JIANGPIN
SHUXUETI

主编 陈永明
副主编 曹永娥 傅琳 刘辰 杨志刚
编写 上海市西南位育中学 华东理工大学附中 上海市梅园中学

陈永明 讲评 数学题

初中习题归类研讨

上海科技教育出版社

陈永明讲评数学题

——初中习题归类研讨

主编　陈永明
副主编　曹永娥　傅琳　刘辰　杨志刚
编写　上海市西南位育中学　华东理工大学附中　上海市梅园中学

上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

陈永明讲评数学题:初中习题归类研讨 / 陈永明主编. —上海:上海科技教育出版社,2013.12

ISBN 978-7-5428-5784-2

Ⅰ.①陈… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①中学数学课—初中—题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 251212 号

责任编辑 郑丽娟

封面设计 童郁喜

陈永明讲评数学题

——初中习题归类研讨

主　　编 陈永明

副 主 编 曹永娥　傅　琳　刘　辰　杨志刚

出版发行 上海世纪出版股份有限公司

上 海 科 技 教 育 出 版 社

(上海市冠生园路 393 号　邮政编码 200235)

网　　址 www.sste.com　www.ewen.cc

经　　销 各地新华书店

印　　刷 启东市人民印刷有限公司

开　　本 787×1092　1/16

字　　数 420 000

印　　张 18.75

版　　次 2013 年 12 月第 1 版

印　　次 2013 年 12 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-5428-5784-2/O・885

定　　价 39.00 元

内容提要

本书作者根据张景中院士的“中巧说”，即“用一个方法解出一类题目. 也就是说，把数学问题分门别类，一类一类地寻求可以机械执行的方法”的思想，曾提出过“将解题经验算法化、显性化”的观点，并提出过“解题模块”和“命题联想系统”的算法化、显性化的两个具体做法.

依据这个指导思想，本书挑选了初中数学的部分内容，精心选择和精心编排例题，并作精心的讲评，力图寻找解题的规律，使之有章可循.

本书凝聚了老中青三代优秀教师的智慧(一位学生也参与了部分工作)，特别是“解题模块：条件求值”、“别样观点：应用题教学”、“三角形中的中点问题”、“线段比的转换”、“图形运动中的不变量”、“联想与构造：‘以形助数’问题”、“回归本源：求点的坐标”、“数学方法：主元法”、“数学方法：特殊化”、“反应块：拆项添项和割补”等文不落俗套，匠心独具，亮点多多.

本书的对象是初中数学教师，也可供中学生参考. 本书选取的题大多属于中等或中等偏上的难度，可供平时教学参考，特别适用于初三复习及高中自主招生考试复习.

序

自从笔者和一些优秀的中青年教师合作的《数学习题教学研究》、《陈永明讲评数学题——高中习题归类研讨》出版后，得到了广大读者的好评，在此基础上笔者和一些优秀的中青年教师又写了这本书.算起来是笔者的第51本出版物了.

习题教学是数学教学中的重灾区，学生陷入题海，苦不堪言；教师难于应付，身心疲惫，是到了应该想想办法的时候了.造成这种现象的原因是多方面的，但教师还是可以有所作为，并且应该有所作为.

张景中院士十分关注中小学数学，并提出了"教育数学"的思想，他在谈到解题的时候，说过一段精彩的话："练武功的上乘境界是'无招胜有招'.但武功仍要从一招一式入门.解题也是如此……这种'无招胜有招'的境界，就是'大巧'吧！但是小巧果然不足取，大巧也确实太难，**对于大多数学子，还要重视有章可循的招式**……大巧法无定法，小巧一题一法.**中巧**呢，则希望**用一个方法解出一类题目.也就是说，把数学问题分门别类，一类一类地寻求可以机械执行的方法，即算法.**"

笔者把它称为"**中巧说**".笔者读了这番话之后，想法很多.

笔者自忖，自己不过是中等资质的人，因此学习时需要总结类型.笔者从教50年，在进行教学时，也喜欢总结规律.那些大数学家，可能特别聪明，不要记忆，不要总结，仅凭灵感，就可以有所发现、有所创造.现在看来并不是如此.原来像张景中这样的院士——一流数学家学习解题时也是整理类型，寻找通法的，这样才能在较高的起点上研究创新.从这个意义上说，通法、类型(模式)和创新是不矛盾的.

