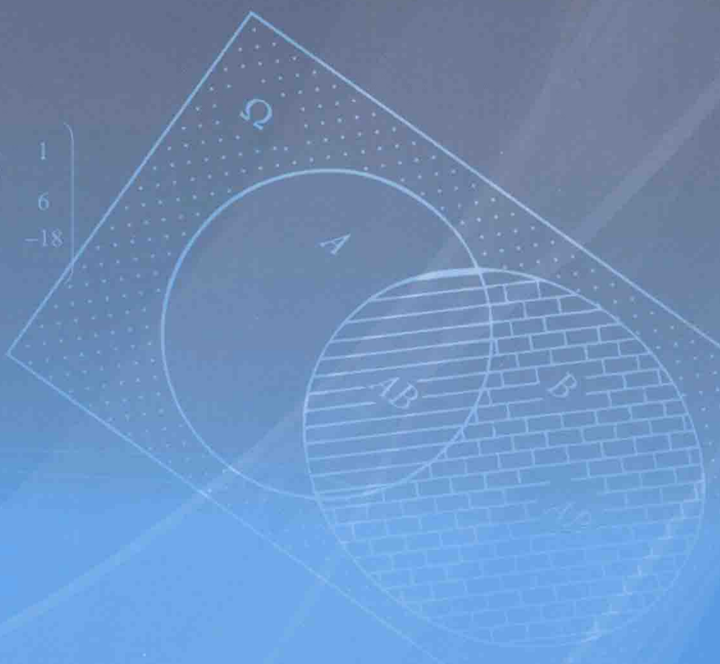
高职高专“十二五”规划教材

YINGYONG SHUXUE

应用数学

张建文 吴贤敏 金晓燕 主编



化学工业出版社

高职高专“十二五”规划教材

应用数学

张建文　吴贤敏　金晓燕　主编

化学工业出版社
·北京·

本书主要介绍了矩阵及其应用、线性规划、数据的收集与描述、概率、参数估计与假设检验等方面的内容。重点放在应用数学分析解决实际问题能力方面的培训上，加强了运用线性规划思想解决几类典型经济问题的训练，强化了点估计、区间估计和假设检验等的训练。

本书适合于高职高专工科、财经类等相关专业师生学习使用，同时也可供应用型本科师生参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/张建文，吴贤敏，金晓燕主编. —北京：化学工业出版社，2011.8

高职高专“十二五”规划教材

ISBN 978-7-122-12039-7

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①张… ②吴… ③金… Ⅲ. 应用数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 155954 号

责任编辑：李彦玲　　文字编辑：昝景岩

责任校对：周梦华　　装帧设计：周　遥

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　装：三河市延风印装厂

787mm×1092mm　1/16　印张 10¾　字数 264 千字　　2011 年 9 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：23.00 元

前　言

或许我们认为学习数学不是一件令人愉快的事情，那是因为人们使用培养数学专业人员的内容和方法来培养非数学专业人员。人们花大量的篇幅来介绍数学概念，训练人们用严密的数学语言陈述数学问题、用严密的推理证明数学定理和数学公式、用精妙的数学方法进行数学计算，却又不给培养数学专业人员的学习时数。

我们应该意识到，除了学习专业知识和技能需要用到数学解决棘手的问题外，在我们的日常生活中，也需要懂得如何使用数学基本思想和方法去解决问题，尤其是线性规划、概率与统计基本思想和方法，它们在指导人们创业、家庭理财投资和理解身边的各类资讯等日常经济活动中起到重要作用。

其实，学习线性规划、概率与统计也是很有乐趣的，关键是我们能否正确把握学习线性规划、概率与统计的目的：我们仅仅是想了解线性规划、概率与统计的基本思想和原理，熟悉一些学习工作和生活中常见的简单问题。我们完全不必陷入抽象繁杂的数学证明与运算中，更不要步入数学专业的殿堂。线性规划和统计的基础是数学，我们的目的是要使你熟悉基本线性规划思想和统计思想，而不是要使你变成线性规划、概率与统计分析的专家。为此，我们主要做了以下工作。

