

# $x$ 的奇幻之旅

为什么工作和生活中要有数学思维？

[美] 史蒂夫·斯托加茨 (Steven Strogatz) 著

鲁冬旭 译

The  
Joy of  
X



中信出版社 · CHINA CITIC PRESS

014034591

F224.0  
247

# x的奇幻之旅

为什么工作和生活中要有数学思维？

[美] 史蒂夫·斯托加茨 (Steven Strogatz) 著

鲁冬旭 译

The  
Joy of



北航

C1714900

F224.0  
247

100380, 10

### 图书在版编目 ( CIP ) 数据

$x$  的奇幻之旅 / (美) 斯托加茨著; 鲁冬旭译. —北京: 中信出版社, 2014.4

书名原文: The Joy of  $x$

ISBN 978-7-5086-3516-3

I. ① $x$ … II. ①斯… ②鲁… III. ①经济数学-通俗读物 IV. ①F224.0-49

中国版本图书馆CIP数据核字 (2013) 第 001030 号

The Joy of  $x$ : A Guided Tour of Math, from One to Infinity by Steven Strogatz

Copyright © 2012 by Steven Strogatz

Simplified Chinese translation edition © 2014 by China CITIC Press

Illustrations by Margaret Nelson

Jacket design by Martha Kennedy

ALL RIGHTS RESERVED

本书仅限中国大陆地区发行销售

### $x$ 的奇幻之旅

著者: [美] 史蒂夫·斯托加茨

译者: 鲁冬旭

策划推广: 中信出版社 (China CITIC Press)

出版发行: 中信出版集团股份有限公司

(北京市朝阳区惠新东街甲4号富盛大厦2座 邮编 100029)

(CITIC Publishing Group)

承印者: 北京诚信伟业印刷有限公司

开本: 787mm×1092mm 1/16

印张: 17.5 字数: 240千字

版次: 2014年4月第1版

印次: 2014年4月第1次印刷

京权图字: 01-2013-0968

广告经营许可证: 京朝工商广字第 8087 号

书号: ISBN 978-7-5086-3516-3 / F · 3101

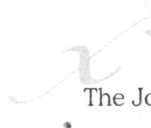
定 价: 42.00 元

版权所有·侵权必究

凡购本社图书, 如有缺页、倒页、脱页, 由发行公司负责退换。

服务热线: 010-84849555 服务传真: 010-84849000

投稿邮箱: author@citicpub.com



前言  
The Joy of x

我有一个朋友，他虽然是一位艺术家，却也是一个科学爱好者。每次我们见面聊天，他总是不停地跟我谈量子力学或者心理学的最新进展。但是，一说到数学，他就无话可说了。他常常对我说：“数学好难懂啊，那么多奇奇怪怪的符号，我连读都不会读。一想到这个，我就很难过！”

其实，我的这位艺术家朋友对数学的抱怨还远不只那些奇怪的符号，除此之外，令他费解的地方还包括：数学家每天都在忙些什么呢？为什么数学家们会形容一个证明非常“优雅”呢？我常常和他开玩笑说：“等我哪天有时间，我就坐下来一点儿一点儿地教你数学知识，从  $1 + 1 = 2$  开始，看看到底你能看懂多少。”

后来，我决定把这个疯狂的想法付诸实践，于是我写了这本书。在这本书里，我会带领读者们走过一段有

趣的数学旅程，了解数学的各种元素，从幼儿园的数学知识到研究生院的数学知识。这个旅程不仅是为我的那位朋友设计的，也是为任何想了解数学的美丽和趣味的人所设计的。别担心，这本书并不是要帮你补习你从小到大落下的数学功课，而是想给你提供一个崭新的视角，让你重新了解和欣赏数学的美。我希望这本书能给广大对数学感到恐惧、陌生或是不解的成年读者提供一些新的启发和新的感觉。我想要告诉这些读者的是：第一，数学到底是什么？第二，为什么了解数学的人会觉得数学如此美丽和迷人？

在这本书里，我会告诉大家：迈克尔·乔丹的灌篮如何完美地诠释了微积分的原理。我会给大家举出一个简单却非常惊奇的例子，告诉你如何理解几何学的基本定理——勾股定理。我会试着帮你解开一些生活中大大小小的谜团：O·J·辛普森到底有没有犯下杀妻罪行？怎样翻转床垫才能最大化地延长床垫的寿命？结婚之前，到底谈多少次恋爱才最合理？我还会告诉你，为什么同样是无穷大，有的无穷大却比其他的无穷大更大？

其实，我们的生活中充满了数学，是否能看到它们，取决于你有没有一双善于发现的眼睛。在我们的数学之旅中，我会充当你们的导游：我会带你们看到斑马身上条纹中的正弦波，会带你发现《独立宣言》中的欧几里得定理；会向你展现第一次世界大战硝烟中负数的身影。我还会告诉你们，数学的最新进展如何影响着你我每天的生活：当我们在互联网上搜索好口碑的餐馆时，当我们试图理解股市的大起大落时（并且努力不被这些大风大浪所颠覆），我们其实都在接触着数学的最前沿知识。

