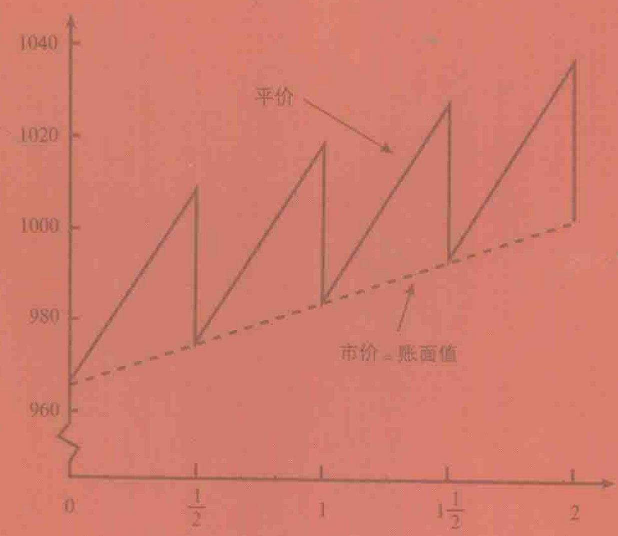
中国精算师资格考试用书

金融数学

FINANCIAL MATHEMATICS

中国精算师协会　组编



中国财政经济出版社

中国精算师资格考试用书

金 融 数 学

Financial Mathematics

主编 徐景峰

主审 杨静平

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

金融数学／徐景峰主编．—北京：中国财政经济出版社，2010.11
中国精算师资格考试用书
ISBN 978－7－5095－2557－9

Ⅰ．①金…　Ⅱ．①徐…　Ⅲ．①金融－经济数学－资格考核－自学参考资料　Ⅳ．①F830

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第200876号

责任编辑：郑保华　　　　责任校对：徐艳丽
封面设计：耕者设计　　　　版式设计：兰　波

中国财政经济出版社出版

URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100142
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092毫米　16开　19.5印张　462000字
2010年11月第1版　2013年1月北京第3次印刷
定价：43.00元
ISBN 978－7－5095－2557－9/F·2175
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010－88190744

编审委员会

总　　序

ZONGXU

精算起源于保险业，是保险公司经营不可或缺的核心技术之一。保险公司只有运用精算技术进行保险产品定价、准备金评估、风险管理等，才能在科学基础上实现保险业务的稳健经营，有效防范风险。

我们常说的精算，包括三个方面，即：精算理论技术、精算规则和精算师资格认证。

精算理论是对保险业务经营中各种不确定因素和风险规律的认识，精算技术以精算理论为指导，是精算工作中对各种不确定因素和风险进行识别、评估、定价、处置等所采用的方法、技术，包括所使用的数学模型、数学工具等。随着保险业经营实践的发展和人们认识的深化，精算理论技术也在不断发展。精算理论技术属于学术研究的范畴，可以存在不同的观点和流派，各种不同观点和流派之间的讨论、交流，可以促进精算理论技术的发展。

精算规则，是保险监管机关制定或认可的关于精算工作应当遵循、遵守或采用的原则、方法、标准、制度等规范。制定精算规则，以精算理论技术为基础，又要综合考虑一定时期的经济环境、保险业发展状况和风险特征、精算技术力量、监管政策的要求等多种因素。

精算工作需要专业人员从事，精算师就是具备精算的知识、技能，从事精算工作的专业技术人员。虽然精算师的从业范围不限于保险业，但主要还是在保险及相关行业就职（如对保险公司的精算报告进行审核的会计师事务所，为保险公司服务的精算咨询公司等）。在保险公司中，精算师责任重大。因此，必须经过资格认证，才能担任精算师（如同律师、注册会计师需要资格认证）。在国外，精算师资格的取得一般有两种方式：一种是通过专业资格考试取得，另一种是经过学历教育后取得，但主流是通过考试取得。在发达国家，精算师有自己的专业团体——精算师协会，一般由精算师协会组织资格考试，对通过考试的人授予精算师资格。

精算理论技术、精算规则、精算师资格认证三者相互联系，密不可分：精算理论技术是基础，制定精算规则、考试认证精算师，均以精算理论技术为基础，精算规则是精算师从事精算实务的直接依据。

