中央财经大学国家级实验教学示范中心实验教材

期权定价实验教程

宋 斌◎主编

清华大学出版社

期权定价实验教程

宋 斌◎主编

清华大学出版社
北 京

内容简介

现代经济社会中，不确定性日益增加，因此各种市场参与主体都有强烈的规避风险的需求，衍生金融工具正是在这样的大背景下产生的，由此可见，衍生金融工具是人类经济社会中的一大创新。期权定价就是最重要也是最具代表性的内容。

本书的指导思想是通过模型的算法实现，加强学生对有关定价模型的深入理解，并通过算法实现来提高学生未来使用模型，特别是进入业界后运用模型进行交易的能力。

图书在版编目(CIP)数据

期权定价实验教程/宋斌主编. --北京：清华大学出版社，2014
ISBN 978-7-302-35706-3

Ⅰ. ①期… Ⅱ. ①宋… Ⅲ. ①期权定价理论－教材 Ⅳ. ①F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 055476 号

责任编辑：刘志彬
封面设计：汉风唐韵
责任校对：王凤芝
责任印制：杨 艳

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市春园印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm 印 张：13 字 数：277 千字
版 次：2014 年 4 月第 1 版 印 次：2014 年 4 月第1次印刷
印 数：1～4000
定 价：35.00 元

产品编号：058509-01

Foreword 前言

现代经济社会中,不确定性日益增加,因此各种市场参与主体都有强烈的规避风险的需求,衍生金融工具正是在这样的大背景下产生的。由此可见,衍生金融工具是现代金融市场发展到一定成熟阶段的产物,是人类经济社会中的一大创新。除了规避风险的保值功能,衍生金融工具还具有投机与套利功能。随着全球经济一体化的加深和金融市场的不断深化,衍生品市场迅猛发展,在近三十年间呈现指数增长的趋势,这种增长势头不仅体现在场内外天文数字的交易金额上,还体现在衍生工具种类的复杂多样性上。衍生品已经走出经典时代而迎来复杂衍生品时代,简直可以用万花筒来形容这一变化万千的衍生品世界。现在全世界的金融工程师们不断开发出各种新型的衍生品来满足各种不同的功能需求。这种趋势对出于各种目的参与衍生品交易的交易主体也提出了较高的要求,他们必须对衍生品有全面而深入的掌握。场内市场的不断发展还将吸引更多中小型投资者的加入,从而使得衍生品的定价等知识成为人们普遍需要掌握的常识。这都对教材提出了简单易懂且可操作性强的要求。

就学科归类而言,衍生品定价理论是金融工程学(金融随机分析)的核心内容,衍生品定价相关课程是金融工程专业、投资专业、数理金融等专业的核心课程之一。由于衍生品定价需要使用随机微分方程、偏微分方程、测度论等复杂的现代数学工具,因此被戏称为"火箭科学"。在众多衍生品定价中,期权定价是最重要也是最有代表性的内容。期权课程的数学难度是目前阻碍学生学习定价课程的主要障碍,甚至成为学习的阴影。必修课的学生咬牙坚持,选修课的学生望而却步,放弃了这一领域知识的学习和掌握。考虑到本教材的普及性和实验教材的特点,在对定价理论的内容安排上,将主要结合离散模型阐述衍生品定价的核心思想——无套利均衡分析和状态价格定价技术。之所以将重心放在离散时间模型上,除了数学上的易于处理外,还因为树方法是本教程中的主要数值方法。连续时间模型部分,客观上讲,这样的经典教材也不少,只是要么数学很艰深,吓住了财经专业的学生,要么就过于简略,让学生无法体会数学在衍生品定价中的支柱作用,学了个皮毛,影响学生后续的深入学习。限于篇幅,本教程不再涉及连续时间模型的理论部分,留待于以后的教材中严谨阐述。当然连续时间模型的计算、敏感性分析以及波动率微笑等核心问题在教材中都有阐述。略去的只是定价理论部分的数学推导。在使用本教材时,笔者假设读者正在学习或已经学习过连续时间模型的定价理论部分。教材的整体安排遵循先讲原理,再讲定价模型、敏感性分析、波动率微笑、数值计算等内容的顺序。就数值计算部分而言,包括赫尔(John Hull)在内的很多经典衍生品教材里都有配套的软件,例如Hull 教材的配套软件 Derivagems,这些软件多半有比较良好的用户界面,但也限制了学

生建模能力的训练，而本实验教程着眼于培养学生较高水平的建模能力。为了适应财经院校不同专业的学生的编程背景和未来的职业发展，一般情况下各章内容都将涉及三种主要算法实现手段——Excel、MATLAB 和 C++与 Excel-Addin。这里需要指出的是：第一，本教材不会安排较大篇幅进行模型定价原理和具体内容的阐述，在各种层次各种难度的有关的衍生金融工具的定价教材里已经有充分阐述，无须再写在实验教程里；第二，本教程也不是某一软件的使用指南，更不是有关函数的罗列，因为我们写的不是一本软件编程书；第三，笔者也不想让教程沦为一个衍生品定价的代码资源库。我们的指导思想是通过模型的算法实现，加强学生对有关定价模型的深入理解，并通过算法实现来提高学生未来使用模型，特别是进入业界后运用模型进行交易的能力。