张院士的这番话，不但指出了要总结类型，而且要"寻求可以机械执行的方法，即算法".这是数学教学的一个全新的观点，对改进数学教学意义重大.请注意，这里用了"算法"一词.

算法的特征是什么？笔者理解，或许一是，"什么情况"下该用某种方法——**识别**；二是当识别结果是"yes"时，解决问题的**步骤**是怎样的.不少教师也总结规律，但往往达不到这样的深度.

在《数学习题教学研究》那本书里，提出了把解题经验**算法化、显性化**的观点，提出了"**解题模块**"和"**命题联想系统**两个算法化、显性化的具体做法.前者是针对"某一类型"的题，寻找它的解题程序.但中学阶段的数学题不完全都有"套路"，譬如平面几何题，这时

候,“中巧”可能体现在:你看到题目条件(或定理、法则)时,能够联想到它可以推出哪些新的命题;看到题目的结论时,联想到哪些命题可以推出它——即命题联想系统.

本书实际上是《数学习题教学研究》的具体化.把初中数学题中某些类型、某些经验,尽量做些规律性,甚至程序化的归纳和点拨,特别是**解题模块、命题联想系统(等价命题系统、上游命题系统和下游命题系统)、基本图形**的研究等,是本书主要的特色.

有同志担心,这样教法,会不会把学生教呆了.有这个担心是很自然的.

首先,笔者认为,“中巧说”只是丰富多彩的数学解题教学中的一个流派,特别适合“大多数学子”,对于资优生,不能照搬.

其次,张景中院士也主张中巧向大巧过渡.笔者主张寻找解题规律,但不要把规律教死,正像有的专家说的:要有套路,又要突破套路.对此我们也有一些思考.

第一,我们强调师生共同总结,而不是教师将套路灌输给学生.师生共同总结,不但能够让学生掌握某类数学题的解法或思路,而且可以大大提高学生归纳总结的能力.上海老一辈的数学教育家赵宪初先生说过**“要先举三反一,才能举一反三”**.因此,本书各节的编写,总是先出现一组例题,然后归纳规律(举三反一),最后再出现一些变式例题和练习(举一反三).

第二,笔者在《数学习题教学研究》中,提出分析解题思路时要“有序分析”,提出了“思考时通法优先,落笔时优法优先”,还提出了“先估后算”“寻找巧法”等策略.再加上其他的一些行之有效的措施,如一题多解、变式训练、渗透数学思想方法、开放题、课题学习,等等,中巧是可以向大巧过渡的.

本书没有面面俱到,只是选取了部分专题进行了探讨.本书选取的题大多属于中等或中等偏上的难度,特别适合初三复习及高中自主招生考试复习使用.

本书除了解题之外,还重视评议.评议采取多种形式.

带总结性的评议我们标为“小结”;小一点的点拨标为“讲评”.这些评议,包括解题模块、命题联想系统的总结,解题思路的点拨,关键点的指出,教学建议,等等.有些小经验我们用箭头在文旁指出.个别文章,还加了“主编的话”.

学习者的疑惑、错解的剖析,以及拓展,我们用“◆”标注.

习题背景的分析,我们用“链接”标注.

“评”是比“解”本身难得多的工作,特别是关于解题模块和联想系统的总结,由于水平的关系,可能做得还不够.

笔者年事已高,虽然本书定名为《陈永明讲评数学题》,其实本人主要负责策划、审稿和统稿,各篇基本上由上海市西南位育中学、华东理工大学附中、上海市梅园中学等校的中青年教师执笔,最后由上海市西南位育中学副校长、特级教师邵翼如先生审读了全部书稿.执笔者都是十分认真的,许多稿子都经过了5、6遍的修改,有的甚至10遍,才得以定稿,总共历时一年多.编写过程中,几位副主编做了大量的工作,还得到了上海市西南位育中学张建中校长、华东理工大学附中童立贤校长、上海市梅园中学陶恩德校长、毛颖校长的大力支持.在此,对我的合作者,表示感谢.

陈永明

2013 年 3 月于上海

时年七十又二

MuLu

目录

一、代　数

1. 联想和"组块":由 $a+b$, $a-b$, ab 等引出的[①]

$a+b$、$a-b$、$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ 等是初中代数中最基础的内容,殊不知它们背后还有很多性质. 本文有四部分. 第一部分是从 $a+b$、$a-b$ 引起的联想,第二、三部分是由平方和公式引出的性质(笔者将那些引出的性质称为"**下游命题**"),第四部分是由 $a+\frac{1}{a}$ 引出的应用.

