

数学的发现 第二卷

——对解题的理解、研究和讲授

【美】G. 波利亚 著



科学出版社

数 学 的 发 现

——对解题的理解、研究和讲授

第 二 卷

〔美〕G. 波利亚 著

内 容 简 介

本书是杰出数学家和教育家 G. 波利亚的名著之一。书中以通俗浅显的文字、循循善诱的讲授方式以及典型有趣的实例,介绍了数学问题的求解思路(包括如何审题、怎样剖析和思考、如何探索解题的途径并最终解决它)。本卷着重向数学教师介绍了许多行之有效的讲授方法。每章末都附有精心挑选的练习题和详细评注。该书对立志于学好数学的学生以及欲提高数学教学水平的教师很有参考价值。

本书可供中等学校(包括普通中学、中师、中专等)师生、大专院校低年级学生及业余大学、电视大学师生参考和自学用

George Polya

MATHEMATICAL DISCOVERY

On understanding, learning, and teaching problem solving

John Wiley & Sons, Inc., 1965

数 学 的 发 现

——对解题的理解、研究和讲授

第 二 卷

[美] G. 波利亚 著

刘远图 秦 璋 译

责任编辑 徐一帆

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 2 月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1987 年 2 月第一次印刷 印张: 10 7/8

印数: 0001—6,000 字数: 210,000

统一书号: 13031·3396

本社书号: 4840·13—1

定 价: 2.00 元

序 言

这本第二卷是按照第一卷序言中提出的计划写成的,并且力求将该序言中阐明的意图付诸实现.书本的索引是综合两卷的辞汇(译文略——译者注),而且列出了我写的有关著作的某些经过挑选的可供参考的章节,我希望对这些章节感兴趣的读者能从中得到某些助益.

谨以本书的最后一章敬献给查理士·洛纳,在他七十诞辰之际,我愿在此再次向他表达崇高的敬意和友好的感情.

乔治·波利亚 (George Polya)

1964年10月于瑞士苏黎世

目 录

第三部分 关于一般解题方法的研究

第七章 解题过程的几何表示	315
§ 7.1 比喻	315
§ 7.2 什么是问题?	317
§ 7.3 这是一个好主意!	319
§ 7.4 发展思路	321
§ 7.5 实现方案	324
§ 7.6 慢镜头	326
§ 7.7 关于以下各章的简介	328
§ 7.8 方案和计划	329
§ 7.9 问题中的问题	329
§ 7.10 思想的来源	330
§ 7.11 思维过程	331
§ 7.12 思维的法则	331
第七章的习题和评注	332
第八章 方案和计划	346
§ 8.1 制订方案的模式	346
§ 8.2 更一般的模式	349
§ 8.3 计划	350
§ 8.4 从几个方案中选定一个	352
§ 8.5 方案和计划	355
§ 8.6 模式和方案	356
第八章的习题和评注	357

第九章 问题中的问题	370
§ 9.1 辅助问题: 达到目的的手段	370
§ 9.2 等价问题: 双向变换	372
§ 9.3 等价问题链	374
§ 9.4 较强的或较弱的辅助问题: 单向变换	375
§ 9.5 间接的辅助问题	377
§ 9.6 内容方面的帮助, 方法论方面的帮助, 激起联想、指导、 演习	379
第九章的习题和评注	381
第十章 思想的来源	400
§ 10.1 看到一道闪光	400
§ 10.2 举例	401
§ 10.3 有用的思想特征	407
§ 10.4 思想依赖于偶然性	409
第十章的习题和评注	410
第十一章 思维的过程	413
§ 11.1 如何思考问题	413
§ 11.2 卷入问题	414
§ 11.3 与题目息息相关	414
§ 11.4 接近解的程度	415
§ 11.5 预见性	416
§ 11.6 寻找范围	417
§ 11.7 决断	419
§ 11.8 动员与组织	419
§ 11.9 辨认与回忆	421
§ 11.10 充实与重组	421
§ 11.11 分离与结合	423
§ 11.12 图解	424
§ 11.13 局部提示整体	427