我国自1980年恢复办理国内保险业务之后，曾长期缺乏精算专业人才，既没有制定精算规则，也没有建立自己的精算师资格考试认证制度。1988年南开大学在北美精算协会的支持下开办精算专业教育，此后国内又有多所大学开办精算专业教育，培养了一批精算人才。由于当时中国没有精算师资格认证制度，这些国内学习精算的人员主要是考取北美和英国等国外的精算师资格。1992年，国内的保险市场对外开放，外资保险公司进入国内市场，一些具有国外资格的精算师到国内工作。

1995年颁布并施行的《中华人民共和国保险法》中，要求寿险公司必须聘用经金融监管部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度。《保险法》首先要求寿险公司聘用精算师、建立精算报告制度，是因为：第一，精算起源于寿险业务经营，精算技术在寿险业的应用较为成熟；第二，寿险业务期限长，风险更具隐蔽性，对精算技术的运用更为迫切和重要，第三，在精算专业人员严重不足、精算规则空白的条件下，同时要求寿险业和非寿险业聘用精算专业人员、建立精算报告制度，难以实现。

为此，当时的保险监管部门——中国人民银行保险司于1997年10月启动了“中国精算制度建设”研究项目，决定建立中国的精算师资格考试认证制度，并逐步制定精算规则。中国的精算师资格考试认证制度，主要借鉴北美精算协会的考试体系，把精算师资格分为准精算师和精算师两个阶段，分别设立考试课程，通过准精算师考试课程的，授予准精算师资格，在获得准精算师资格基础上，再通过精算师资格考试的课程，授予精算师资格。在课程设置、考试内容、难度等方面，均力求达到与发达国家的精算师考试相当的水平。在制度设计、拟定考试大纲、教材编写过程中，得到国际精算团体的大力支持和帮助。1998年11月，中国保监会成立之后，继续推进精算制度建设。2000年，中国精算师资格考试开考，与此配套的教材也陆续出版发行。中国保监会1999年发布了关于寿险公司的精算规定，建立了寿险公司精算规则体系的基本框架。

2002年10月《保险法》进行了第一次修改，于2003年1月1日起施行。修改后的《保险法》把聘用经金融监管部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度的要求扩大到非寿险公司。因此，经过论证、筹备后，自2004年开始进行非寿险精算师的资格考试认证，称为中国精算师（非寿险方向），与此相适应，以前的精算师则称为中国精算师（寿险方向）。同时关于非寿险精算的规则也由中国保监会陆续制定发布。

2007年，中国精算师协会成立，组织精算师资格考试是协会的重要职能之一。协会设立了考试教育委员会，负责精算师资格考试和后续教育事宜（此前是由中国保险行业协会的精算工作委员会负责精算师资格考试）。

中国精算师资格考试施行10年来，通过考试认证了一批中国精算师和

中国准精算师，取得了一定成绩，积累了一定经验。目前已在北京、上海、天津、广州等 15 个城市设立了考试中心，并在香港、加拿大滑铁卢大学设立了 2 个海外考试中心，每年春秋两季举办考试。

随着国内保险市场的发育、精算技术的发展及国际精算界的变革，原有的考试体系已不完全适应。为此，中国精算师协会于 2009 年决定对中国精算师资格考试认证体系进行调整，并于 2011 年实施。调整的基本内容是：精算师资格考试仍分为准精算师和精算师两个阶段；在准精算师阶段，不再区分方向，对原寿险和非寿险两个方向的考试课程进行整合，考生通过 8 门必考的准精算师考试课程，并经过职业道德培训后，可获得中国准精算师资格；精算师则继续分为寿险和非寿险两个方向，有 3 年以上工作经历的准精算师，通过 5 门精算师考试课程，并经过职业道德培训后，可获得中国精算师（寿险方向）或中国精算师（非寿险方向）的资格，5 门精算师考试课程，既有必考的，也有选考的，具体科目，因寿险和非寿险方向有所不同。