例 1 有两个数,它们的和等于 100,差等于 40,求这两个数.

解 设两个数为 a、$b(a>b)$,

则 $\begin{cases}a+b=100,\\a-b=40,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=70,\\b=30.\end{cases}$

例 2 已知 $a<b<0$, $a^2+b^2=4ab$,求 $\frac{a+b}{a-b}$ 的值.

分析 待求式中有 $a+b$、$a-b$,如果设 $a+b=x$, $a-b=y$,那么 a、b 可用它们的和 x 与差 y 表示,即 $a=\frac{x+y}{2}$, $b=\frac{x-y}{2}$,以此作为换元的式子,将已知条件转换为关于 x、y 的式子("**和差变换**").

解 设 $a+b=x$, $a-b=y$,那么 $a=\frac{x+y}{2}$, $b=\frac{x-y}{2}$,

代入条件 $a^2+b^2=4ab$,得

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=4\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$2x^2+2y^2=4(x^2-y^2),$$

$$x^2=3y^2,$$

---

① 本文执笔:陈永明、梁珍(上海市梅园中学)

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2=3,$$

$$\frac{x}{y}=\pm\sqrt{3}\quad(\text{负的舍去}),$$

$\because\ x=a+b<0,$
$y=a-b<0.$

即
$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{3}.$$

讲评 1. **数 a、b 与它们的和与差之间有密切关系**：已知 a、b，当然可以求出它们的和与差；反过来，已知两数的和 $a+b$ 与差 $a-b$，也马上可得这两个数：$a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}$，$b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}$. 也可以说，a、b、$a+b$、$a-b$ 这一组式子构成了一组“**组块**”，即它们中知二可求得其余的式子. 除了

$$a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}，\text{即 } 2a=(a+b)+(a-b),$$

$$b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}，\text{即 } 2b=(a+b)-(a-b)$$

外，还可以得到

$$a=(a+b)-b=(a-b)+b,$$
$$b=(a+b)-a=a-(a-b)$$

等一系列式子，将来在高中的“三角比”与“三角函数”的学习中颇有价值.

2. **令 $a+b=u$，$a-b=v$，那么 a、b 可用它们的和 u 与差 v 表示**，即 $a=\frac{u+v}{2}$，$b=\frac{u-v}{2}$. 含 a、b 的式子可转换为含 u、v 的式子，这样的变换称为“**和差变换**”. 在题目的条件和结论里出现 a、b 的和差，而这个式子本身的演算比较困难，可试试和差变换，变成含 u、v 的式子，再进行演算.

例 3 已知 a、b 是方程 $x^2+2x-2=0$ 的两个根，求 a^3+b^3 的值.

解 根据根与系数关系得 $a+b=-2$，$ab=-2$，

于是
$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)\\&=(a+b)[(a+b)^2-3ab]=-2[(-2)^2-3\times(-2)]\\&=-20.\end{aligned}$$

链接 除了教科书上说到的三个乘法公式外，还有

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

例 4 已知 a、$b(a\neq b)$满足 $a^2+2a=2$,$b^2+2b=2$,求$\dfrac{a}{a+2b}+\dfrac{b}{b+2a}$的值.

尽管不是多项式,但还是对称式.

解 把 a、b 看作同一方程 $x^2+2x-2=0$ 的两个根,根据根与系数关系得 $a+b=-2$,$ab=-2$,

$$\begin{aligned}于是\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2a}&=\frac{a(b+2a)+b(a+2b)}{(a+2b)(b+2a)}\\&=\frac{2a^2+2ab+2b^2}{2a^2+5ab+2b^2}\\&=\frac{2(a^2+b^2)+2ab}{2(a^2+b^2)+5ab}\\&=\frac{2(a+b)^2-2ab}{2(a+b)^2+ab}\\&=2.\end{aligned}$$

例 5 因式分解:$x^4+(x+y)^4+y^4$.

分析 这是个二元对称式,直接分解有点难度,可以试用基本对称式 $x+y$、xy 表示,即令 $u=x+y$,$v=xy$,然后再分解.

