数相同的齐次线性方程组有非零解的必要条件。

为有助于 n 阶行列式的学习，先介绍关于二阶、三阶行列式的基本知识。

第一节　二阶和三阶行列式

一、行列式概念的引进

行列式的概念是从解方程个数与未知量个数相同的线性方程组问题中引进来的。所谓线性方程组，是指未知量的最高次是一次的方程组。例如二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

式中：$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},b_1,b_2$ 是常数；x_1,x_2 是未知量。

利用中学里讲过的加减消元法，从(1.1)可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

于是，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一的解，而且

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为便于记忆上述结果，可引进二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

等式左端是四个数（称行列式的元素）排成两行两列的方形数表加上记号“| |”，它表示一个二阶行列式。等式右端的数表示这样一个二阶行列式所代表的数值。

利用二阶行列式的概念，上面讨论结果可叙述为：二元线性方程组(1.1)，当它的系数组成的行列式（称系数行列式）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时有唯一解，而且这个解可用下面公式表示：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.2}$$

这样的公式很有规律，而且很容易记忆。

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

可以引进三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

三阶行列式值的计算方法可采用(图 1-1)所示“对角线法则”来记忆。且称连接 a_{11}, a_{22}, a_{33} 的一条对角线为行列式的主对角线。

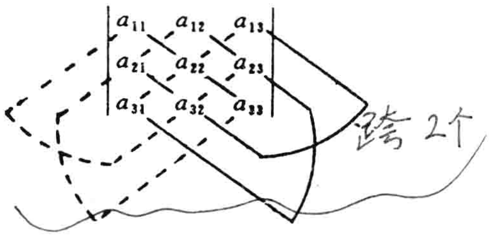

图 1-1

其中用实线连接起来的三个元素相乘并带正号；用虚线连接起来的三个元素相乘带负号。

如 $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix} = (-2)\times 4\times 6 + 1\times 7\times 0 + 5\times 3\times 8 - 5\times 4\times 0$$

$$-1\times 3\times 6 - (-2)\times 7\times 8 = 166$$

利用消元法求解三元线性方程组(1.3)，可得类似的结果：三元线性方程组(1.3)，当它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$ 时有唯一解，而且这个解可用下面的公式表示：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \\ x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D} \end{cases} \tag{1.4}$$

简记 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,3)$，其中 D 是方程组的系数行列式，D_j 是将 D 中第 j 列换成方程组(1.3)的常数列($b_1b_2b_3$)后得到的一个三阶行列式。

以上求解线性方程组的方法称**克莱姆(Cramer)法则**。可以看出，形如(1.3)的线性方程组，当系数行列式 $D\neq0$ 时，可通过计算三阶行列式 D,D_1,D_2,D_3，求得它的唯一的一组解。

例 1 用克莱姆法则求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ -2x_1+x_2-x_3=-3 \\ x_1-4x_2+2x_3=-5 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}=11$$

因为 $D\neq0$，根据克莱姆法则知方程组有唯一解。

再计算 $D_j(j=1,2,3)$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=33 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}=11$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix}=-22$$

于是方程组的解是

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=3 \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=1 \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=-2 \end{cases}$$

二、行列式的性质

一个二阶、三阶行列式，从原则上讲，都可以根据定义计算它的值。但是，对于有些三阶行列式来说，有时不很方便。下面一些三阶行列式就是如此。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 16 & 25 & 36 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 100 & 101 & 50 \\ 200 & 202 & 60 \\ 300 & 303 & 70 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+b_3+c_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

因此，有必要进一步研究它们的性质，另外寻找一些切实可行的计算方法。同时也为下面学习 n 阶行列式打下一个基础。

行列式的性质(下面均以三阶行列式说明，对二阶行列式易知也适用)。

(一)行列互换，行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

（二）行列式任意两行互换，行列式的值反号。若第一、三行互换，可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

（三）行列式某一行有公因子，则公因子可以提到行列式号外。若第二行有公因子 k，可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

（四）如果行列式的某一行的三个元素可以表示成两项之和，那么可以拆成两个行列式。若第二行的三个元素可以表示成两项之和，可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