矩阵与行列式。我们改变了矩阵与行列式的学习顺序，主要考虑到作为数表的矩阵及其运算更加直观，容易理解，也为行列式的手工计算奠定了基础。在保证内容连贯流畅的前提下，用尽可能短的篇幅介绍了矩阵及其运算。和处理微分方程的思想一样，我们不想为求线性方程组通解而陷入通解的论证海洋中，而是直接引入了矩阵的初等行变换，重点突出了运用这个应用十分广泛的工具解决实际问题。在实际工作和生活中，高于三阶的行列式并不常见，对此我们只作简单介绍。

线性规划。和其他的章节一样，我们也是采用最快捷的方式从基本概念的建立到基本运用。主要介绍了单纯形法、图解法和匈牙利法，然后是以案例的方式直接介绍了运输问题、分配问题和其他几类典型的线性规划问题。试图用最简短的篇幅，既建立起线性规划的概念，了解线性规划解决问题的基本思路，又通过典型的案例强化线性规划的基本思想，解决简单的常见问题。

数据的收集与描述。这里主要提到统计，没有提到数理，更没有提到概率论与数理统计，因为我们认为，在现实工作和生活中，要求我们掌握的重点是知道统计的基本思想和原理，能够做一些简单的统计，尤其是能够理解一些常见的统计结果的真实含义，使用统计结果去解决问题和理解问题。所以数理统计中的“数理”不是重点，概率是统计的基础，但不是最重要的，重点介绍了数据的收集与描述。

概率。虽然将概率作为单独的一章，仍然保留了较多的内容，但必须提醒的是，我们主要希望让学生了解概率的获取途径，尤其提到了主观概率，它没有数理基础，但是它是日常工作和生活中获取概率的重要途径之一，不要陷入概率计算的歧途。

参数估计与假设检验。这里简单介绍了常见的样本均值和样本方差的点估计和正态总体参数的区间估计。正态总体参数的假设检验是我们学习的重点内容，很有实用价值，篇幅不

长，但我们应该花大力气让学生真正理解掌握。

本教材的编写思想是编写者经过十多年的职业教育实践所形成的，经过缜密的思考和试验后，于2001年完成初稿，并经过多轮的使用实践。本书由张建文，吴贤敏和金晓燕担任主编，严峰、石海平、洪洁怡、刘伟峰、黄伟祥、袁晓莉和邓朝发也参加了编写工作，在此表示感谢。

张建文

2011 年 7 月

目　　录

第一章　矩阵及其应用

第一节　矩阵的概念

一、矩阵的概念

在日常工作和生活中，人们常常接触到各种各样的表格. 为使我们能够揭示这些表格中所隐含的信息，最有力的方法之一就是简化表格.

【例 1.1】 某商店的三个部门在四个季度中的销售量如表 1.1 所示.

表 1. 1　三个部门四个季度中商品的销售量

季度／销售量／商品名称	一	二	三	四
摄影机/台	15	19	20	16
数码相机/台	8	10	11	9
手提电脑/台	14	20	16	17

如果我们约定销售量数字的相对位置保持不变，就可以用非常简洁的数表

$$\begin{pmatrix} 15 & 19 & 20 & 16 \\ 8 & 10 & 11 & 9 \\ 14 & 20 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

来表示前面的销售表格.

表 1. 2　各类型房屋数量

单位：幢

类型／房屋数量／学校	甲	乙	丙
中学	3	5	6
小学	1	3	5

表 1.3　各类型房屋所需钢材与水泥数量

单位：t

材料／材料数量／类型	钢材	水泥
甲	75	30
乙	60	25
丙	50	20

【例 1.2】 某地计划建造中学和小学各一所，需要盖甲、乙、丙三种类型的房屋，要建的每种类型的房屋幢数如表 1.2 所示，每幢房屋所需要的钢材数量与水泥数量如表 1.3 所示.