解 $\because$
$$\begin{aligned}x^4+y^4&=(x+y)^4-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3\\&=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2,\end{aligned}$$

$\therefore$
$$\begin{aligned}原式&=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2+(x+y)^4\\&=2(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2\\&=2[(x+y)^4-2xy(x+y)^2+(xy)^2]\\&=2[(x+y)^2-xy]^2\\&=2(x^2+y^2+xy)^2.\end{aligned}$$

例 6 解方程组:$\begin{cases}2x^2+2y^2+3x+3y=1, & ①\\ x^2y^2+xy-2=0. & ②\end{cases}$

分析 ②式容易想到转化为关于 xy 的方程,①式里出现的是 $x+y$、x^2+y^2,也容易想到转化为关于 $x+y$、xy 的方程,

解 令 $x+y=u$,$xy=v$,原方程化为:

$$\begin{cases}2u^2-4v+3u=1, & ③\\ v^2+v-2=0, & ④\end{cases}$$

解④得 $v=-2$ 或 $v=1$,

将 $v=-2$ 代入③,所得方程无实数解,故舍去.

将 $v=1$ 代入③,得 $2u^2-4+3u=1$,

解得 $u=1$ 或 $u=-\dfrac{5}{2}$,

即有方程组

$$\begin{cases}x+y=1,\\ xy=1\end{cases}\quad ⑤\qquad 或\begin{cases}x+y=-\dfrac{5}{2},\\ xy=1.\end{cases}\quad ⑥$$

易知⑤无实数解，解⑥得

$$\begin{cases}x=-2,\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases} \text{或} \begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\ y=-2.\end{cases}$$

讲评 令 $u=a+b$，$v=ab$，那么关于 a、b 的对称(多项)式，可以转化为关于 u、v 的表达式，这个变换叫**"和积变换"**，它的作用有：

1. **跳过求原始数据 a、b，求出 a、b 的对称(多项)式的值.** 如

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-2ab],$$

$$a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2,$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}.$$

2. **有时对于关于 a、b 的式子**，难以完成某种要求(如例 5 的分解因式，例 6 的解方程)，可以试试进行和积变换，将原式**变为关于 u、v 的表达式，再进行演算.**

例 7 已知 a、b 为正数，$a^2+b^2=13$，$a-b=1$.

(1) 求 ab；

(2) 求作以 a、b 为根的二次方程.

解 (1) ∵ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$，

∴ $13=1+2ab$，$ab=6$；

(2) ∵ $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$，

∴ $(a+b)^2=1^2+4\times6=25$，$a+b=\pm5$(负的舍去).

由 $a+b=5$，$ab=6$，得以 a、b 为根的二次方程可以是 $x^2-5x+6=0$(答案不唯一).

讲评 不仅已知 $a+b$、ab，可以求出二元对称(多项)式的值，其实式子 a、b、$a+b$、$a-b$、ab、a^2+b^2、…组成了一组"组块"，知道其中的 2 个，通常就可以求出其余的几个.下面是有关的公式，实际上都是**平方和(差)公式的"下游命题"**，不必刻意记忆，但可以在通过运算的基础上形成较深刻的印象.

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$，　　(通过 $a-b$、ab 求 a^2+b^2)

$a^2+b^2=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$，　　(通过 $a+b$、$a-b$ 求 a^2+b^2)

$ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$，　　(通过 $a+b$、$a-b$ 求 ab)

$ab=\frac{1}{2}[(a+b)^2-(a^2+b^2)]$，　　(通过 $a+b$、a^2+b^2 求 ab)

$ab=\frac{1}{2}[(a^2+b^2)-(a-b)^2]$，　　(通过 $a-b$、a^2+b^2 求 ab)

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab,$　　　　（通过 $a-b$、ab 求 $a+b$）

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab.$　　　　（通过 $a+b$、ab 求 $a-b$）

例 8　已知 $a^2-3a+1=0$，求 $a^4+\frac{1}{a^4}$ 的值.

这个方程的系数是"对称"的，与例 9 相同.

解　由 $a^2-3a+1=0$，得 $a+\frac{1}{a}=3$，

所以

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=7,$$

$$a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2$$

$$=49-2$$

$$=47.$$

例 9　解方程：$x^4+7x^3+14x^2+7x+1=0$.

解　显然 $x=0$ 不是方程的根，两边同除以 x^2，得

$$x^2+7x+14+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

$$\left[x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0.$$

令 $x+\frac{1}{x}=y$，

则

$$x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=y^2-2,$$

原方程化为

$$y^2+7y+12=0,$$

$$(y+3)(y+4)=0,$$

∴　$y=-3$ 或 $y=-4$.