（五）将行列式一行的倍数加到另一行上，行列式的值不变。若将第一行的 k 倍加到第三行上，可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \end{vmatrix}$$

由以上性质还可以推得如下推论。

1. 行列式中有两行相同，行列式的值等于零。
2. 行列式中有一行元素都等于零，那么行列式的值等于零。
3. 行列式中有两行元素成比例，那么行列式的值等于零。

这些性质的证明是不难的，我们都可以根据行列式的定义用计算的方法来推得。下面举例证明性质（二），即证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

其余任意两行互换的情况，同理可证。

由行列式定义，上式等式的左端、右端分别为

左端$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$

右端$=-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}-a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{32})$

比较上式两表达式可得：左端＝右端，故性质（二）成立。

由性质（一）可知，以上性质（二）至性质（五）及由此得出的推论对于行列式的列来说同

样成立。

行列式性质的正确应用，将给行列式的计算和化简带来不少的方便。下面看几个例子。

例 2 计算下列三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 16 & 25 & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

（反复利用性质（五），将行列式化为一个上三角形行列式，即主对角线下方元素为零的一个行列式。）

$$\begin{vmatrix} 100 & 101 & 50 \\ 200 & 202 & 60 \\ 300 & 303 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 1 & 50 \\ 200 & 2 & 60 \\ 300 & 3 & 70 \end{vmatrix} = 100 \times 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

（利用性质（五）、性质（三）化简，再由推论 1. 即得结果）

例 3 化简下列三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+b_3+c_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1+a & x_1+b & x_1+c \\ x_2+a & x_2+b & x_2+c \\ x_3+a & x_3+b & x_3+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+a & x_1+b & x_1+c \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 \\ x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix} = 0$$

成比例

（反复利用性质（五）化简，再由推论 3. 即得结果）

三、行列式按行（列）展开定理

从二阶、三阶行列式定义看，当然计算二阶比三阶方便。因此，常考虑能否化三阶行列式的计算为二阶行列式计算，即能否“降阶”计算。事实上，一个三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

若按第一行的三个元素合并项，并提公因子可得

$$D = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

再定义行列式元素 a_{ij} 的**余子式**——划去元素 a_{ij} 所在的行、列余下元素按原来次序构成的一个二阶行列式，记 M_{ij}。

行列式元素 a_{ij} 的**代数余子式**——$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

于是可得

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \tag{1.5}$$

同理，若分别按第二行，第三行的三个元素合并项，并提公因子可得

$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} \tag{1.6}$$

$$D=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \tag{1.7}$$

归纳(1.5)(1.6)(1.7)得下列三阶行列式按行展开定理。

定理 1 三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行的元素与自己的代数余子式的乘积之和。即

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+a_{k3}A_{k3}=\sum_{j=1}^{3}a_{kj}A_{kj} \qquad (k=1,2,3)$$

同理可得三阶行列式按列展开定理。

定理 1′ 三阶行列式等于它的任意一列的元素与自己的代数余子式的乘积之和。即

$$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+a_{3k}A_{3k}=\sum_{i=1}^{3}a_{ik}A_{ik} \qquad (k=1,2,3)$$

在利用按行(列)展开定理计算行列式时,往往是与它的性质结合使用的。可先选择某一行(或列),利用性质将其中的两个(或一个)元素化为零,然后再用行(或列)展开定理。

例 4 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 16 & 25 & 36 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 16 & 9 & 20 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 20 \end{vmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & -6 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=-$$

在实际问题中往往会遇到未知量不止三个的线性方程组,其一般形式如下:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

这是一个方程个数与未知量个数相等的线性方程组,其中 n 可取大于或等于 1 的任何正整数。为了研究它的解法,就需要先将二、三阶行列式概念推广,引进 n 阶行列式的概念,并研究它的性质及计算方法。

第二节 n 阶行列式定义及性质

一、n 阶排列

为了引进 n 阶行列式的概念,先介绍一些有关排列的知识。

定义 1 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列。

例如(2 4 3 1)是一个四阶排列,(4 5 3 2 1)是一个五阶排列。由自然数 1,2,

3 组成的三阶排列有如下六个

$(1\ \ 2\ \ 3)$，$(1\ \ 3\ \ 2)$，$(2\ \ 1\ \ 3)$，$(2\ \ 3\ \ 1)$，$(3\ \ 1\ \ 2)$，$(3\ \ 2\ \ 1)$。