第十一章的习题和评注	430
第十二章 思维的准则	437
§ 12.1 我们应该怎样思考?	437
§ 12.2 集中目标	438
§ 12.3 估计前景	439
§ 12.4 需要之一: 解题方法	440
§ 12.5 需要之二: 更有希望的方面	442
§ 12.6 需要之三: 相关的知识	444
§ 12.7 需要之四: 再度估计形势	445
§ 12.8 发问的艺术	446
第十二章的习题和评注	448
第十三章 发现的法则?	456
§ 13.1 各种各样的法则	456
§ 13.2 合理性	457
§ 13.3 省力原则, 但并不预加限制	459
§ 13.4 锲而不舍, 且灵活多变	460
§ 13.5 优先法则	462
§ 13.6 原题固有的材料	463
§ 13.7 可用的知识	464
§ 13.8 辅助问题	466
§ 13.9 总结	467
第十三章的习题和评注	468
第十四章 关于学习, 教学与学习教学*	472
§ 14.1 教学并非一门科学	472
§ 14.2 教学的目的	473
§ 14.3 教学是一种艺术	475
§ 14.4 学习过程的三个原则	477
§ 14.5 教学过程的三个原则	480
§ 14.6 实例	484

§ 14.7 学习教学·····	492
§ 14.8 教师应抱有的态度* ·····	496
第十四章的习题和评注 ·····	505
第十五章 猜测和科学方法* ·····	547
§ 15.1 课堂水平的研究问题·····	547
§ 15.2 例·····	548
§ 15.3 讨论·····	550
§ 15.4 另外一个例子·····	551
§ 15.5 归纳法论证的图象表示·····	553
§ 15.6 一个历史上的例子·····	556
§ 15.7 科学方法; 猜测和检验·····	566
§ 15.8 “研究题目”必须具有的特征·····	567
§ 15.9 结论·····	568
第十五章的习题和评注 ·····	569
习题解答 ·····	588
参考文献 ·····	615
附录 ·····	618

第三部分 关于一般解题 方法的研究

人类的智慧在处理极其不同的对象时，总是一视同仁的。它不会由于对象的差异而不同，就象阳光不会由于被它照亮的物体千差万别而不同一样。

笛卡儿：《笛卡儿全集》，第十卷，第360页，第一法则

第七章 解题过程的几何表示

用几何图形去表达这类事情是极为有利的，因为没有什么东西比几何图形更容易进入人们的思维。

笛卡儿：《笛卡儿全集》法文版，第十卷，413页；指导思维的法则，第XII条。

§ 7.1 比 喻

五十年代以前，当我还是一个大学生时，我曾经帮助一个男孩子准备考试，有一道初等立体几何题需要向他作些讲解，但是我一时找不到头绪，给难住了。我只好责备自己连这样

简单的题目都不会解。第二天晚上，我坐下来研究它的解答，弄得很透彻，以致使我再也不会忘记它了。我力图直观地找到解题的自然过程及其中包含的各个基本思想之间的联系，终于得出了解题过程的一种几何表示。这是我在研究解题方面的第一个发现，也是我终生对于解题感到兴趣的开端。

至于几何的比喻，最后我想到了通常用到的比喻的许多种表达方式。对于语言中充满比喻（有的比喻勉强强，有的平平常常，有的则令人兴味盎然）的情况，我们见得够多了。我不知道人们是否也注意到，很多比喻是相互依赖的，它们相互联系着，或者结合在一起，它们形成一类一类的比喻，或多或少有点松散和重迭的比喻。不管怎样，确实存在很多比喻的说法，它们具有两个共同的特点：它们都和人们解决问题的基本活动紧密相关，而且都能使人联想起同一个几何图形。

求一个问题的解，就是要找出原先各自独立的事物或想法之间的联系（我们已有的事物和需要寻求的事物，已知数据和未知事项、前提和结论等等）。互相联系的事物原来分隔得愈远，那么发现它们之间联系的人的功绩就愈大。有时我们发现这种联系好象是一座桥梁：一个重大的发现，在我们看来，就象为联结两个根本不同的概念而搭在两者之间鸿沟上的一座桥梁。我们常常看到这种联系是由一条链条来实现的：证明就象一串互相联系着的论据，即一条（有时是很长的一条）由许多结论组成的链条。一环不坚，全链必断：证明中即使只缺少一个环节，就不能成为证据充足的证明，就不能成为连续完整的推理过程。对于思维方面的联系，我们更经常使

用的词是“线索”。我们都在听教授讲授，但是他抓不住证明的线索，在推理方面混乱不堪。他不得不勉强看看他的讲稿，以便重新找到讲课的线索。当他找到线索最后得出结论时，我们都感到困倦已极。细长的线当然可以看成是几何的线，互相联系的事物可以看成是几何的点，这样就几乎不可避免地出现了用表格和图形表示一系列数学结论的设想。

上面我们仅仅讲到了“语言的图形”，现在我们就来考察几种几何图形。

§7.2 什么是问题？

我们需要举一个例子，不妨选择立体几何中的一个非常简单的问题¹⁾：

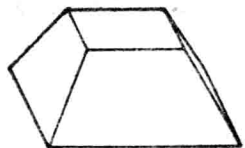
已知一个正四棱台的高是 h ，上底面的边长为 a ，下底面的边长为 b 。求这个正四棱台的体积 F 。