对于在旧考试体系下已经通过的考试科目，如何转换为新考试体系的相应科目，也进行了研究，制定了转换规则。

为编写新考试体系的教材，中国精算师协会成立了教材编审委员会。教材编写力图贯彻国际性、先进性和实用性三个原则。国际性是指，鉴于中国精算师协会已正式申请加入国际精算师协会，因此精算师资格考试必须符合国际精算师协会的要求，达到国际精算师协会的标准。所以，在课程设置、课程内容、必考科目等方面，均以国际精算师协会的要求为标准。先进性是指，尽可能把精算理论技术的最新成果包括在这套教材之中。实用性是指，教材内容紧密联系国内保险业的实际，考虑国内精算人员需要掌握的知识和技能。

教材的具体编写实行主编负责制。教材编审委员会研究、协调、决定教材编写中的重大事项，确定各门课程的主编和主审人员，指定协调人对若干相关课程的内容调整、取舍和进度进行协调。教材初稿完成后，不仅由主审进行审阅，而且组织保险公司的相关人员进行试读，提出修改意见。教材的主编、主审、试读人员，都是在保险业、精算界具有业务专长、经验较为丰富、具有一定影响力的人员。可以说，这套教材的编写，是集中了行业的智慧和力量，凝结着组织协调人员、编审人员、试读人员的心血。

尽管如此，我们仍不认为这套教材已经尽善尽美。由于经验不足、认识水平有限，也由于时间仓促，教材在某些方面还显粗糙，还存在许多可改进、待完善之处。我们希望在教材投入使用之后，听取专家、考生和社会各界人士的意见，将来进一步修订。

回顾中国精算师资格考试 10 年来的历程，是在保险监管机关的领导

下，在保险业、有关高等院校及社会各界的积极参与下，在国际精算组织的支持下，不断发展、完善，取得进步的。在此，我谨代表中国精算师协会，对多年来关心、支持、参与、帮助中国精算事业发展的有关领导、专家和广大的精算专业人员表示真诚的敬意和感谢！

中国精算师协会　会长 魏迎宁

2010 年 11 月 15 日

编写说明

BIANXIESHUOMING

金融数学是精算科学的重要组成部分，长期以来我国精算课程和考试体系都仅包含了金融数学中的利息理论部分。根据中国精算师考试委员会关于“A2 金融数学”的编写要求，结合国际精算师协会（IAA）国际精算教育指南和国际认可精算师资格考试的培训大纲对“金融数学”的要求，本教材将“A2 金融数学”的内容分为四个部分：利息理论、利率期限结构与随机利率模型、金融衍生工具定价理论、投资组合理论。随机利率理论越来越多地应用于精算理论和实践，尤其是寿险精算学；金融衍生工具的定价理论在新型寿险产品的定价中发挥着重要的作用；投资组合理论则是保险投资的理论基础，因此这三个部分对精算职业训练而言都是不可缺少的。作为中国精算师考试的指定教材，本书试图将四部分内容整合在一起，在保持与原考试教材《利息理论》（刘占国主编，中国财政经济出版社 2006 年版）连贯性的同时，对后面三个部分的内容做了取舍，保留了核心内容，保证了教材内容有一定的覆盖面和难度，舍去了其中较难的部分或某些冗长的证明。

本书要求读者有较好的数学知识背景，完成中国精算师资格考试的“A1 数学”后再阅读本教材效果较好。本书第二和第三部分要用到一些随机分析的基本知识，读者可参考“A1 数学”或本书参考文献的相关教材。

本书由中央财经大学中国精算研究院徐景峰老师担任主编，负责编写第六、七、八、九、十、十一章，并对基本沿用原考试教材《利息理论》（刘占国主编，中国财政经济出版社 2006 年版）的第一、二、三、四、五章进行了修订。北京大学数学科学学院杨静平老师作为教材主审，对全书进行了认真细致的审阅，并提出了许多宝贵的修改建议。北京大学数学科学学院的吴岚老师作为教材协调人，对全书的大纲和内容提出了方向性的指导意见。西南财经大学李恒琦等老师作为试读人，对本书进行了认真的审阅，为保证全书的出版质量提供了有力的支持。编者在此对他们表示衷心的感谢。由于编者的水平限制，本书还存在不少缺点、错误，对此编者负全部责任，同时敬请读者批评指正。