前已述及，考虑到学生不同的计算机能力和编程偏好，本书中的模型实现采用 Excel、MATLAB 和 C++三种金融领域主流建模工具依次实现。期权定价，一方面需要高效快速的代码；另一方面又要兼顾代码开发的速度。Excel 简单直观，运用宏后功能也很强大，适合不太喜欢编程的读者。MATLAB 是主流科学计算软件，有强大的金融工具箱支撑，近年来在财经领域占有率越来越高，特别适合有编程背景，现在或将来从事金融工程、量化投资等领域的读者学习掌握。C++与 Excel-Addin 结合使用，保证了计算的速度，是目前金融、量化投资领域的主流编程语言，有强大的函数库的支持，而 Excel-Addin 的使用更利于结果的清晰展示，便于非编程人员的使用。

全书共分八章，第一章是二叉树期权定价数值实验，主要阐述衍生品定价的核心——无套利均衡分析思想；这一思想通过状态价格定价技术来实现，而状态价格定价技术的核心是动态复制。动态复制过程简单直观，在定价过程中大有用武之地。但是期权定价更为重要的是风险中性定价方法(鞅定价方法)。本章给出了离散框架下的金融资产定价基本定理，并在此基础上给出期权的风险中性定价方法。二叉树模型的数值实验，包括动态复制和风险中性定价两种方法，依次采用 Excel、MATLAB、C++与 Excel-Addin 系统计算了欧式看涨、看跌与美式看涨、看跌期权，并分析了二叉树模型的收敛性。这部分内容虽然简单，但是非常重要，要求学生独立完成所有建模内容。第二章是连续时间 B-S-M 模型的数值实验，首先给出了连续时间框架下运用动态复制推导出的 B-S-M 偏微分方程，在简要给出求解思路后直接给出解析公式，第二章没有涉及连续时间框架下的风险中性定价方法。这部分内容可参见任何一本有一定数学难度的金融衍生资产定价教材。由于期权价格的敏感性分析主要是针对连续时间模型而言的，因此第二章还分析了影响期权价格的五个因素并画图展示了这种影响效果，而且依此采用 Excel、MATLAB、C++与 Excel-Addin 计算了期权的敏感性指标。此外还在 MATLAB 下开发了期权敏感性指标的图形用户界面，进一步提高了敏感性指标的可视化效果，便于其他用户的使用。第三章介绍了隐含波动率和波动率微笑概念，并给出了计算隐含波动率的数值方法。在运用 Excel 和 MATLAB 计算隐含波动率，绘制波动率微笑时，本教材均采用来源于 CBOE(芝加哥)期权交易所的股票期权交易的真实数据，主要使用通用电气(GE)和苹果两个公司的股票期权数据。此外还运用 C++与 Excel-Addin 计算了欧式期权的隐含波动率。运用蒙特卡罗数值方法计算期权也是本教材的主要内容，由于篇幅较多，笔者从方法

的难度出发，分两章来阐述。第四章系统介绍了蒙特卡罗及其对偶变量和控制变量方法两种方差改进技术。此外本章还详细阐述了准蒙特卡罗方法，也就是运用三种低偏差序列改进蒙特卡罗方法。为了给美式期权定价，本章还简要阐述了最小二乘蒙特卡罗方法。有了充足的理论准备后，笔者采用 Excel 运用标准蒙特卡罗方法和对偶变量方法计算了欧式期权，采用 MATLAB 运用标准蒙特卡罗方法和对偶变量方法、准蒙特卡罗方法计算了欧式期权；还运用最小二乘蒙特卡罗方法计算了经典美式期权；最后采用 C++ 与 Excel-Addin 运用蒙特卡罗方法模拟了一些主要的随机过程，这为运用蒙特卡罗方法计算复杂期权奠定了基础。第五章是蒙特卡罗方法的提高篇，首先笔者运用准蒙特卡罗方法和控制变量方法给算式平均亚式期权定价；然后采用 C++ 与 Excel-Addin 计算结构化产品——自动赎回票据的价格。第六章详细阐述了显性差分和隐性差分方法，讨论了差分方法的截断误差和稳定性问题。在数值实验方面，本章采用 Excel 运用显性差分方法计算了欧式期权和美式期权价格；采用 MATLAB 运用显性差分和隐性差分方法计算欧式期权和美式期权价格；采用 C++ 与 Excel-Addin 运用有限差分方法计算了欧式期权并进行了误差分析。第七章内容是本教程中比较有难度的部分，主要阐述随机波动率和局部波动率模型。这两个模型已经超越了 B-S-M 模型的框架，符合金融市场波动率不为常数的现象。这两个模型也是业界估计波动率时常用的模型。接下来笔者运用 C++ 与 Excel-Addin 依次进行了随机波动率模型下的隐含波动率拟合实验和实证检验，基于局部波动率模型的隐含波动率的拟合实验和实证检验。第八章是基于 Excel 和 MATLAB 的期权软件界面的设计。Excel 中的期权计算软件更像是一个期权计算器，而 MATLAB 中主要是利用它的 GUI 进行设计。计算机编程好的学生可以学习 GUI 并设计出自己的期权软件计算界面。由于教程主要面向财经类本科生及硕士研究生，为了降低教程的难度，就需要以失去一定的严谨性作为代价，因此这本教程无法达到类似金融随机分析教材的难度，也低于一些面向理工科学生的金融资产定价相关教程的难度，敬请理解。由于教材整合了笔者及其指导的硕士研究生最新取得的研究成果，因此有部分内容有一定难度。这部分内容的安排旨在开拓学生视野，并不要求学生全部掌握，也不要求学生的编程实现。请使用教材的老师和学生区别对待。