在处理上述表 1.2 和表 1.3 的过程中，如果约定表格中的数字保持相对位置不变，就可以用两个非常简洁的数表

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} 75 & 30 \\ 60 & 25 \\ 50 & 20 \end{pmatrix}$$

来表示前面的两个表格.

【例 1.3】 在方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+\ \ x_3=1 \\ 2x_1-\ \ x_2-4x_3=7 \\ 3x_1-4x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

中，方程组的解完全取决于各个方程中的未知数系数和自由项常数，而与表示未知数的字母无本质联系. 在保持系数与常数相对位置不变的前提下，该方程也可用数表表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & 7 \\ 3 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

在数学上，通常将各类表格抽象为数表，这种数表既反映事物的本质特征，又可以将问题简化，以便揭示事物的内在联系. 我们将上述数表称为**矩阵**.

定义 1.1 按下列方式，将 $m\times n$ 个实数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排列成一个 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

我们称这个数表 A 为 $m\times n$ **矩阵**. 记作 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 或者简记为 $A=(a_{ij})$. a_{ij} 表示第 i 行第 j 列交叉处的实数，我们称 a_{ij} 为矩阵 A 的一个**元素** $(i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n)$. 通常用大写英文字母来表示矩阵，用小写英文字母来表示元素.

在 Mathematica 中，矩阵 A 表示为{{a11, a12, ⋯, a1n}, {a21, a22, ⋯, a2n}, ⋯, {am1, am2, ⋯, amn}}.

二、几种常见的特殊矩阵

1. 方阵

如果矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的 $m=n$，即矩阵的行数与列数相同，那么称矩阵 A 为**(n 阶)方阵**. 例如，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

等都是方阵.

2. 对角矩阵

对于方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$，其连线称为方阵 A **主对角线**，元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为主对角线上的元素.

在下列方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

中，它们的共同特征是，除了主对角线上的元素外，其余元素全为零. 我们称具有这类特征的矩阵为对角矩阵，即对于方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果除主对角线上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 外全为

零，则称方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为**对角矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\,\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$. 例如，上述对角矩阵可以分别记为 $\mathrm{diag}\{1,2\}$，$\mathrm{diag}\{3,2,2\}$和 $\mathrm{diag}\{0,-2,1,1\}$.

3. **单位矩阵**

在下列对角矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

中，它们的共同特征是，主对角线上的元素全为 1. 我们称主对角线上元素全为 1 的 n 阶对角矩阵为 n 阶**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{I}_n$，简记为 $\boldsymbol{I}$. 即

$$\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

4. **上三角形矩阵、下三角形矩阵**

在下列矩阵

$$\begin{pmatrix}1&10\\0&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3&0&6\\0&2&10\\0&0&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&10&2&0\\0&-2&0&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

中，它们的共同特征是，主对角线左下角的元素全为 0，右上角的元素不全为 0，我们称这类矩阵为**上三角形矩阵**.

在下列矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\11&-1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}7&0&0&0\\0&-2&0&0\\1&0&1&0\\-10&12&0&1\end{pmatrix}$$

中，它们的共同特征是，主对角线右上角的元素全为 0，左下角的元素不全为 0. 我们称这类矩阵为**下三角形矩阵**. 一般地，如果 n 阶方矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素 $a_{ij}=0(i>j;\,i,j=1,2,\cdots,n)$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为**上三角形矩阵**. 类似地，如果 n 阶方矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素 $a_{ij}=0(i<j$；$i,j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为**下三角形矩阵**.

5. **阶梯形矩阵**

形如

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3&0&1\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&0&1&2&0\\0&3&0&1&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵称为**阶梯形矩阵**. 换言之，如果可以使用阶梯形虚线将矩阵划分成两部分，在阶梯形虚线右上角部分，第一个元素必须非零；在阶梯形虚线左下角部分，所有元素都为零，而且每个阶梯的“高”只有一行，“宽”却可以是几列.