编者

2010 年 10 月

目　录

第一篇　利息理论

第二篇　利率期限结构与随机利率模型

第三篇　金融衍生工具定价理论

第四篇　投资组合理论

第一篇　利息理论

第一章　利息的基本概念

学习目标

本章主要介绍利息理论中涉及的基本概念及其性质；包括单利、复利、利息力、贴现率、贴现因子、名义利率、名义贴现率等等。本章还介绍了价值等式及其在利息问题求解中的应用。

利息是在一定时期内，资金拥有人将资金的使用权转让给借款人后所得到的报酬。因此在某种意义上，利息事实上也可看作是租金的一种形式，即借方向贷方支付的在一段时间内由于资金转让而使贷方不能使用该笔资金所引起的损失。尽管理论上利息可能以实物的形式存在，但与实际中大多数情况相同，本书中资金和利息都是用货币来表示的。

§1.1　利息度量

在给出利息的几个基本度量方式前，我们首先引入几个基本概念：我们把每项业务开始时投资的金额称为**本金**，把业务在一定时间后回收到的总金额称为该时刻的**积累值（或终值）**。显然，积累值与本金的差额就是这一时期的利息金额。

在本篇，我们考虑如下的简单情况：一旦给定了本金金额，则在任何时刻的积累值均可确定，也就是说，该投资在数额上的任何变化全部是由于利息的影响而造成的，这意味着利息是确定的或其变化是确定的。因此，决定积累值的两个主要的因素就是本金金额和从投资日算起的时间长度。理论上，时间长度可以用许多不同的单位来度量。例如：日、周、月、季、半年、一年等，最常用的度量单位是年，我们用“期”表示度量单位。以后除非另外声明，均可认为一期为一年。

为了更好地讨论利息的度量，我们引入积累函数的概念：用 $a(t)$ 表示0时刻的本金1经过 t 年的连续积累得到的积累值，并称定义在区间 $[0,\infty)$ 或非负整数集合上的函数 $a(t)$ 为积累函数，由定义可知 $a(0)=1$。通常情

况下，$a(t)$ 为单增函数，这意味着整个积累过程的利息是正的；但实务中也存在负利息的情况，如一笔亏本的生意就意味着产生了负的利息，此时 $a(t)$ 为 t 的减函数。

积累函数 $a(t)$ 有时也称作 t 期积累因子，因为它是单位本金在 t 期末的积累值。

通常，$a(t)$ 为连续函数；然而，有时 $a(t)$ 也可能是间断的，例如利息只有到付息日时才产生的情形就是如此。一般情况下，本金金额不是一个单位，而是 k 个单位，这时我们定义一个总量函数 $A(t)$，它是本金为 k 的投资在时刻 $t \geqslant 0$ 时的积累值。显然，$A(t)$ 与 $a(t)$ 仅相差一个倍数 k，即

$$A(t)=k\cdot a(t) \tag{1.1.1}$$

于是，$A(t)$ 与 $a(t)$ 具有完全类似的性质。$a(t)$ 可看作是 $k=1$ 时的总量函数。在许多情况下，积累函数与总量函数可以互相替换使用。

称积累函数 $a(t)$ 的倒数 $a^{-1}(t)$ 为 **t 期折现因子或折现函数**。特别地，把一期折现因子 $a^{-1}(1)$ 简称为**折现因子**，并记为 v。

我们把为了在 t 期末得到某个积累值，而在开始时投资的本金金额称为该积累值的**现值**（或折现值）。显然，$a^{-1}(t)$ 是在 t 期末支付 1 的现值，在 t 期末支付 k 的现值为 $k\cdot a^{-1}(t)$。积累与折现是相反的过程，$a(t)$ 为 1 单位本金在 t 期末的积累值，而 $a^{-1}(t)$ 是在 t 期末支付 1 单位积累值的现值。

这里所说的"积累值"严格地只与该时点以前的款项有关；"现值"只与该时点以后的款项有关；而对于既可以与该时点以前的款项有关，又可以与该时点以后的款项有关的值，将使用"当前值"这个词。