本教材由宋斌任主编，参加编写的有：宋斌、王欢、刘冰、梁恩奇、田祎佳，第一章；宋斌、孙晓虹、王欢、刘冰、梁恩奇，第二章；宋斌、王欢、刘冰、梁恩奇、王斯燕，第三章；刘冰、王欢、梁恩奇、彭桓、李一杭，第四章；张冰洁、彭桓、赵素风、魏琳，第五章；宋斌、周湛满、张冰洁、刘黎黎、李隽，第六章；宋斌、梁恩奇、罗亦楠、吕莹、张云鹏，第七章；宋斌、刘冰、王欢，第八章。全教材由宋斌进行总体章节安排并修改定稿。本教材在编写过程中，参考了国内外经典、前沿的专著、教材及参考书，在此表示感谢。限于作者水平，教材中难免存在疏漏和错误，敬请读者批评指正。

为了便于老师在实验课中使用本教材，也为了给学生在建模编程计算中提供参考，本教程所涉及的大多数代码已经在教材正文或附录中给出。这里需要指出的是笔者并不希望学生为了交实验作业简单复制代码，而是想起到抛砖引玉的作用，若是读者找到了更好的建模方法，写出了更为高效简洁的代码，设计出了好看的基于 Excel 或 MATLAB 的界

面,可以发送到作者邮箱 selviasong@163.com,用于教材的后续修订。若被采纳,您也将是我们修订后教材的参编人员。当然也欢迎您把关于教材的其他意见和建议发送至该邮箱,笔者一定会认真阅读,及时回复。

本教程是中央财经大学国家级实验教学示范中心系列实验教材,同时也是管理科学与工程学院实验课程建设的重要组成部分,在写作过程中得到了管理科学与工程学院李文斌院长、贺小海书记、刘志东副院长、贾传亮副书记的大力支持和帮助,同时也得到了中央财经大学经济与管理实验教学中心的大力支持和帮助,在此一并表示感谢!

实验所需数据可以从清华大学出版社网站下载。

编　者

2013.12.10

Contents 目录

第1章

二叉树期权定价的数值实验

通过二叉树期权定价模型的数值实验，进一步强化学生对二叉树期权定价模型的理解，使学生不但能够掌握期权定价理论方法，并能够熟练手工计算，而且还可以在二叉树期权定价模型期数较多、手工计算根本无法完成的情况下，通过软件及自主编程来进行该模型的计算，而在现代经济和金融环境下，随着计算成本的不断下降、期权定价模型的日益复杂，无论是研究领域还是业界，期权定价模型都是通过软件和编程来计算的，因此这些算法实现技能是学生适应现代社会，特别是从事相关领域研究和实际工作必不可少的。

考虑到学生不同的计算机能力和编程偏好，本章的模型实现采用 Excel、MATLAB 和C++三种金融领域主流建模工具依次实现。衍生品定价，一方面需要高效快速的代码；另一方面又要兼顾代码开发的速度。在衍生品定价的研究与实务中，常用的编程语言有以下三种。

1. Excel/VBA：Excel/VBA 是微软为 Office 用户开发的一种基于 Visual Basic 语言的、可在 Office 软件上直接运行的编程语言。用户可以通过在 Office 中内置的 VBA 编辑器直接编写宏或者函数，并在 Excel 中调用。使用 Excel/VBA 的优点是开发速度快、检验方便，缺点是大量使用 VBA 会使表格速度变慢。