出于一种数字上的巧合，我在我 50 岁生日那天决定开始写作这本关于数学的书。在那个伟大的日子里，《纽约时报》的专栏编辑戴维·希普利正好请我共进午

餐（他完全不知道那是一个伟大的日子）。在吃饭的过程中，希普利编辑问我是否有兴趣写一个数学专栏，与读者分享关于数学的一些心得。我立刻想起了我的那位艺术家朋友。我想，很多公众应该都对数学抱有恐惧和陌生的态度吧，这不是太可惜了吗？我了解数学的迷人之处，也知道了解数学以后所能体验到的巨大乐趣，如果能把这些内容分享给大家，该是一件多么美好的事情！我不仅想把数学的美分享给我的那位求知若渴的艺术家朋友，也想把这种美分享给所有对数学感兴趣的人们。所以，我立刻接受了希普利编辑的邀请，决定着手写作这个专栏。

于是，在2010年1月底，“数学元素”专栏在网上面世了。这个专栏一共连载了15周的时间。这些文章刊出之后，读者的反响极为强烈，各个年龄层的读者给我发来了雪片般的邮件。在这些来信的读者中，有很多是学生和教师，还有一些是有好奇心的公众。很多人都表示，自己曾对数学有过兴趣，但却因为种种原因，在人生的某个时刻和数学告别了。很多人表示，放弃数学以后，他们常常觉得自己似乎错过了什么重要的东西，他们希望能有一个新的契机，重新找到那样失去的东西——重新了解和亲近数学。最令我感动的是，有很多为人父母的读者给我发来邮件，感谢我帮助他们向他们的孩子解释了什么是数学；他们还说，在这个过程中，他们自己对数学也有了新的了解和认识。就连我的同事和数学界的朋友也似乎挺喜欢看我写的东西，在他们不给我提意见的时候。（又或者给我提意见的时候，才是他们获得最大乐趣的时候。）

这一系列的经历都让我意识到了一件事情：虽然说起来似乎人人都讨厌数学，但是其实公众仍有一颗渴望了解数学的心。这种渴望是很微妙的，也是一直被出版界的朋友们所忽视的。虽然很多人都会提到他们读书的时候是多么讨厌数学，但其实他们也想要了解数学的奥妙，体会数学的美和乐趣。而且一旦入了门，他们甚至

可以立刻成为数学的狂热爱好者！

于是，我决定写作本书。在这本书里，我想向大家介绍一些数学历史上最伟大、最充满智慧、最有影响力的思想。本书每个章节的篇幅都不长，相互之间也保持了相对的独立性，有些章节是直接从我为《纽约时报》写作的专栏文章里挑选出来的。所以，你可以随时随地挑出你最感兴趣的章节来阅读，而不一定要从头到尾一口气读完。如果你对某一个特别问题特别感兴趣，我在本书的最后为你准备了详细的资料，你可以从中找到本书相关的细节，方便你进行进一步的阅读和探索。

当然，我知道有很多读者更喜欢一段系统性的、有条不紊的、完整的数学之旅。为了满足这些读者的需要，我把本书分成了6个部分，每一部分又分为若干章，这种写作结构想必大家并不陌生。

第一部分是“数字”。在这一部分中，我将以幼儿园和小学水平的一些数学内容作为我们这趟数学之旅的开端。在这一部分中，你将看到，数字给我们的生活提供了多少便利，在我们描述世界、理解世界的过程中，数字又有着多么巨大的神秘力量。

第二部分是“数字之间的关系”。在这一部分中，我们的着眼点将从单个的数字转移到数字之间的关系上。数字之间的关系是代数的核心。为什么数字之间的关系如此重要？因为只有理解了数字之间的关系，我们才能开始描述和理解世界上五花八门的复杂问题：因果关系，供需关系，剂量和疗效之间的关系等。理解了这些问题，我们才能慢慢地拨开迷雾，看清世上的万事万物是如何互相联系、互相影响的。如果不搞清楚这些问题，就无法了解这个多姿多彩的复杂世界。

第三部分是“形状”。在这一部分中，我们离开了数字和符号的领域，来到形状和空间的世界。是的，我们要讲到几何学和三角学了。除了描述所有我们能看到

的物体的形态以外，几何学和三角学还把数学提升到了一个新的高度：通过逻辑推理和证明，构建出一个更为严谨和严密的数学世界。

第四部分是“变化”。在这一部分中，我们开始介绍微积分。微积分可能是数学中最有影响力、最硕果累累的一个分支了。正是因为有了微积分，人类才有能力预测行星的运动、潮汐的涨落、宇宙和人类身上发生的一切连续性的变化。在这个部分中，我们还会谈到无穷大的概念。正是因为聪明的人类成功地驯服了“无穷大”这只怪兽，才使得微积分的发明成为可能。借助“无穷大”这只怪兽的力量，微积分一下子解决了好多先贤智者一直无法解决的难题。凭借这一利器，人类势如破竹地攻克了许多科学难关，最终成功地开创了现代世界。