6. **转置矩阵**

在 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1，2 行恰好是矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 的第 1，2 列，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1，2，3 列恰好是矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 的第 1，2，3 行. 矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 似乎是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 绕其对角线旋转 180° 而得，因此，我们称矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 一般地，我们定义如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行与其对应的列互换，所得的矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}'$ 或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 例如

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 11 \\ 10 & 2 & 0 \\ 11 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{则 } \boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 3 & 10 & 11 \\ 0 & 2 & -1 \\ 11 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. **零矩阵**

形如

$$(0 \quad 0), \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵称为**零矩阵**. 一般地，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的所有元素全为 0，那么称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{0}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{0}$.

8. **列矩阵和行矩阵**

形如

$$(1 \quad 0), \quad (x \quad y \quad z), \quad (1 \quad 1 \quad 2 \quad 3)$$

的矩阵称为**行矩阵**. 形如

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix}$$

的矩阵称为**列矩阵**. 一般地，如果 $m\times n$ 矩阵中的 $m=1$，即只有一行的矩阵称为**行矩阵**或**行向量**；如果 $m\times n$ 矩阵中的 $n=1$，即只有一列的矩阵称为**列矩阵**或**列向量**.

习 题 1-1

1. 用矩阵表示表 1.4.

表 1.4　四个季度商品销售量

销售量　季度 / 商品名称	一	二	三	四
29 寸彩电	120	90	150	140
VCD	200	160	180	120
洗衣机	90	80	220	180

2. 指出下列矩阵各是什么矩阵.

（1）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$；　（4）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$；　（6）$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. 写出下列矩阵的转置矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

第二节　矩阵的加法、减法和乘法

一、矩阵的相等

在实际工作中，一般要求两张表格完全相同才认为这两张表格是相同的.

定义 1.2　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数和列数都相同，对应位置上的元素都相等，我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 2 & c \\ 0 & e & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & b & 9 \\ d & 1 & f \end{pmatrix}$，那么当且仅当 $a=-1$，$b=2$，$c=9$，$d=0$，$e=1$，$f=3$ 时，才有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

二、矩阵的加法和减法

在实际工作中，人们常要对表格进行合并及汇总等处理. 例如，某公司属下的甲、乙两个分店同时销售三种商品，七、八月份的销量如表 1.5 和表 1.6 所示.

表 1.5 七月份销量表

单位：件

分店＼销量＼商品	一	二	三
甲	12	46	37
乙	16	88	58

表 1.6 八月份销量表

单位：件

分店＼销量＼商品	一	二	三
甲	13	45	38
乙	14	85	60

那么，七、八月份的销量增减情况以及销量之和情况如表 1.7 和表 1.8 所示.

表 1.7 七、八月份销量增减表

单位：件

分店＼销量＼商品	一	二	三
甲	1	–1	1
乙	–2	–3	2

表 1.8 七、八月份销量汇总表

单位：件

分店＼销量＼商品	一	二	三
甲	25	91	75
乙	30	173	118

因此，我们定义矩阵的加法和减法运算如下.

定义 1.3 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m \times n$ 矩阵，在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中，将其对应的元素

相加（减），所得矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和(差)，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$.

这样，公司在七、八月份的销量可简化为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}12&46&37\\16&88&58\end{pmatrix}，\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}13&45&38\\14&85&60\end{pmatrix}.$$

七、八月份的销量汇总（和）为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}12+13&46+45&37+38\\16+14&88+85&58+60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&91&75\\30&173&118\end{pmatrix}.$$

八月份比七月份销量的增减情况（差）为

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}13-12&45-46&38-37\\14-16&85-88&60-58\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&-3&2\end{pmatrix}.$$

三、矩阵的乘法

在例 1.2 中提到建造中小学的各类型房屋数量以及钢材与水泥数量表格如表 1.2 和表 1.3 表示.

那么，每间学校所需钢材、水泥的计算表格如表 1.9 或表 1.10 所示.