一般地，一个 n 阶排列可用 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示，所有 n 阶排列的总数是 $\boldsymbol{n!}$ 个。

定义 2 在一个排列中，任取一对数，如果较大的数排在较小的数之前，就称这对数构成一个**逆序**。一个排列中包含的逆序总数称为这个排列的**逆序数**。常用记号 σ(或 τ)表示。

例如在五阶排列$(3\ \ 1\ \ 4\ \ 5\ \ 2)$中，构成逆序的数对有 3 和 1；3 和 2；4 和 2；5 和 2，因此这个五阶排列的逆序数是 4。

记 $$\sigma(3\ \ 1\ \ 4\ \ 5\ \ 2)=4$$

又如 $$\sigma(3\ \ 5\ \ 4\ \ 1\ \ 2)=7$$

$$\sigma(n\ \ n-1\cdots 3\ \ 2\ \ 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

一个排列，若各数是按由小到大的自然顺序排列，这种排列称**自然排列**。如一个 n 阶自然排列是$(1\ 2\ 3\cdots n-1\ n)$。显然自然排列的逆序数等于零。

一个排列的逆序数在一定程度上刻划了排列的性质。根据逆序数的奇偶性，可将排列分成两类，逆序数是偶数的排列称为**偶排列**，逆序数是奇数的排列称**奇排列**。

在许多问题中常需要把一个 n 阶排列变成另一个 n 阶排列。最简单的变法是进行若干次的把两个数互换位置，而其余数不动，这样的每次变法称**对换**。

例如，一个五阶排列$(3\ 1\ 4\ 5\ 2)$，把 1 和 5 互换，其余数不动，得到另一个五阶排列$(3\ 5\ 4\ 1\ 2)$，记

$$(3\ 1\ 4\ 5\ 2)\xrightarrow{(1,5)}(3\ 5\ 4\ 1\ 2)$$

而且排列的奇偶性发生了变化。前面的排列为偶排列，后面的排列为奇排列。一般地也有如此结论。

定理 1 对换必改变排列的奇偶性。

***证** 首先讨论对换排列中相邻两个数(又称邻换)的情况。即

$$(\cdots j_ij_{i+1}\cdots)\xrightarrow{(j_i,j_{i+1})}(\cdots j_{i+1}j_i\cdots)$$

显然，j_i 和 j_{i+1} 以外的数彼此间的逆序情况以及 j_i 和 j_{i+1} 以外的数与 j_i(或 j_{i+1})的逆序情况在邻换前后没有发生变化。如果 j_i 和 j_{i+1} 在原排列中构成一个逆序，则邻换后，j_{i+1} 与 j_i 就构成一个顺序；反之，如果 j_i 与 j_{i+1} 原来是顺序，则邻换后，j_{i+1} 与 j_i 就是逆序，因此邻换前后两个排列的逆序数差 1，所以改变了排列的奇偶性。

再看一般情况。设对换的两个数 j_i 与 j_{i+s+1} 之间有 s 个数，即

$$(\cdots j_i\ j_{i+1}\cdots j_{i+s}\ j_{i+s+1}\cdots)\xrightarrow{(j_i,j_{i+s+1})}(\cdots j_{i+s+1}\ j_{i+1}\cdots j_{i+s}\ j_i\cdots)$$

这样的对换可以通过 $2s+1$ 次邻换即相邻两个数对换来实现。即

$$(\cdots j_i\ j_{i+1}\cdots j_{i+s}\ j_{i+s+1}\cdots)\xrightarrow{s\text{ 次邻换}}(\cdots j_{i+1}\cdots j_{i+s}j_i\ j_{i+s+1}\cdots)$$

$$\xrightarrow{s+1\text{ 次邻换}}(\cdots j_{i+s+1}\quad j_{i+1}\cdots j_{i+s}\ j_i\cdots)$$