2. MATLAB：MATLAB 是由 MathWorks 推出的用于数值计算、可视化及编程的高级语言和交互式环境。MATLAB 由于其矩阵运算能力强、编程开发速度快等特性也备受金融开发人员青睐。

3. C/C++/C#：C 语言是一种通用的计算机语言，广泛应用于系统和应用软件的开发。C++在 C 语言基础上实现了面向对象的特点。C 类语言由于其高效、灵活、功能丰富、表达力强、移植性强等特性，在金融行业中使用广泛。

本章主要研究二叉树模型——CRR 模型的算法实现，将主要通过 Excel、MATLAB 和C++与 Excel-Addin 结合使用三种主流方法来实现。Excel 简单直观，运用宏后功能也很强大，对于不太喜欢编程的读者来说更适合。MATLAB 是主流科学计算软件，有强大的金融工具箱支撑，近年来在财经领域占有率越来越高，特别适合有编程背景，现在或将来从事金融工程、量化投资等领域的读者学习掌握。C++与 Excel-Addin 结合使用，不但保证了计算的速度，是目前金融、量化投资领域的主流编程语言，有强大的函数库的支持，而且 Excel-Addin 的使用更利于结果的清晰展示，便于非编程人员的使用。

1.1 理论基础

1.1.1 无套利均衡分析与状态价格定价技术

无套利均衡分析的出现具有里程碑的意义，它标志着金融学和经济学的正式分离，是金融学从经济学中独立出来的标志。无套利均衡分析是衍生品定价的核心思想，起源于1958年提出的MM理论，在推导无税情况下有财务杠杆和无财务杠杆企业的价值时，米勒和莫迪里亚尼用自制财务杠杆复制了企业的财务杠杆，从而得出在无税情况下有财务杠杆和无财务杠杆企业的价值相同，进一步得出无税情况下资本结构与企业价值无关的结论。由此可见，无套利均衡分析起源时就是运用复制的手段来体现的。在MM理论的推导中由于复制是一次性的，因此称为静态复制。但是更多的时候我们需要描述标的资产价格的动态变化，引入动态模型，这时就需要动态复制技术。在随后的章节里我们阐述的都是动态复制。

严格的状态价格过程需要给出与之相关的一系列数学背景知识与假设条件。我们这里仅给出最简要的版本。设$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为一个装备了$\sigma$-代数流的概率空间，设$\mathcal{F}$是一个递增的$\sigma$-代数，也就是域流，可看做到时间$n$为止所获得的信息。随着时间的推移，所获得的信息越多，因此有

$$\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}, \quad n = 0,1,\cdots,N-1$$

由此可见这种信息结构具有不断扩展的树图的特征。这里的N就是这种“树”的末期。而通俗地讲，状态价格过程就是用来描述资产价格动态变化的过程，也就是构造树形图的过程。这里我们假设资产价格在未来只有两种变化状态：上升或是下降，上升用u来表示，下降用d来表示。假设有一个金融市场，模型为一期模型（严格地说，一期模型中的复制也是静态复制，这里之所以选择一期模型是为了计算的简便，而多期模型也并不复杂，是单期模型的自然扩展，在后续的算法实现章节，我们处理的都是多期模型），市场上有两种风险资产，均为债券，其中债券A的初始价格为$P=100$，设$u=1.25$，$d=0.8$，则债券在一段时间$\Delta t=0.25$后的价格变化如图1-1所示：

假设债券P_B在一段时间$\Delta t=0.25$后的价格变化如图1-2所示：

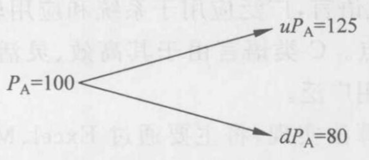

图1-1　债券A的价格变化

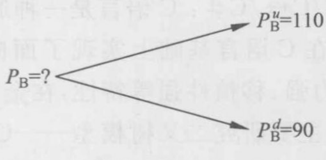

图1-2　债券B的价格变化

那么债券B期初的价格究竟是多少？假设无风险证券的利率为4%，采用连续复利计算。在对债券B进行定价之前，我们给出基础证券的概念。基础证券又称阿罗-德布鲁证券，是一种虚拟的证券，它在状态价格定价技术过程中起着关键的作用。每次我们介绍阿罗-德布鲁证券并运用该证券进行动态复制时，都深深地折服于这一概念的构想者，

真是简洁而又精妙。其中既蕴含了金融市场完备性的内容，即两种状态需要两种证券复制这一朴素思想，又似乎还透露着二进制的意味，当世界复杂多变时，也许最好的出发点就是先研究两种状况。阿罗-德布鲁证券是一组证券，一般记为 π_u 和 π_d，π_u 和 π_d 好似一对开关型证券。其状态价格变化如图 1-3 和图 1-4 所示：

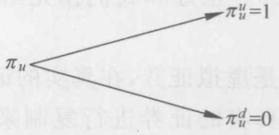

图 1-3 基础债券 π_u 的价格变化

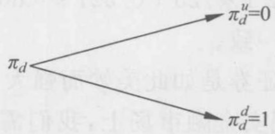

图 1-4 基础债券 π_d 的价格变化

现在我们需要运用这两个基础证券去复制债券 A。我们所说的复制指的是对现金流量的复制。构造组合 V 如下：$\pi_u \times uP_A + \pi_d \times dP_A$。组合 V 的状态价格变化如图 1-5 所示：