表 1.9　各学校所需钢材与水泥数量

单位：吨

材料名称 / 材料数量 / 学校	钢材	水泥
中学	3×75+5×60+6×50	3×30+5×25+6×20
小学	1×75+3×60+5×50	1×30+3×25+5×20

即

表 1.10　各学校所需钢材与水泥数量

单位：吨

材料名称 / 材料数量 / 学校	钢材	水泥
中学	825	335
小学	505	205

表 1.2、表 1.3、表 1.9 和表 1.10 这 4 个表格可以用矩阵简洁地表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&5&6\\1&3&5\end{pmatrix}，\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}75&30\\60&25\\50&20\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}3\times75+5\times60+6\times50 & 3\times30+5\times25+6\times20\\1\times75+3\times60+5\times50 & 1\times30+3\times25+5\times20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}825 & 335\\505 & 205\end{pmatrix}.$$

显然，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中的元素并不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的某个元素和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的某个元素简单地相乘而得. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有着密切的联系，但是，这种联系相当复杂. 不过，仔细观察可以发现，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中的每个元素均是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的某一行上的元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的某一列上的相应元素相乘后相加的结果. 一般地，我们定义矩阵的乘法如下.

定义 1.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$. 令

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

那么称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

在 Mathematica 中，乘法使用“·”，不满足交换律，但能自动把向量看作行（列）向量.

【例 1.4】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

【解】 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+0\times2+0\times3 & 1\times2+0\times3+0\times2\\0\times1+2\times2+1\times3 & 0\times2+2\times3+1\times2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\7 & 8\end{pmatrix}$；

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+2\times0 & 1\times0+2\times2 & 1\times0+2\times1\\2\times1+3\times0 & 2\times0+3\times2 & 2\times0+3\times1\\3\times1+2\times0 & 3\times0+2\times2 & 3\times0+2\times1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\2 & 6 & 3\\3 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

【例 1.5】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -4\\-1 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

【解】 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+2\times(-1) & 1\times(-4)+2\times2\\2\times2+4\times(-1) & 2\times(-4)+4\times2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$；

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & -4\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+(-4)\times2 & 2\times2+(-4)\times4\\-1\times1+2\times2 & -1\times2+2\times4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6 & -12\\3 & 6\end{pmatrix}.$$

【例 1.6】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 8\\4 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & 8\\3 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AC}$，$\boldsymbol{BC}$.

【解】 $\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}2\times0+8\times1 & 2\times0+8\times(-2)\\4\times0+5\times1 & 4\times0+5\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -16\\5 & -10\end{pmatrix}$；

$$\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}4\times0+8\times1 & 4\times0+8\times(-2)\\3\times0+5\times1 & 3\times0+5\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -16\\5 & -10\end{pmatrix}.$$

矩阵与矩阵的乘法和数与数的乘法之间存在着较大的差异. 从例 1.4 中可知，等式

$AB=BA$ 并不成立，即矩阵的乘法中无交换律；从例 1.5 中可知，$AB=0$ 并不能导出 $A=0$ 或 $B=0$；从例 1.6 中可知，$AC=BC$ 且 $C\neq 0$，但并不能导出 $A=B$. 所以，在矩阵的计算过程中，要特别注意与数的乘法的差异. 尽管如此，矩阵与矩阵的乘法还是满足下列运算规则.

（1）分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$；

（2）结合律：$(AB)C=A(BC)$.

【例 1.7】 设 $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，求 AI、IA、IX，其中 I 都是使乘积有意义的单位矩阵.

【解】 $AI=\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}=A$；

$$IA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}=A;$$

$$IX=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=X.$$

上述结果表明，矩阵 A 或 X 乘以适当阶的单位矩阵后，其结果仍然是矩阵 A 或 X. 这并不只是矩阵 A 和矩阵 X 的特有现象. 可以证明，对任意一个矩阵 A，乘以一个适当阶的单位矩阵 I，总有 $AI=A$，$IA=A$ 成立.

对于数与矩阵的乘法，我们规定为该数乘以矩阵中的每一个元素. 例如，对于矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$，那么 $3A=\begin{pmatrix} 3\times 2 & 3\times 8 \\ 3\times 4 & 3\times 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 24 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$.

学习指引

理解矩阵的概念及其运算，熟练掌握矩阵的乘法. 注意矩阵的乘法没有交换律和其他与数的运算之间的差异.