(底面为正方形且从顶点所作的高交于底面中心点的棱锥，称为正棱锥。介于底面和平行于底面的平面间的棱锥，称为棱台。平行于棱台底平面的平面，称为棱台的上底面，棱台的下底面就是原来那个棱锥的底面。棱台的高是指上下底面间的垂直距离。)

解答这个问题的第一步是集中注意问题中提出的目的。

1) 这个问题和作者曾经讨论过的另一个问题很相似，甚至更简单一些(参见文献目录的1和3)。

你要求的是什么？我们向自己提出这个问题，并且尽可能准确地画出需要求出其体积 F 的图形（见图 7.1 左边那一部分）。这时我们思维的状态可以用一个孤立的点（记作 F ）来表示，下面我们将全神贯注地考察点 F （见图 7.1 右边那一部分）。

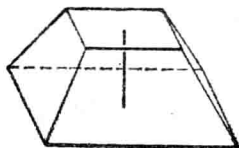


你要求什么？

F
○

图 7.1 集中注意一点：目的

如果关于未知数 F 什么都不知道，我们当然不能求出它。已知数据是什么？或者你有什么？——我们这样问自己，同时把注意力转向图形上的线段，已知它们的长度是 a 、 b 和 h ，参看图 7.2 左边那一部分（边长为 a 的正方形在所考虑的立



已知是什么？

F ○

○
 a

○
 h

○
 b

图 7.2 讨论的问题：要架桥的鸿沟

体的上面,边长为 b 的正方形在立体的下面)。为了表示变化了的思维状态,在图上画出了三个点(分别注上字母 a 、 h 和 b)。它们表示已知数据,并且和未知数 F 之间隔着一个鸿沟,也就是图 7.2 上的一片空白。这片空白象征着一个需要讨论的问题:我们的问题是要建立未知数 F 和数据 a 、 h 和 b 之间的联系。我们要在这个鸿沟上架设一座桥梁。

§ 7.3 这是一个好主意!

前面我们在考察提出的问题时,首先讨论了如何直观地表示问题的目的、未知数和数据。解题的最初阶段恰当地反映在图 7.1 和图 7.2 上,但是现在我们应当怎样做下去呢?应当选择哪一条道路呢?

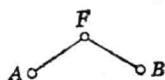
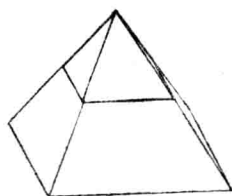
如果你不能解答所提出的问题,就在周围找一个适当的相关的问题。

就这个问题而言,我们没有必要考虑得太远。事实上,未知数是什么?棱台的体积。但是什么是棱台呢?它是怎样定义的呢?是作为一个完整的棱锥的一部分来定义的吗?是哪一部分呢?这一部分是介于……。够了,用不着继续说下去了,还是让我们用另一种方式叙述棱台的定义吧!当我们用平行于棱锥的底面的平面从该棱锥上截去一个小棱锥时,剩下的那一部分就是棱台。在这个问题里,如图 7.3 所示,大棱锥的底面是一个正方形,它的面积为 b^2 。如果我们知道这两个棱锥的体积,例如说它们分别为 B 和 A ,那么我们就可以求

出棱台的体积:

$$F = B - A$$

对了,我们应当求出体积 B 和 A . 这是一个好主意!



$$F = B - A$$

$\cup$ $\cap$ $\subset$
 a h b

比较容易求解的相关问题

$$F = B - A$$

图 7.3 如果你不能解答所提出的问题,就在周围找一个……

这样一来,我们已经把原来的问题(即求 F)化成了两个适当地相关联的辅助问题:求 A 和 B . 为了在图上表示这个转变,我们在数据 a 、 h 、 b 和未知数之间的空白处,再作两个点,并分别标上字母 A 和 B . 我们用斜线将 A 、 B 同 F 连结起来,这种表明了这三个量之间的基本关系:从 A 和 B 出发可以得出 F , 即关于 F 的求解问题可以归结为关于求 A 和 B 的两个问题.