由图 1-5 可知，组合 V 复制了债券 A 的期末现金流量。由无套利原理可知，当组合 V 在期末等于债券 A 的期末现金流量时，期初两者的价值也应该相等。否则就会有套利发生。由此可知：

$$\begin{cases} \pi_u \times uP_A + \pi_d \times dP_A = P_A \\ \pi_u \times u + \pi_d \times d = 1 \end{cases} \tag{1-1}$$

由于有两个未知数而只有一个方程，因此无法求出 π_u 和 π_d。现考察另一组合 $\pi_u + \pi_d$ 的 V^*，如图 1-6 所示：

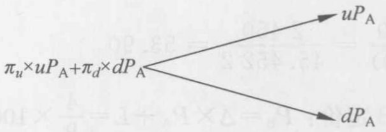

图 1-5 基础债券 π_u 的价格变化

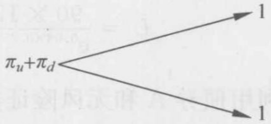

图 1-6 组合 V^* 的价格变化

由图 1-6 可知无论是上升状态还是下降状态，组合 V^* 的价值均等于 1，由此可见组合 V^* 是无风险证券，于是得到另一个方程：

$$(\pi_u + \pi_d) \times e^{r\Delta t} = 1 \tag{1-2}$$

联立方程(1-1)和(1-2)，可以求得

$$\pi_u = \frac{e^{r\Delta t} - d}{e^{r\Delta t}(u-d)} \tag{1-3}$$

$$\pi_d = \frac{u - e^{r\Delta t}}{e^{r\Delta t}(u-d)} \tag{1-4}$$

代入式(1-3)和式(1-4)中可得

$\pi_u = 0.4621$ 和 $\pi_d = 0.5279$。有了 π_u 和 π_d 这两个基础证券，我们就可以为由这两个基础证券“统治”的金融市场上的任何证券定价。这里需要指出的是，虽然 π_u 和 π_d 是由债券 A 的价格推导出来，但 π_u 和 π_d 是独立于债券 A 的。如果把 π_u 和 π_d 比作两个点的话，两点决定一条直线。而这里的“直线”就是指由基础证券所控制的金融市场。也就是

说一对 π_u 和 π_d 控制一个金融市场，为其上的资产定价，换一组 π_u 和 π_d 控制的则是另一个不同的金融市场。当然这里所说的金融市场是理论上的金融市场而不是实际的金融市场。现在我们利用 π_u 和 π_d 为债券 B 定价：$P_{\mathrm{B}}=\pi_u\times P_{\mathrm{B}}^u+\pi_d\times P_{\mathrm{B}}^d=0.4621\times110+0.5279\times90=98.34$。我们再用 π_u 和 π_d 的值来验证一下债券 A 的价格：$P_{\mathrm{A}}=\pi_u\times P_{\mathrm{A}}^u+\pi_d\times P_{\mathrm{A}}^d=0.4621\times125+0.5279\times80=99.99\approx100$。正好和我们预先给定的债券 A 的初始价格 100 一致。

虽然基础证券是如此美妙而强大，但毕竟它们是虚拟证券，在真实的证券市场上无法找到，因此在现实金融市场上，我们需要寻找其他真实的证券进行复制来为其他证券定价。在上述为债券 B 定价的过程中，自然而然我们会想到价格已知的债券 A，而另一个债券我们选择无风险证券 L。构造组合 V 如下：$\Delta\times P_{\mathrm{A}}+L$ 复制债券 B 的现金流量，从而得到如下方程组：

$$\begin{cases}\Delta\times uP_{\mathrm{A}}+\mathrm{e}^{r\Delta t}\times L=P_{\mathrm{B}}^u\\ \Delta\times dP_{\mathrm{A}}+\mathrm{e}^{r\Delta t}\times L=P_{\mathrm{B}}^d\end{cases}\tag{1-5}$$

解方程组(1-5)可以求得

$$\begin{cases}\Delta=\dfrac{P_{\mathrm{B}}^u-P_{\mathrm{B}}^d}{P_{\mathrm{A}}^u-P_{\mathrm{A}}^d}\\ L=\dfrac{P_{\mathrm{B}}^d\times P_{\mathrm{A}}^u-P_{\mathrm{B}}^u\times P_{\mathrm{A}}^d}{\mathrm{e}^{r\Delta t}\times(P_{\mathrm{A}}^u-P_{\mathrm{A}}^d)}\end{cases}\tag{1-6}$$

代入式(1-6)中可得

$$\Delta=\frac{110-90}{125-80}=\frac{4}{9}=0.4444$$

$$L=\frac{90\times125-110\times80}{\mathrm{e}^{0.04\times0.25}\times(125-80)}=\frac{2450}{45.4522}=53.90$$