习　题　1-2

1. 当 $\begin{pmatrix} x & 2y \\ z & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2u & u \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$ 时，试求 x，y，z，u 的值.

2. 已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

试判断下列运算是否有意义.

（1）AB；　（2）BA；　（3）BC；　（4）CB.

3. 计算.

（1）$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}(2\ \ 1\ \ 0)$；　（2）$(1\ \ 2)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}3&4&7\\2&6&3\\5&9&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$；　（4）$(1\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}2&4&7\\2&6&3\\5&9&1\end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$；　（6）$(x\ \ y)\begin{pmatrix}3&-6\\-6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

4. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&6\\-3&5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&4\\3&7\end{pmatrix}.$$

若有 $2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$，试求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

5. 甲乙两校到某服装厂订做校服，单价和数量如表 1.11 和表 1.12 所示，试用矩阵计算出两校各应付款多少？

表 1.11　校服规格的单价

规　格	大　号	中　号	小　号
单价/元	30	28	26

表 1.12　甲乙两校订做校服的规格与数量

规格 / 数量 / 学校	大　号	中　号	小　号
甲校	200	300	100
乙校	150	350	200

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}$，计算下列各式，并分析所得的计算结果，其中 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$.

（1）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2$；　（2）$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$；

（3）$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$；　（4）$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$.

7. 求 $\boldsymbol{AX}$，如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$.

第三节　矩阵的初等行变换与线性方程组求解

一、矩阵的初等行变换

在线性方程组中，线性方程组的解的情况是由线性方程组的系数及其自由项常数来决定的. 运用加减消元法求解线性方程组的过程，其实质就是线性方程组的系数及其自由项常数的加减过程，具体对比如下：

加减消元法解线性方程组的过程	对应的矩阵变换过程
$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=2\\2x_1+x_2-3x_3=-3\\3x_1-x_2+x_3=-4\end{cases}$	$\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\2&1&-3&-3\\3&-1&1&-4\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[(3)-3\times(1)]{(2)-2\times(1)}\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ \quad -3x_2-x_3=-7 \\ \quad -7x_2+4x_3=-10 \end{cases} \qquad \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & -7 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)+2\times(2)]{-1\times(2)}\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ \quad 3x_2+x_3=7 \\ \quad -x_2+6x_3=4 \end{cases} \qquad \xrightarrow[r_3+2r_2]{-r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ \quad -x_2+6x_3=4 \\ \quad 3x_2+x_3=7 \end{cases} \qquad \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)+3\times(2)}\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ \quad -x_2+6x_3=4 \\ \quad 19x_3=19 \end{cases} \qquad \xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 19 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)\div 19]{-1\times(2)}\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ \quad x_2-6x_3=-4 \\ \quad x_3=1 \end{cases} \qquad \xrightarrow[r_3\div 19]{-r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)+6\times(3)]{(1)+(3)}\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ \quad x_2=2 \\ \quad x_3=1 \end{cases} \qquad \xrightarrow[r_2+6r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-2\times(2)}\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \\ x_3=1 \end{cases} \qquad \xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

归纳起来，上述过程实际上只进行以下几个操作.

① 用一个不为零的实数 k 乘以一个方程；	① 用一个不为零的实数 k 乘以矩阵第 i 行上的每一个元素，记为 kr_i；
② 一个方程加上另一个方程的 k 倍；	② 矩阵第 i 行加上第 j 行对应位置上元素的 k 倍，记为 r_i+kr_j；
③ 互换两个方程位置.	③ 互换矩阵第 i 行和第 j 行上对应元素的位置，记为 $r_i\leftrightarrow r_j$.

上述归纳的右边三种操作，被称为矩阵的**初等行变换**.

二、利用矩阵的初等行变换求解线性方程组

在介绍利用矩阵的初等行变换求解线性方程组以前，我们先介绍线性方程组的系数矩阵和增广矩阵. 对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_{1n}=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_{2n}=b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_{1n}=b_m \end{cases},$$