我们把从投资日起第 n 期所得到的利息金额记为 I_n，则

$$I_n=A(n)-A(n-1) \quad \text{对整数 } n\geqslant 1 \tag{1.1.2}$$

1.1.1 实际利率

某一度量期的**实际利率**，是指该度量期内得到的利息金额与此度量期开始时投资的本金金额之比。通常实际利率用字母 i 来表示。

由定义可以看出：实际利率是一个没有单位的数，它与给定的时期有关，是单位本金在给定的时期上产生的利息金额，从积累函数看，

$$a(1)=a(0)+i=1+i \tag{1.1.3}$$

$$i=1+i-1=a(1)-a(0)=\frac{I_1}{A(0)} \tag{1.1.4a}$$

对于有多个度量期的情形可以分别定义各个度量期的实际利率。用 i_n 表示从投资日算起第 n 个度量期的实际利率，则

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A_{n-1}} \quad (n \geqslant 1 \text{ 为整数}) \tag{1.1.4b}$$

显然（1.1.3）式和（1.1.4a）式中的 i 也可记为 i_1。

【例 1 – 1】 某人到银行存入 1 000 元，第一年末他存折上的余额为 1 050 元，第二年末他存折上的余额为 1 100 元，问：第一年、第二年的实际利率分别是多少？

解： 由 $I_1 = A(1) - A(0) = 50$

$I_2 = A(1) - A(0) = 50$

故 $$i_1 = \frac{I_1}{A(0)} = \frac{50}{1000} = 5\%$$

$$i_2 = \frac{I_2}{A(1)} = \frac{50}{1050} = 4.762\%$$

因此第一年的实际利率为 5%，第二年的实际利率为 4.762%。

1.1.2 单利和复利

前面讨论的实际利率 i 是针对某一个完整度量期而言的，若投资期为多个或非整数个度量期，如何来进行利息的度量呢？

实务中有两种最重要的度量方式：**单利**和**复利**。

考虑投资一单位本金：

（1）如果 t 时的积累值为：

$$a(t) = 1 + i \cdot t \tag{1.1.5}$$

那么，我们就说该笔投资以每期单利 i 计息，并将这样产生的利息称为单利。

（2）如果 t 时的积累值为：

$$a(t) = (1 + i)^t \tag{1.1.6}$$

那么，我们就说该笔投资以每期复利 i 计息，并将这样产生的利息称为复利。

由上述定义可以发现：若以每期单利 i 计息，那么在投资期间，每一度量期产生的利息均为常数 i。不过，这并不意味着其实际利率为 i。事实上，按上节定义，对于整数 $n \geqslant 1$，第 n 期的实际利率为：

$$\begin{aligned} i_n &= \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} \\ &= \frac{(1 + in) - [1 + i(n-1)]}{1 + i(n-1)} = \frac{i}{1 + i(n-1)} \end{aligned}$$

因此，i_n 关于 n 是单调递减的。若以每期复利 i 计息，那么在投资期间，不同时期将产生不同量的利息。事实上，

$$I_n = a(n) - a(n-1) = (1+i)^n - (1+i)^{n-1}$$

$$= i \cdot (1+i)^{n-1} = i \cdot a(n-1)$$

显然，I_n 关于 n 单调递增。由于这里讨论的是单位本金，所以用的是 $a(n)$ 而不是 $A(n)$。

而对于每期的实际利率，有：

$$i_n = \frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{I_n}{a(n-1)} = i$$

因此，常数的复利意味着常数的实际利率，且二者相等。

容易看出，单利的利息在以后的时期不再产生利息；而对于复利而言，在任何时刻，本金和到该时为止得到的利息，总是都用于投资以赚取更多的利息，也就是民间所说的“利滚利”。

由积累函数看，单利的积累函数是 t 的线性函数，复利的积累函数则是 t 的指数函数，因此当 $t \geqslant 1$ 时，有 $(1+i)^t \geqslant 1+it$，所以复利比单利产生更大的积累值；而对于较短时期则相反，即 $t \leqslant 1$ 时，$(1+i)^t \leqslant 1+it$。