现在我们利用债券 A 和无风险证券 L 为债券 B 定价：$P_{\mathrm{B}}=\Delta\times P_{\mathrm{A}}+L=\frac{4}{9}\times100+53.90=98.34$。由此可见，无论是利用基础证券 π_u 和 π_d 还是利用债券 A 和无风险证券 L 都可以得到相同的债券 B 的价格。以后我们将采用真实金融市场中的金融工具来复制其他金融工具，从而对其定价。

1.1.2 动态复制方法

现在我们要将状态价格定价技术中的动态复制方法用于期权定价。如果不特别指出，本章研究的都是欧式看涨期权。由于仅考虑上升和下降两个状态，状态价格过程看上去像一个具有两个枝杈的树形图，因此这种期权定价的离散模型一般被称为二叉树模型。期权的二叉树定价模型有很多种，当研究的模型是多期模型时，如果先上升后下降和先下降后上升交汇于一点的话，我们就把这样的二叉树模型称为交叉树。对于一个 n 期模型来说，树的交叉使得最后一期树的节点的数量为 $n+1$，这使得树的状态增加得比较慢，从而在计算成本上有优势。

假设是 B-S 市场，也就是有一种风险资产股票和一种无风险证券。现在我们研究一个二期模型。假设股票价格的变化如图 1-7 所示，期权的执行价格为 28，无风险利率 $r_f=$

4%，连续复利，期权的有效期 $T=0.5$ 年，现在利用动态复制方法给欧式看涨期权定价。

与在前面所使用的动态复制一样，复制的核心是现金流，在对期权定价时，复制的是终端支付(payoff)，因为在期权定价中终端支付是确定的，而期初价格是不确定的，期权也被称为“未定权益”的原因就在于此。因此期权定价是倒向问题，这一特征在二叉树模型中有充分体现。为了清楚明了，图 1-8 给出了期权的终端支付。

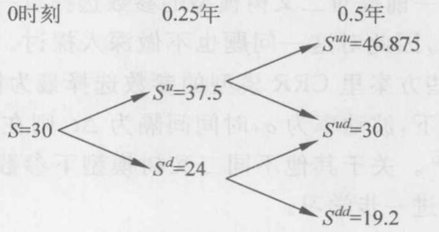

图 1-7　股票 S 的价格变化

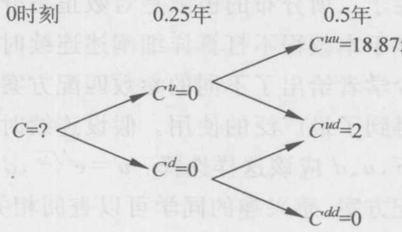

图 1-8　期权的终端支付示意

在为期权 C 定价的过程中，与前面的做法一致，我们选择标的资产 S 和无风险证券 L。构造组合 A 如下：$\Delta\times P_A+L$ 复制期权的终端支付。这里我们先从右上方的树开始做起，得到如下方程组：

$$\begin{cases}\Delta^u\times S^{uu}+\mathrm{e}^{r\Delta t}\times L^u=C^{uu}\\ \Delta^u\times S^{ud}+\mathrm{e}^{r\Delta t}\times L^u=C^{ud}\end{cases}\tag{1-7}$$

解方程组(1-7)可以求得

$$\begin{cases}\Delta^u=\dfrac{C^{uu}-C^{ud}}{S^{uu}-S^{ud}}\\ L^u=\dfrac{u\times C^{ud}-d\times C^{uu}}{\mathrm{e}^{r\Delta t}\times(u-d)}\end{cases}\tag{1-8}$$

将数据带入(1-8)中可得

$$\begin{cases}\Delta^u=\dfrac{18.875-2}{46.875-30}=1\\ L^u=\dfrac{1.25\times 2-0.8\times 18.875}{\mathrm{e}^{0.04\times 0.25}\times 0.45}=\dfrac{-12.6}{0.454\,5}=-27.72\end{cases}$$

由此可得 $C^u=\Delta^u\times S^u+L=1\times 37.5-27.72=9.78$。同理，我们可以得到

$$\Delta^d=\frac{2-0}{30-19.2}=0.185\,2$$

$$L^d=\frac{1.25\times 0-0.8\times 2}{\mathrm{e}^{0.04\times 0.25}\times 0.45}=\frac{-1.6}{0.454\,5}=-3.52$$

由此可得 $C^d=\Delta^d\times S^d+L^d=0.185\,2\times 24-3.52=0.924\,4$。进一步计算可以得到

$$\Delta=\frac{9.78-0.924\,4}{37.5-24}=0.656\,0$$

$$L=\frac{1.25\times 0.924\,4-0.8\times 9.78}{\mathrm{e}^{0.04\times 0.25}\times 0.45}=\frac{-6.668\,4}{0.454\,5}=-14.67$$