由于一次邻换会改变排列的奇偶性，从而 $2s+1$ 次邻换必改变排列的奇偶性，定理得证。

*推论 1 在所有 n 阶排列（$n\geqslant 2$）中，奇排列和偶排列各占一半，均为$\frac{n!}{2}$。

这个推论的正确性是明显的。只要将 $n!$ 个 n 阶排列一一列出，对每个排列中的第 1 与第 2 个数字作一个邻换，这时我们得到的仍然是原来的 $n!$ 个 n 阶排列，然而每个排列的奇偶性都改变了。由此可见，奇、偶排列的个数应当是相同的。

*推论 2 任一个 n 阶排列都可通过若干次对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个 n 阶排列的奇偶性相同。

因为一个 n 阶排列可通过若干次对换变成自然排列，并且所作对换的次数就是排列奇偶性变化的次数，而自然排列是偶排列，因此结论成立。

如一个四阶排列（4 2 1 3），可以按下面不同方式的变法成自然排列：

$$(4\ 2\ 1\ 3)\xrightarrow{(4,3)}(3\ 2\ 1\ 4)\xrightarrow{(3,1)}(1\ 2\ 3\ 4)$$

$$(4\ 2\ 1\ 3)\xrightarrow{(2,1)}(4\ 1\ 2\ 3)\xrightarrow{(4,1)}(1\ 4\ 2\ 3)\xrightarrow{(4,3)}(1\ 3\ 2\ 4)\xrightarrow{(3,2)}(1\ 2\ 3\ 4)$$

由于原排列（4 2 1 3）为偶排列，所以，不论按哪一种方式，所作的对换次数总是偶数。

二、n 阶行列式的定义

首先我们来分析一下三阶行列式的特点：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{2.1}$$

式中：元素 a_{ij} 的第一个下标（足标）i 表示这个元素位于行列式的第 i 行，称为行标；第二个下标 j 表示这个元素位于行列式的第 j 列，称为列标。从（2.1）看到，三阶行列式是六项的代数和，其中每一项都是取自不同行，不同列的三个元素的乘积，即每一项都可表示成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{2.2}$$

其中行标形成了一个三阶自然排列（1 2 3），列标形成了一个三阶排列（$j_1\ j_2\ j_3$）。再来看每一项前面所带的符号（正号或负号）与该项列标所形成排列的奇偶性的关系。在（2.1）中的第一、二、三项列标所形成的排列分别是（1 2 3），（2 3 1），（3 1 2），它们都是偶排列，这三项前面都带正号；第四、五、六项列标所形成排列恰相反，都构成奇排列，这三项前面都带负号，于是（2.2）中，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 应带符号是 $(-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)}$

综上所述，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的值是所有取自不同行、不同列的三个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的代数和，而代数和中正负号由 $(-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)}$ 决定。因此（2.1）又可写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{2.3}$$

这里“$\sum$”是连加号，“$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$”表示对列标形成的三阶排列$(j_1j_2j_3)$要取遍所有的三阶排列时求和。

同样，二阶行列式的值也可写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum_{(j_1j_2)} (-1)^{\sigma(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

这样，二阶、三阶行列式的定义形式已是一致了。而前面用对角线法则定义三阶行列式的方法就不能适用于二阶行列式。

推广二、三阶行列式概念，可以给出 n 阶行列式的定义。

定义 3 由 n^2 个数排成一个正方形数表，加记号“$|\ |$”，它的值是所有取自不同行，不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，而代数和中正负号由 $(-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}$ 决定，即可写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{2.4}$$

这里“$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$”表示对列标形成的 n 阶排列$(j_1j_2\cdots j_n)$要取遍所有的 n 阶排列求和，显然它应含有 $n!$ 项。称(2.4)为 n **阶行列式的表达式**(或称完全展开式)。

并约定 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$

这样不仅可以把二、三阶行列式的定义统一于(2.4)中，而且 n 可以取任意的正整数。当 $n>3$ 时，统称为**高阶行列式**。以后无特别申明，行列式均指 n 阶的。

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这种主对角线(从左上角到右下角的一条对角线)下方的元素全为零的行列式称为**上三角形行列式**。这种行列式的元素特点可用数学式子表示为：当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$。

