高等学校经典教材“三点”丛书

经济应用数学基础（二）

线性代数

（人大·第四版）

重点 难点 考点辅导与精析

主编 张剑湖 高淑萍

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$$

西北工業大學出版社

高等学校经典教材“三点”丛书

经济应用数学基础(二)

线性代数

(人大·第四版)

重点　难点　考点　辅导与精析

主编　张剑湖　高淑萍

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是与《经济应用数学基础(二)·线性代数》(赵树嫄主编,第四版,中国人民大学出版社)相配套的教学辅导用书.全书内容共分5章,每章5个版块,分别是"重点及知识点辅导与精析""难点及典型例题辅导精析""考点及考研真题辅导与精析""课后习题解答""同步自测题".在对基本知识进行归纳、提炼和梳理的基础上,通过对典型例题及考研真题的详解与分析、解题方法的系统归纳,帮助读者深入掌握学习的重点、难点、易混淆的知识点及考研要点,对教材内容融会贯通,提高综合解题能力.

本书可作为高等院校文科和经管类专业线性代数课程的学习参考书及考研强化复习的指导书,也可作为教师的教学参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数重点难点考点辅导与精析/张剑湖,高淑萍主编.—西安:西北工业大学出版社,2014.5

(高等学校经典教材"三点"丛书)

ISBN 978-7-5612-3960-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张… ②高… Ⅲ.①线性代数—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 083274 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072
电　　话:(029)88493844 88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:兴平市博闻印务有限公司
开　　本:727 mm×960 mm 1/16
印　　张:16
字　　数:342 千字
版　　次:2014 年 5 月第 1 版 2014 年 5 月第 1 次印刷
定　　价:33.00 元

前　　言

本书与赵树嫄主编的《经济应用数学基础(二)·线性代数》第四版(中国人民大学出版社)相配套,涵盖了教学大纲和研究生考试大纲所涉及的全部内容. 本书编写思路清晰、逻辑缜密、内容详尽,可作为线性代数课程教学辅导材料和复习参考用书及考研强化复习的指导书,也可以作为“线性代数”课程教师的教学参考书.

本书内容共5章,每章分5个版块:

(1)重点及知识点辅导与精析. 对线性代数的基本知识点进行归纳和提炼,帮助读者梳理清楚各章脉络,释疑学习重点、难点和易混淆的知识点, 加强对课程内容的深入理解.

(2)难点及典型例题辅导与精析. 精选有代表性的例题,方便读者迅速掌握各章的重点和难点,通过对典型例题给予详细的解答和分析,帮助读者梳理解题的思路,更好地掌握线性代数解题方法和技巧,提高应试解题能力.

(3)考点及考研真题辅导与精析. 将重要的知识点和考研要点清晰、准确地提炼出来,并对近年全国硕士研究生数学入学考试题的相关考试真题作了详尽的解答和分析,旨在帮助读者了解、掌握考研方向和考研题型.

(4)课后习题解答. 着眼于读者需要,对教材中习题进行了比较详细的解答,力求循序渐进地帮助读者分析并解决学习中遇到的难题.

(5)同步自测题.帮助读者进一步巩固对线性代数基本知识、基本概念的理解,加强基本运算能力的培养,增强解决问题的能力.

在本书的编写过程中参阅了相关的文献资料,在此表示衷心的感谢.

由于水平有限,难免有不妥之处,欢迎读者及同行批评指正.

编　者

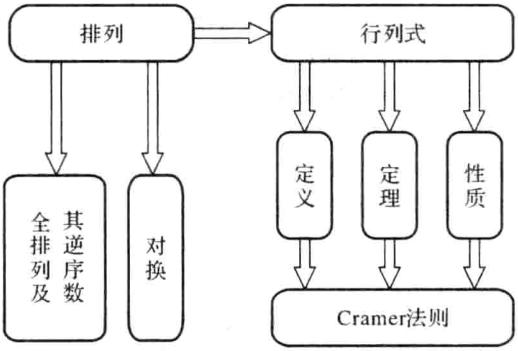
2013 年 12 月

目　　录

第1章

行 列 式

知识结构网络图



1.1 重点及知识点辅导与精析

1.1.1 内容提要

1. 排列与逆序

(1) 由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的无重复的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 个元素的不同 n 级排列共有 $n!$ 个.

(2) 在 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中,如果一个较大的数 i_t 排在一个较小的数 i_s 之前,则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,记作 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数为奇(偶) 数的排列叫做奇(偶) 排列.