当 $x+\frac{1}{x}=-3$ 时，

$$x^2+3x+1=0, x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2};$$

当 $x+\frac{1}{x}=-4$ 时，

$$x^2+4x+1=0, x=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}.$$

讲评　1. a、$a+\frac{1}{a}$、$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$、$a-\frac{1}{a}$、$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$、$a^2+\frac{1}{a^2}$ **这些式子形成一组"组块"**，已知其一，其他都可求. 其中最基本的是

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2,$$

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2.$$

特别是已知 $a+\frac{1}{a}$ 的值，可以求出 $a^2+\frac{1}{a^2}$、$a^3+\frac{1}{a^3}$、$a^4+\frac{1}{a^4}$ 等，是经常运用的.

2. **变换 $u=x+\frac{1}{x}$ 有重要价值.** 一元方程 $x^4+7x^3+14x^2+7x+1=0$ 称为倒数方程，其首尾对称的两项系数都相等. 对于倒数方程，就可以实施变换 $u=x+\frac{1}{x}$.

小结

1. **a、b、$a+b$、$a-b$ 这一组式子中，知二可求得其余的式子.** 特别地，有时可以运用"**和差变换**"：$a+b=u$，$a-b=v$.

2. **a、b、$a+b$、$a-b$、ab、a^2+b^2、…这一组式子中，知二可求出其余的式子.** 特别地，有时可以运用"**和积变换**"：$a+b=u$，$ab=v$.

3. **a、$a+\frac{1}{a}$、$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$、$a-\frac{1}{a}$、$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$、$a^2+\frac{1}{a^2}$、…这一组式子中，知其一其他都可求.** 特别地，是**变换 $u=x+\frac{1}{x}$** 有重要价值.

………… 练　习 …………

1. 两数 a、b 的和为 9，积为 14，求 a^2+b^2-3ab 的值.
2. a、b 是方程 $x^2+x-6=0$ 的两个根，求 $a^4+b^4+a^2+b^2$ 的值.
3. 已知 $a-b=3$，$a^2+b^2=17$，求 ab 的值.
4. 已知 $a+b=5$，$ab=4$，求 $a-b$ 的值.
5. 已知 $a^2+\frac{1}{a^2}=6$，求 $a-\frac{1}{a}$ 的值.
6. 已知抛物线 C_1 的函数解析式为 $y=ax^2+bx-3a(a\neq0,b<0)$，若抛物线 C_1 经过点 $(0,-3)$，方程 $ax^2+bx-3a=0$ 的两根为 x_1、x_2，且 $|x_1-x_2|=4$，求抛物线 C_1 的顶点坐标.

………… 答　案 …………

1. 11　**2.** 110　**3.** 4　**4.** 3 或 -3　**5.** 2 或 -2　**6.** $(1,-4)$

2. 因式分解[①]

因式分解是把一个多项式化成几个整式乘积的形式，因式分解与整式乘法是相反方向的变形. 因式分解的结果一定是几个因式乘积形式，但是因式分解较整式乘法难，主要是难在没有固定的方法，需要我们合理选择分解的方法.

例 1 分解因式：$12x^3y^2-6x^2y^3+3xy$.

解 $12x^3y^2-6x^2y^3+3xy$

$=3xy(4x^2y-2xy^2+1)$.

这里的“1”不能漏了.

例 2 分解因式：$2x(a-2)+6y(2-a)$.

解 $2x(a-2)+6y(2-a)$

$=2x(a-2)-6y(a-2)$

$=2(a-2)(x-3y)$.

注意$(a-2)$和$(2-a)$之间的关系：$(2-a)=-(a-2)$，又把$(a-2)$作为一个整体，也可以考虑提取.

讲评 这是因式分解的第一种方法：**提取公因式法**. 关于提取公因式法要注意以下几点：

(1) 提取时，系数取各项系数的最大公约数，相同字母的幂，取其次数最低次幂；

(2) 不仅是系数、相同字母的幂可以提取，相同的式子也可以提取；

(3) 对于一个待分解的式子，首先要考虑的是提取公因式法.

例 3 分解下列各式：

(1) $-1+4x^2$；(2) $(3x-1)^2-(x+2)^2$.

解 (1) $-1+4x^2$

$=4x^2-1$

$=(2x+1)(2x-1)$；

注意：1 可以看作 1^2.