解 上三角形行列式有不少元素是零，于是根据行列式定义计算时必有很多项是零，我们只要把不明显为零的项找出来。先从最后一行开始，只有取 $j_n=n$，这样相应的项 $(-1)^{\sigma(j_1\cdots j_{n-1}n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}}a_{nn}$ 可能不为零，这些项中，j_{n-1} 又不能取 n(因为要求元素取自不同列)，因此只有取 $j_{n-1}=n$-1。依次往上类推可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\sigma(1\ 2\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \xlongequal{\text{记}} \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

这里“$\prod$”是连乘号，“$\prod\limits_{i=1}^{n}$”表示对 $i=1$ 到 $i=n$ 连乘。

用类似的方法不难得出下三角形行列式（当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$），对角形行列式（当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$）的值。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由行列式定义可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\sigma(1342)} 1\times 3\times 5\times(-4) + (-1)^{\sigma(1432)} 1 \times(-1)\times 2\times(-4) = -68$$

必须注意，在 n 阶行列式的计算中，除 $n=3$ 外，均不能使用“对角线法则”。

在 n 阶行列式定义中，每一项中 n 个元素的排列次序是使它们的行标成自然排列的，即 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$。由于数的乘法有交换律，因此，可以通过适当调换 n 个元素的排列次序，使这个 n 个元素的列标成自然排列，即 $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$。在调换的过程中，对原列标构成的 n 阶排列 $(j_1 j_2\cdots j_n)$ 对换变成了 $(1\ 2\cdots n)$，同时原行标构成的 n 阶排列 $(1\ 2\cdots n)$ 变成了 $(i_1 i_2\cdots i_n)$。由定理 1 的推论 2 可知

$$(-1)^{\sigma(j_1 j_2\cdots j_n)} = (-1)^{\sigma(i_1 i_2\cdots i_n)}$$

因此，n 阶行列式的表达式(2.4)又可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2\cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 i_2\cdots i_n)} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} \qquad (2.4)'$$

三、n 阶行列式的性质

利用行列式定义直接计算行列式，一般情况是很困难的。因为随着 n 的增大，项数 $n!$ 极其迅速地增大。如 5！=120，10！=3,628,800，而且要一项不漏地写出这些项并计算乘积，判断正负号是不容易的。因此必须进一步研究它的一些性质及简化计算的方法。当然行列式的性质在理论研究中也是很有用的。

上一节我们曾讨论了二、三阶行列式的性质。现在，当我们将行列式概念推广到 n 阶行

列式时，这些性质是否还保持呢？结论应当是肯定的。但是，对于 n 阶行列式，由于不可能将它的元素以及定义中的 $n!$ 项一一列出，因此，在性质的表述上具有一定的抽象性，在证明它时也只能借助于分析的方法。为说明这点，下面不妨将性质重述一遍，并作简单的证明。

性质(一) 行列互换，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

***证** 由(2.4)得

$$\text{左端行列式的值} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

而右端行列式中的元素 a_{ij} 的第一个下标是列标，第二个下标是行标。把右端行列式的值按(2.4)$'$写出得

$$\text{右端行列式的值} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

由此看出(2.5)成立。

(2.5)式中左端行列式记 D，则右端行列式记 D'，并称它为 D 的转置行列式。

由性质(一)可知，有关行列式的其他性质、定理，若对行列式的行来说成立，则对列一定成立。下面我们可仅对行来讨论。

性质(二) 行列式任意两行互换，行列式的值反号。即

$$\begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array}$$

***证** 考虑左端行列式展开式中任意一项

$$\begin{aligned} &(-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} \\ = &-(-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

而

$$(-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

正好是右端行列式展开式中的项，这说明左、右两端行列式展开式中每对应的项都反号，因此结论成立。

推论 行列式若两行相同，行列式的值等于零。

因为将行列式 D 中相同的两行互换，行列式值不变；但根据性质(二)，它的值应反号，所以有 $D=-D$，于是 $D=0$。

根据行列式定义，不难证明以下二个性质。

性质(三) 行列式某一行有公因子 k，则 k 可以提到行列式号外。即