(3) 在排列中,将任意两个元素对调,其余元素不动,称为对换. 将相邻两个元素对换叫做相邻对换,对换改变排列的奇偶性.

2. n 阶行列式

(1) n 阶行列式定义为

$$D=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

或

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

n 阶行列式的值是 $n!$ 项的代数和，每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，其一般形式为：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里是把相乘的 n 个元素行标按照自然顺序排列，列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列，共有 $n!$ 个 n 级排列，每个 n 元排列对应一项，因此共有 $n!$ 个项. 这个定义的思想是对二阶与三阶行列式形式的推广，利于理解行列式的性质.

(2) 余子式、代数余子式.

在 $n(n>1)$ 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

把行列式中任意指定 k 行与 k 列的交叉元素组成的子行列式 M（称为 k 阶子式）所在的行与列全部划掉，剩余的元素组成的新行列式，叫 k 阶子式的余子式，用 M_i 表示. 如果再考虑余子式的符号，则称为 k 阶子式的代数余子式，用 A_i 表示.

设行列式 D 的 k 阶子式 M 在 D 中的行标为 $i_1i_2\cdots i_k$，列标为 $j_1j_2\cdots j_k$，则

$$A_i=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M_i$$

(3) n 阶行列式的展开定理.

定理 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

展开定理的实质是“降阶”，在实际计算行列式中有着重要的应用.

推论 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j)$$

得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases},\quad 其中\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

元素的代数余子式与该元素无关，在行列式按某一行元素的代数余子式展开的形式中，代数余子式前面乘以不同的系数就可以得到不同的行列式，即

$$\xrightarrow{\text{第 } i \text{ 行}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ [a_{i1}] & [a_{i2}] & \cdots & [a_{in}]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=[a_{i1}]A_{i1}+[a_{i2}]A_{i2}+\cdots+[a_{in}]A_{in}$$

如果把上述等式两边的中括号里的元素换成不同的值，就变成不同的行列式了.

拉普拉斯(Laplace)定理　在 n 阶行列式中，任意取定 k 行(列)($1\leqslant k\leqslant n-1$)，由这 k 行(列)组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

3. n 阶行列式的性质

(1) $D=D^{\mathrm{T}}$.

(2) 互换行列式的任意两行(列)，行列式改变符号.

(3) 行列式中某行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

推论　行列式中有一行(列)的元素为零，行列式的值为零.

(4) 行列式中有两行(列)元素成比例，则行列式值为零.

推论　若行列式中有两行(列)元素完全相同，行列式的值等于零.

(5) 若行列式的某一行(列)的元素都是两个数之和，则此行列式可以写成两个行列式之和，这两个行列式分别以这两组数作为该行(列)的元素，其余各行(列)与原行列式相同.

推论　如果将行列式某一行(列)的每个元素都写成 m 个数的和，则此行列式可以写成 m 个行列式的和.

(6) 将行列式的某行(列)的 k 倍加到另一行(列)，行列式的值不变.

4. 行列式的运算

(1) 一阶行列式有 $|a|=a$.

(2) 二、三阶行列式满足对角线法则.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

(3) 上、下三角形行列式的值等于主对角元素的乘积.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4) 副对角线一侧全为 0 的行列式的计算：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & 0 \\ & & & \iddots & \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ & & \iddots & & \\ a_{n1} & 0 & & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

(5) n 阶范德蒙(Vandermonde)行列式等于 C_n^2 个因子的乘积.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

5. Cramer 法则

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (\text{简记为 } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b})$$

有以下结论：

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \text{方程组 } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \text{ 有唯一解}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中，$D=|\boldsymbol{A}|$ 为方程组的系数行列式.

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n$$

特别地：

（1）当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为非齐次线性方程组. 当 $D\neq 0$ 时，它有唯一解；当 $D=0$ 时，它可能有无穷多解，也可能无解；

（2）当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为齐次线性方程组. 当 $D\neq 0$ 时，它有唯一零解；当 $D=0$ 时，它有非零解（无穷多解）.

此结论在许多证明问题和判别向量组线性相关性及求向量组的秩时非常有用.

1.1.2 释疑解惑

1. n 阶行列式

（1）n 阶行列式是由 n^2 个数排列成的方阵经过规定的计算方法（所有每行每列恰取一个数做乘积的代数和）而得到的一个数. 当然，如果行列式中含有未知数，那么行列式就是一个多项式. 当两个行列式的值相等时，就可以在它们之间写等号（不必形式一样，甚至阶数可不同）.