实务中，期限达到或超过一个度量期的长期金融业务几乎全部使用复利，较短期的业务也常用复利；单利只是偶尔在短期业务中使用。单利有时也用作复利在非整数时期内的近似。除非特别声明，我们均用复利而不是单利。

【例 1-2】 某银行以单利计息，年息为 6%。某人存入 5 000 元，问 5 年后的积累值是多少？如果上述银行以复利计息，且其他条件不变，重解本例。

解： 有 $A(5) = 5000 \times a(5) = 5000(1+5\times 6\%) = 5000 \times 1.3 = 6500$（元）
即：5 年后的积累值为 6 500 元。

若以复利记息，则：

$$A(5) = 5000 \times a(5) = 5000(1+6\%)^5 = 6691.13 \text{（元）}$$

即 5 年后的积累值为 6 691.13 元。

1.1.3 实际贴现率

一个度量期的实际贴现率为该度量期内取得的利息金额与期末的投资可回收金额之比。通常用字母 d 来表示实际贴现率。

与（1.1.3）式和（1.1.4a）式类似，我们有：

$$v = a^{-1}(1) = 1 - d \tag{1.1.7}$$

$$d = 1-(1-d) = 1 - a^{-1}(1) = \frac{a(1)-1}{a(1)} = \frac{a(1)-a(0)}{a(1)}$$

$$= \frac{A(1)-A(0)}{A(1)} = \frac{I_1}{A(1)} \tag{1.1.8a}$$

我们通过下面的例子来解释利率与贴现率的区别：假设张某到一家银行去以年实际利率 6% 向银行借 100 元，为期一年。则银行将付给张某 100

元。一年后，张某将还给银行贷款本金 100 元，外加 6 元的利息，共计 106 元。

假如改为以年实际贴现率 6% 向银行借 100 元，为期一年，则银行将预收 6%（即 6 元）的利息，而仅付给张某 94 元。一年后，张某将还给银行 100 元。

由以上例子可以看出，实际利率其实是对期末支付的利息的度量，而实际贴现率则是对期初支付的利息的度量。

值得注意的是，在贴现率中使用的“支付”一词并非通常意义下的支付，因为借款者并没有直接按利率来“付”利息，而是预先按利率“扣除”利息。其实这在结果上与首先借到全部金额、然后借款者立即支付利息并没有什么不同。

在实际贴现率的定义中的“利息金额”有时也被称作“贴现金额”。我们说，在包含贴现率的场合，这两个词是通用的。但是，我们应该注意到它们的区别：由（1.1.8a）式我们有 $I_1 = A(1) \cdot d$，即

贴现金额 = 期末可收回资金金额 × 贴现率

而由（1.1.4a）式有 $I_1 = A(0) \cdot i$，即

利息金额 = 期初投资金额 × 利率

类似的，可以定义任意度量期的实际贴现率，令 d_n 为从投资日算起第 n 个时期的实际贴现率，根据定义，有：

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)} \quad （对整数 n \geqslant 1） \qquad (1.1.8b)$$

一般地，d_n 随 n 的不同而不同；但在复利假设下，若实际利率是常数，则实际贴现率也是常数。事实上，若每期实际利率为 i，那么，对任意正整数 n，有：

$$a(n) = (1+i)^n$$

$$d_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n)} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n} = \frac{i}{1+i}$$

d_n 与 n 无关，为常数，通常把这种情况下的贴现叫做“复贴现”，这是类似于“复利”的一个术语。

实际利率和实际贴现率都是用来度量利息的。任何一笔业务，都可以分别用它们来度量。如前面所举的例子，张某以实际贴现率 6% 借款 100 元，事实上他得到 94 元，而在一年后还款 100 元。这里，我们是用实际贴现率来度量这笔业务的。即：这笔业务的年实际贴现率为 6%。如果用实际利率来度量这笔业务，那么，可以这样看待该业务，张某实际借款 94 元，一年的利息为 6 元。于是，年实际利率为 6/94 = 6.383%，即：这笔业务的年实际利率为 6.383%。这样，同样一笔业务，如果用不同的方式进行度量，那么相应就有不同的数值。实务中，对利息的度量有许多不同的方式，