解题的工作到这一步还没有完结:我们需要求出两个新的未知数 A 和 B . 在图 7.3 上,表示它们的两个点吊在上面,和已知数据隔着一一条鸿沟. 然而,情况看来是有希望的,因为我们对棱锥要比棱台更熟悉一些;同时,代替求一个未知数 F ,现在我们需要求两个未知数 A 和 B ,但是这两个未知数的

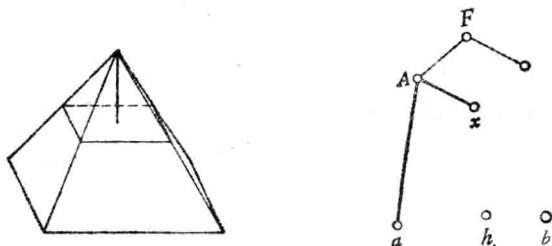
性质类似,而且它们分别和数据 a 、 b 的关系也类似.因而在图 7.3 中思维状态的图形表示也是对称的.线段 FA 倾向于已知数 a ,而 FB 倾向于已知数 b .在原来的未知数和已知数据之间的空白处,我们已经着手搭桥,剩下的鸿沟正在变小.

§ 7.4 发展思路

在解题的征途中我们已经到达什么地方了?你要求什么?我们需要求出未知数 A 和 B .未知数 A 表示什么?棱锥的体积.怎样才能得出所求的对象呢?怎样才能求出这类未知数呢?从哪些数据能够推导出这类未知数呢?只要知道两个数据即棱锥的底面积和高,我们就会计算棱锥的体积.实际上,它等于底面积乘高再除以 3.棱锥的高没有给出,但是我们不妨把它看作是已知的.我们记高为 x ,则

$$A = \frac{a^2 x}{3}$$

在图 7.4 的左边,棱台上面的小棱锥画得比较详细:它的高 x 清楚地画出来了.我们在这一阶段所作的工作在图 7.4 右边部分用图形表示出来了:在已知数据上面出现了一个新的点 x ,用斜线连结 A 和 x 以及 A 和 a ,以此表示 A 可以由 x 和 a 得出,即 A 可以用 x 和 a 表示.虽然仍有两个未知数需要求出(图 7.4 上仍有两个端点悬在半空中),但是工作已经取得了进展,因为我们已经成功地将未知数 F 至少同其中一个已知数 a 联系起来了.



怎样计算这类未知量呢？

$$A = \frac{a^2 x}{3}$$

图 7.4 第一次与数据发生联系,但是仍有两个端点因无联系而悬在半空中

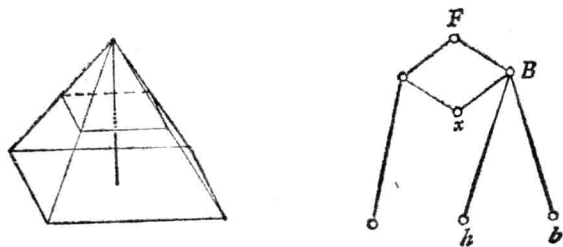
无论怎样,下一步该怎样作是很明显的. 未知数 A 和 B 的性质是类似的(它们在图 7.3 上的表示是对称的). 前面我们已经用底和高表示体积 A ,现在可以类似地表示体积 B :

$$B = \frac{b^2(x + h)}{3}$$

在图 7.5 左边那一部分上,包含棱台的大棱锥表示得比较详细: 它的高 $x + h$ 清楚地画出来了. 在图 7.5 右边那一部分上,出现了分别连结 B 和 b 、 h 、 x 的三条斜线. 这些线条表明, B 可以从 b 、 h 和 x 求得,亦即 B 可以用 b 、 h 和 x 表示出来. 这样一来,只剩下一个点 x 没有和已知数据发生联系,仍然悬在半空中. 鸿沟变得愈来愈小,现在只剩下 x 和已知数据之间的沟壑了.

剩下的未知数是什么? 就是一条线段的长 x . 怎样才能求出这类未知数呢? 怎样才能得出所求的对象呢?

求一条线段的长度的常用的办法是利用一个三角形——如果可能的话可以利用直角三角形——或者利用一对相似三角形。然而图形里并没有能加以利用的三角形，而这里应当有一个以 x 为边的三角形。这样的三角形应当在通过体积为 A 的小棱锥的高所作的一个平面内，这个平面应当同时通过体积为 B 且和小棱锥相似的大棱锥的高。是的，通过棱锥的高而且与其中一个棱锥的底面的一边平行的平面上就有这样的一对相似三角形。这就是我们所要的！好了，完成了！



用同样方法求得

$$B = \frac{b^2(x+h)}{3}$$

图 7.5 仅仅剩下一个悬而未决的问题了

根据图 7.6 上的一对相似三角形，利用比例很容易求出

x ：

$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b}$$

在这一个阶段，了解更多的细节并不重要，现在最重要的是 x 可以用三个已知数据 a 、 h 和 b 表示出来。图 7.6 右边那一部分上新添的三条斜线，正好表示 x 可以与 a 、 h 和 b 相联结。