（2）行列式的定义：

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

该定义较难理解，可以从二阶、三阶行列式的展开式来理解 n 阶行列式的定义，并注意 n 阶行列式定义式的结构有以下两个特点：

1）D_n 等于它的所有取自不同行、不同列 n 个元素乘积的代数和. 这里的“所有”，是指对所有 n 级排列求和，共有 $n!$ 项.

2）展开式中每个乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面所带有的符号为 $(-1)^{(j_1j_2\cdots j_n)}$，即当行指标成自然排列，而列指标所成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，该乘积项前面带正号，否则带负号. 若每个乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 写成 $a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$，便是行列式的一个等价定义。

2. 行列式的计算

（1）行列式的主要问题就是计算行列式的值，对四阶及四阶以上的行列式如果沿用

“对角线法则”计算，会出现错误. 例如计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24$$

其错误就在于将对角线法则应用到四阶行列式中了. 按照行列式的定义，该行列式中除 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项外，其余的项全为零，而这一项的符号应该是 $(-1)^{N(4321)} = (-1)^6 = 1$. 因此正确的解法是

$$\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix} = 24$$

(2) 计算行列式的基本方法是运用行列式性质，化简所给行列式再进行计算. 对 n 阶行列式的计算，其基本方法和技巧是“化零”和“降阶”.

1) 直接法：利用行列式的定义及性质进行计算；

2) 特殊行列式：利用行列式的性质化为上、下三角行列式及范德蒙行列式；

3) 降阶法：利用按行(列)展开定理化行列式为较低阶行列式的计算；

4) 归纳法：应用行列式的性质，把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式的递推关系式，再根据此关系式递推求得所给 n 阶行列式的值.

这些方法是最基本的方法，应该在实际的练习过程中，认真体会，掌握要领.

3. 范德蒙行列式

范德蒙行列式从列的角度看，每一列元素从上至下依次恰为某个数值的 0 次幂，1 次幂，…，$n-1$ 次幂；从行的角度看，第一行元素都是 1，第二行为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，从第三行开始，每个元素都比上一行对应元素高一次幂，要记住范德蒙行列式这些特点. 范德蒙行列式为零的充要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 这 n 个数中至少有两个相等.

4. 关于 Cramer 法则

(1) 用 Cramer 法则求解方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有两个前提：

1) 方程的个数等于未知量的个数；

2) 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不等于零.

特别要记准公式中各行列式的构成规律.

(2)Cramer 法则推论的实质，即 n 个方程、n 个未知数的齐次线性方程组有非零解的充要条件是其系数行列式为零.

(3) 用 Cramer 法则求解方程组实际上相当于用逆矩阵的方法求解线性方程组，即 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$，它建立了线性方程组的解与其系数和常数项间的关系.

(4)Cramer法则常用于理论证明，但是对于具体的线性方程组求解，需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，计算量较大，往往用初等变换的方法更为有效.

1.2　难点及典型例题辅导与精析

n 阶行列式的定义是本章的一个难点.行列式的定义虽然难于理解，但对于许多特殊行列式的某些项及值的确定用此定义会非常方便.

按定义计算一个 n 阶行列式计算量很大，并且每一项前面所带符号确定也很烦琐，从而，按定义计算一般是不可能的，所以掌握行列式的基本计算方法是本章的重点.计算行列式的基本方法有下述工作.

(1) 利用行列式的性质将行列式化成比较易于计算的行列式(例如化成上(下)三角行列式就是一个常用的方法).

(2) 利用行列式的展开定理，将高阶行列式化成低阶行列式来计算.

在实际应用中，往往将以上两种方法交替使用.行列式的具体计算方法，又常常因问题而异，所以行列式的计算，特别是高阶行列式及元素中含有字母的行列式的计算，又是本章的一个难点.

行列式的计算是行列式的性质及展开定理的综合应用，有一定的难度，技巧性较强，方法也很多.学习的时候首先要深入理解行列式的性质及展开定理；其次要多体会、总结，学习例题中的计算方法，仔细领会其中的奥妙，灵活运用.在学习中应该通过练习积累经验，举一反三，逐步提高计算能力.

克莱姆法则是线性方程组理论中的重要结论，利用它可以简捷地表示线性方程组的解，还可以在不求解的情况下判断方程组解的情况.但必须注意其两个条件：一是方程组的系数组成 n 阶行列式，二是系数行列式不为零.

在线性代数中，行列式是一个非常有用的工具.求解线性方程组、判断矩阵可逆及求逆矩阵、判断向量组的线性相关性、求矩阵的特征值、判断二次型的正定性等方面都要用到行列式的相关知识.