由此可得 $C=\Delta\times S+L=0.656\,0\times 30-14.67=5.01$。

动态复制方法用于期权定价到此似乎告一段落，但故事还没有结束。在前面介绍二叉树模型中有一个非常关键的问题还没有解决，那就是 u、d 如何选择，是不是只需要满足无套利条件 $d<e^{r\Delta t}<u$ 就可以了？事情没有这么简单。从期权定价模型的发展来看，我们都知道最先出现的是基于几何布朗运动的连续时间模型即 B-S-M 模型，它出现于 1973 年。而目前我们最常用的二叉树模型——CRR 模型其实出现于 1979 年，它的理论基础在于二项分布的极限是对数正态分布。这一前提对二叉树模型的参数选择有一定制约。鉴于本教程不打算详细阐述连续时间模型，因此对这一问题也不做深入探讨。已经有不少学者给出了不同的参数匹配方案，在这些方案里 CRR 模型的参数选择最为简单，因此得到了最广泛的使用。假设连续时间模型下，波动率为 σ，时间间隔为 Δt，则在 CRR 模型下，u、d 应该这样选择：$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$，$d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$。关于其他不同二叉树模型下参数的不同匹配方案，感兴趣的同学可以查阅相关文献，进一步学习。

1.1.3 风险中性定价方法

本部分阐述的是 CRR 模型的风险中性定价方法。在不少衍生品定价的经典教材中，为了降低数学难度，多从动态复制方法的数学变形引出风险中性定价，然后直接给出风险中性概率的定义和计算公式。这样的处理方法的确有一定的好处，绕过了很多艰深的数学概念。但在多年的教学过程中我们发现这样处理的直接后果就是绝大多数同学认为风险中性定价方法是动态复制方法的数学简便运算解决途径，这实在是大大扭曲了风险中性定价方法的本质和地位。这里我们试图用简洁的语言、用最少的篇幅给出风险中性定价方法的真实全貌。在这一过程中鞅（这里指的是离散鞅）和金融资产定价基本原理是最核心的内容。

1. 鞅

设$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为一个装备了 σ-代数流的概率空间，设$\mathcal{F}$是一个递增的 σ-代数。如果 $\forall n$，S_n 关于$\mathcal{F}_n$可测（简记为 $S_n\in\mathcal{F}_n$），则称$\{S_n:n\geqslant 0\}$是适应的。对于适应过程我们写为$(S_n,\mathcal{F}_n)$，$n\geqslant 0$。如果 $\forall n$，$S_n\in\mathcal{F}_{n-1}$，则称 S_n 是可料的。关于可测、可料等概念的详细内容，感兴趣的同学可以查阅任何一本随机分析的书籍，这里不再详述。

下面给出鞅的定义。称$(S_n,\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$为鞅（上鞅，下鞅），如果 $\forall n$，S_n 可积，且

$$E(S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=S_n\quad(\text{相应地}，\leqslant S_n，\geqslant S_n)\tag{1-9}$$

假设风险资产股票用 S_n 来表示，无风险证券用 B_n 来表示。而资产的贴现价格过程用$\widetilde{S}_n$ 来表示。等鞅测度 Q 是定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上且满足如下条件的概率测度：

① 对于所有的$\bar{w}\in\Omega$，均有 $Q(\bar{w})>0$ 和 $\sum_{\bar{w}}Q(\bar{w})=1$；

② 对于任一 $n\geqslant 0$，在 Q 测度下，贴现价格过程$\widetilde{S}_n$ 是一个鞅。

2. 金融资产定价基本原理

需要声明的是我们这里给出的金融资产定价基本原理是一个简单版本。这里我们给出的基本原理由三部分组成：

① 对于有限离散时间的金融市场，如果市场无套利，那么存在一个等鞅测度；

② 如果市场是完备的，那么等鞅测度是唯一的；

③ 在这个等鞅测度下，任一风险资产的贴现价格过程都是一个鞅。

如果金融资产定价基本原理成立，那么期权的价格等于等鞅测度下的期望的折现值。

要想运用风险中性定价方法计算二叉树模型 CRR，其关键在于风险中性概率的确定。由于其是离散模型，因此问题还不是很复杂。我们自然而然的出发点就是寻找一个“概率”，虽然这一风险中性概率不是真实概率，但它既然被称为概率，就应该符合概率的基本要求。我们首先想到是它的取值范围应该在 0 和 1 之间。回顾前已述及的在无套利条件下，u、d 应该满足如下条件：

$$d < e^{r\Delta t} < u \tag{1-10}$$

在不等式的两端同时减去的 d，得到

$$0 < e^{r\Delta t} - d < u - d \tag{1-11}$$

在不等式两端同时除以一个正数 $u-d$，得到

$$0 < \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} < 1 \tag{1-12}$$

由式(1-12)可知，$\dfrac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$是一个 0 到 1 之间的数。现在我们将其定义为 p^*。