(2) $(3x-1)^2-(x+2)^2$

$=(3x-1+x+2)(3x-1-x-2)$

$=(4x+1)(2x-3)$.

例 4 分解下列因式：

(1) $\frac{1}{4}x+x^3-x^2$；(2) $-9x^2y+y^3$.

① 本文执笔：颜国军(武汉市常青第一学校)

分析 观察多项式(1)(2)中都有公因式可以提出,所以可以先提取公因式,然后再根据结构选择公式进行分解.

解 (1) $\frac{1}{4}x+x^3-x^2$

$=x\left(\frac{1}{4}+x^2-x\right)$

$=x\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$;

(2) $-9x^2y+y^3$

$=-y(9x^2-y^2)$

$=-y(3x-y)(3x+y)$.

讲评 这是因式分解的第二种方法:**运用公式法**,运用这个方法以下几点要注意:

1. 注意公式的结构.

平方差公式:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 它的左边是两项,并且是符号相反的两个平方数(式),右边是这两数的和与差的乘积.

完全平方公式:$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$. 它的左边是三项,其中两项是平方数(式),还有一项是"交叉项"$2ab$,右边是这两数(式)和(或差)的平方.

2. 因为学生之前先学了多项式乘法,当时已经得到了这三个乘法公式. 要让学生知道,运用公式法因式分解只是将原来的公式反过来用. 因此要时时提醒学生:我们现在要做什么事?

例 5 分解因式:

(1) x^2+4x+3;(2) $x^4-3x^3-28x^2$;(3) $3a^2-5ab-8b^2$.

分析 三个多项式的结构都是三项,但是都不能直接用完全平方公式,因此可以尝试用十字相乘法分解.

解 (1) $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$;

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{3+1=4} \end{array}$$

(2) $x^4-3x^3-28x^2=x^2(x^2-3x-28)=x^2(x-7)(x+4)$;

$$\begin{array}{cc} 1 & -7 \\ 1 & 4 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{4-7=-3} \end{array}$$

(3) $3a^2-5ab-8b^2=(3a-8b)(a+b)$.

$$\begin{array}{cc} 3 & -8b \\ 1 & b \\ \hline \multicolumn{2}{c}{3b+(-8b)=-5b} \end{array}$$

讲评 这是因式分解的第三种方法:**十字相乘法**.对此应注意:

(1) 十字相乘法用于二次三项式的因式分解.

(2) 二次三项式未必都能分解成两个一次因式的积,实际上这涉及该二次三项式相应的二次方程有没有实数根的问题(学了一元二次方程之后,会知道当且仅当判别式 $\Delta \geqslant 0$ 时,才有两实数根).

(3) 十字相乘法的步骤是:

① 将二次项分解为两个一次式的积,取其系数,列成 2×2 方阵的第 1 列.

② 将常数项分解为两个数的积,列成 2×2 方阵的第 2 列.

③ 将 2×2 方阵两对角线上数分别相乘,并求出这两个积的和.

④ 如果这个和正巧等于原二次三项式的一次项的系数,那么从 2×2 方阵的第 1 行和第 2 行,就可以写出分解成的两个一次因式.

如果这个和不等于原二次三项式的一次项的系数,那么需要调整第①步和第②步的数据.

例 6 分解因式:

(1) $a^2-ab+ac-bc$;(2) $x^2-4y^2-z^2+4yz$;(3) $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)$.

分析 上面的多项式都超过三项,很显然不适合公式法分解,观察各项的因式也没有公因式可以提取,这样的多项式的分解可以考虑分组分解.

解 (1) 方法一:

$a^2-ab+ac-bc$

$=(a^2-ab)+(ac-bc)$

$=a(a-b)+c(a-b)$

$=(a-b)(a+c)$;

方法二:

$a^2-ab+ac-bc$

$=(a^2+ac)-(ab+bc)$

$=a(a+c)-b(a+c)$

$=(a-b)(a+c)$;

(2) $x^2-4y^2-z^2+4yz$

$=x^2-(4y^2+z^2-4yz)$

$=x^2-(2y-z)^2$

$=(x+2y-z)(x-2y+z)$;

(3) 方法一:

$(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)$

$=a^2xy+b^2xy+abx^2+aby^2$

$=(a^2xy+abx^2)+(aby^2+b^2xy)$

$=ax(ay+bx)+by(ay+bx)$