例1　试确定 $2n$ 级排列 $1\ 3\cdots(2n-1)2\ 4\cdots(2n)$ 的逆序数.

解　此排列的前 n 位元素之间没有逆序对.第 $n+1$ 位元素2与它前面的 $n-1$ 个数构成逆序对，故其逆序为 $n-1$；第 $n+2$ 位元素4的逆序数为 $n-2$；…；末位元素 $2n$ 的逆序数为0，故此排列的逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+0=\frac{1}{2}n(n-1)$$

【注】　求一个排列的逆序数通常有两种方法：① 按排列的次序分别算出每个数的后面比它小的数的个数，然后求和.② 按自然数的顺序分别算出排在前面比它大的数的个数，再求和.

例2　计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

解 因为在行列式 D_n 中除了第 n 行外，其余的每一行只有一个非零元素，由 n 阶行列式的定义可知，D_n 只含一项 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_{n1}$. 其中元素的下标（第 n 个数 a_{n1} 的第一个下标）正好是它们的行指标，已是一个标准的排列，而它们所在列的下标构成的排列为 $23\cdots n1$，这个排列的逆序数$(23\cdots n1)=n-1$，故 $D_n=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_{n1}$.

例 3 计算 4 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

[分析] 为了计算的简便，我们往往选择含零比较多的行或列将行列式展开. 在此题中，第 2 列只有一个非零元素，可以考虑按第 2 列展开.

解法 1

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 2 列展开}}(-1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{提取第 2 列公因子 2}}$$

$$-2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}-2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 2 列展开}}$$

$$-2\times1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix}=2[1\times0-3\times(-2)]=12$$

【注】 对于阶数较高的行列式，在一般情况下，按行（列）展开并不能减少计算量，仅当行列式中某一行（列）含有较多零元素时，它才能发挥真正的作用. 因此，在许多情况下，应用按行（列）展开法时，先利用行列式的性质将某一行（列）化为有较多的零元素的行（列），再按该行（列）展开.

r_i+kr_j 表示把矩阵的第 j 行的 k 倍加到第 i 行，c_i+kc_j 表示把矩阵的第 j 列的 k 倍加到第 i 列，$r_i\leftrightarrow r_j$ 表示矩阵的 i，j 行互换，$c_i\leftrightarrow c_j$ 表示矩阵的 i，j 列互换.

[分析] 利用行列式的性质将其化成特殊行列式（如上三角形行列式）以简化计算.

解法 2

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_1}-\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_1}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2, r_4 + r_2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + 2r_3}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \times 1 \times (-2) \times 6 = 12$$

【注】 利用行列式的性质将原行列式化为上(下)三角形行列式或对角形行列式，这是计算行列式的基本方法之一.其方法技巧是：利用第一行第一列位置上的元素将第一列除第一个元素外全化为零，然后利用第二行第二列位置上的元素将第二列除前两行元素外全化为零，以此类推，即可将原行列式化为上三角形行列式.值得注意的是，应尽量将数值较小的元素(例如1或−1等)调换到主对角位置上，以简化行列式的化简过程.

特别地，对于元素是数字的行列式，总可以利用性质将行列式化成上三角行列式.

例4 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(d-a) \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2(b+a) & c^2(c+a)-b^2(b+a) & d^2(d+a)-b^2(b+a) \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c^2+bc+b^2)+a(c+b) & (d^2+bd+b^2)+a(d+b) \end{vmatrix} =$$

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

【注】 这个行列式也可以用例 6 的方法构造范德蒙行列式来计算.

例 5 计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

[分析] 利用行列式的性质 $D=D^{\mathrm{T}}$.

解

$$D^2=DD^{\mathrm{T}}=$$

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & & & \\ & a^2+b^2+c^2+d^2 & & \\ & & a^2+b^2+c^2+d^2 & \\ & & & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}=$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

又 a^4 的系数为 1,故得

$$D=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

【注】 此方法计算行列式的关键在于观察原行列式的行与其转置行列式的列的特点.

例 6 证明:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}=(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(x_j-x_i)$$

[分析] 这个行列式与范德蒙行列式很接近,它缺少一项,可用加边的方法构造范德蒙行列式来论证.

证 构造行列式:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & y^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & y^3 \end{vmatrix}$$

由于 D_1 是范德蒙行列式,则

$$D_1=(y-x_1)(y-x_2)(y-x_3)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(x_j-x_i)=$$

$$[y^3-(x_1+x_2+x_3)y^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)y-x_1x_2x_3]\times$$

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(x_j-x_i) \qquad (1-1)$$

又因为 D_1 的值可按第 4 列展开计算,即