现在我们需要验证 p^* 是否符合我们的要求，即我们需要寻找的风险中性概率。为了简单起见，我们以一期模型来验证。参数取值和上一节一致。股票价格变化如图 1-9 所示。

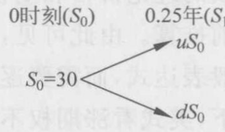

图 1-9 股票价格变化

首先我们验证一下存在性，这比较显而易见，因为这一概率我们已经找到。现在我们验证股票贴现过程是否是鞅。具体分析如下：

$$\begin{aligned} E^*(e^{-r\Delta t}S_1) &= e^{-r\Delta t}E^*(S_1) \\ &= e^{-r\Delta t}\left[\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}\times uS_0 + \left(1-\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}\right)dS_0\right] = S_0 \end{aligned}$$

由此可见，股票贴现价格过程在该概率测度下是鞅。接下来需要验证的是测度的唯一性，假设存在另一个等鞅测度$\bar{p} \neq \dfrac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$，则

$$\begin{aligned} E^*(e^{-r\Delta t}S_1) = e^{-r\Delta t}E^*(S_1) &= e^{-r\Delta t}[\bar{p}\times uS_0 + (1-\bar{p})dS_0] \\ &\neq e^{-r\Delta t}\left[\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}\times uS_0 + \left(1-\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}\right)dS_0\right] \\ &\neq S_0 \end{aligned}$$

由此可知，当$\bar{p} \neq \dfrac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$时，贴现价格过程不是鞅。反证出了该概率测度的唯一性。

到现在为止金融资产定价基本原理的三个条件都已经具备了，因此我们可以使用风险中性定价——鞅定价方法为期权定价，也就是说欧式期权的价格等于风险中性概率测度下期权终端支付的折现值。由于是风险中性概率测度，因此折现率采用无风险利率。继续采用上面给出的参数，风险中性定价过程如下：

① 首先计算风险中性概率：

$$p^* = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d} = \frac{e^{0.04\times 0.25}-0.8}{1.25-0.8} = \frac{0.210\,05}{0.45} = 0.466\,8$$

② 接着计算期权的价格：

$$\begin{aligned}C &= e^{-2r\Delta t}[p^{*2}C^{uu}+2p^{*}(1-p^{*})C^{ud}+(1-p^{*})^{2}C^{dd}]\\ &= 0.9802\times(0.2179\times18.875+0.9956+0)\\ &= 0.9802\times5.1085\\ &= 5.01\end{aligned}$$

通过风险中性定价方法得到的欧式看涨期权的价格为5.01，和前面运用动态复制定价得到的欧式看涨期权的价格一样。与动态复制方法相比，风险中性定价方法不但在理论基础上更为高端，从计算形式上也更加简洁优美。因此在离散的二叉树模型计算中，风险中性定价方法更为普遍。下面我们给出一个 n 期二叉树模型的欧式看涨期权风险中性定价的一般表达式：

$$C = e^{-nr\Delta t}\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}p^{*j}(1-p^{*})^{n-j}C^{u^{j}d^{(n-j)}} \tag{1-13}$$

以上我们讨论的都是欧式看涨期权，现在我们探讨美式期权。无论是采用动态复制方法还是风险中性方法都需要在从末期向前推算期权价格的过程中，在每个节点上比较期权的理论价格和期权立即执行的支付的大小，保留较大的那个值，并在此基础上进一步往前推算。由此可见，即使运用风险中性定价方法计算美式期权，也不能采用式(1-13)的一般表达式，而需要逐步计算。这里需要指出的是理论上可以证明，在没有股利支付的情况下，美式看涨期权不会提前实施，因此美式看涨期权价格和欧式看涨期权的价格相等。但是在股价较低的情况下，美式看跌期权会提前实施，因此美式看跌期权的价格大于欧式看跌期权。由于在后面的算法实现中我们将系统计算欧式期权和美式期权的价格，这里就不再给出计算美式期权的例子。

1.2 基于Excel的二叉树期权定价的数值实验

1.2.1 实验目的

要求学生使用Excel运用动态复制和风险中性定价两种方法分别计算二叉树模型框架下的欧式看涨期权、欧式看跌期权、美式看涨期权、美式看跌期权。要求学生使用Excel计算B-S-M模型框架下的欧式看涨期权、欧式看跌期权并与二叉树模型计算结果进行对比分析。

1.2.2 编程准备——Excel部分功能要点

Excel中的函数其实是一些预定义的公式，它们使用一些被称为参数的特定数值按特定的顺序或结构进行计算。用户可以直接用它们对某个区域内的数值进行一系列运算。下面给出一些算法实现中需要调用的主要函数：

1) IF函数

【主要功能】 根据对指定条件的逻辑判断的真假结果，返回相对应的内容。

【使用格式】 IF(Logical,Value_if_true,Value_if_false)