第五部分是“数据”。在这一部分中，我们会谈到概率论、统计学、网络与数据挖掘等问题。这些都是数学学科中相对“年轻”的分支。为什么我们要研究统计学、概率论、网络和数据挖掘呢？因为生活中总是充满了很多难解的谜题：机会、运气、不确定性、风险、波动、随机性、各种因素间错综复杂的联系等。通过阅读这一部分的内容，你会发现，只要使用合适的数学工具，运用正确的数据，我们就能从看似一团乱麻的世界中，寻找到规律和意义。

在数学之旅的最后一程，我会带大家来到本书的第六部分：“前沿”。在这一部分中，我会向大家介绍数学研究的最前沿进展，带大家欣赏已知和未知的世界。我们会再次谈到前文中已经说过的问题：数字、数字之间的关系、形状、变化，以及无穷大。但是，“故地重游”的时候，我们会用更深邃、更现代的眼光，来审视这些我们已经熟悉的“风景”。

好了，以上就是此次数学之旅的行程概要。我希望所有沿途的“风景”至少能给你带来一样东西：乐趣。在我们的旅程中，会有很多让你大呼“原来如此！”





目录  
The Joy of x

前言 VII

第1部分 数字 I

第1章 数学：从企鹅的“鱼”订单到无穷大 3

第2章 一组组石头与加减乘除运算 7

第3章 “敌人的敌人就是朋友”与“负负得正”法则 15

第4章 交换律： $7 \times 3$  与  $3 \times 7$  都等于 21 23

第5章 无理数：除法带给我们的困惑 29

第6章 从笨拙的罗马数字到美妙的阿拉伯数字 35

第2部分 数字之间的关系 43

第7章  $x$  的乐趣与股票的盈亏 45

第8章 求根难题与虚拟的复数 53

第9章 应用题：冷热水龙头一起灌满浴缸需要多长时间？ 61

第10章 丑陋却万能的二次方程求根公式 71

第11章 函数：你能把一张纸对折8次以上吗？ 79

**第3部分 形状 87**

第12章 跳舞的正方形与勾股定理 89

第13章 感性与逻辑兼备的几何证明方法 99

第14章 圆锥的魔法：从回音廊到抛物线 109

第15章 大自然中最常见的形状——正弦波 121

第16章 圆周率是如何计算出来的？ 129

**第4部分 变化 137**

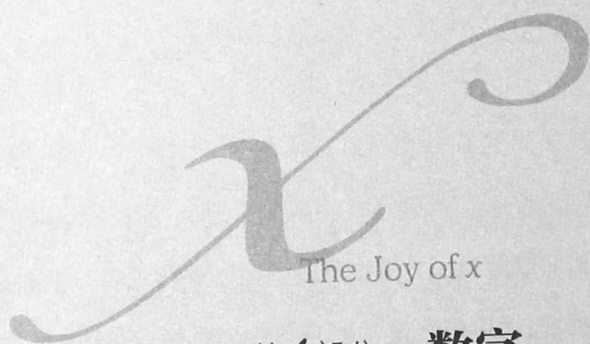
第17章 微积分：找出最优路径的最可靠方法 139

第18章 积分谱成的优雅数学变奏曲 147

第19章 指数 $e$ ：关乎你婚姻成败的数字符号 155

第20章 用微积分方程来分析爱情与三体问题 163

第21章 向量微积分：带人类走向现代化的使者 169



The Joy of x

第1部分 数字



## 第1章

# 数学：从企鹅的“鱼”订单到无穷大

数字的起源是什么？究竟什么是数字？我们为什么要发明数字？关于这个问题，我看过的最好的解释来自幼儿教育动画片《芝麻街》。在名叫“一二三，跟我数”的那一集里，粉红皮毛、绿色鼻子的汉弗莱先生在“毛绒武器”饭店做午餐服务员。我们可爱的汉弗莱先生接到了一群企鹅的订餐电话，接完电话以后，汉弗莱认真地把订餐信息传递给了厨房，他大喊道：“鱼，鱼，鱼，鱼，鱼，鱼。”在接下来的剧情中，我们的另一位主人公厄尼向汉弗莱介绍了如何用数字6更好地总结订单的信息。



对于“为什么要发明数字”这个问题，这是我听过的最简单、最生动，也是最有趣的答案。

从这个动画故事里，孩子们认识到数字是一种方便好用的工具。如果没有数字，6只企鹅的订餐信息就只能表示为“鱼，鱼，

鱼，鱼，鱼，鱼”，如果有更多只企鹅订餐，我们的汉弗莱先生恐怕就招架不住了。但是，只要发明了数字，不管有多少只企鹅订餐，都可以很清楚简洁地用数字表示出来。

对于成年人来说，虽然数字的发明让我们不必浪费时间重复叫喊，但是数字却有一个很大的缺点，那就是它的抽象性。数字6比6条鱼要抽象得多，它不仅表示6条鱼，还可以表示很多其他的东西：6个盘子、6只企鹅、句子“鱼，鱼，鱼，鱼，鱼，鱼”中“鱼”字的数量，诸如此类。数字6是所有这些东西的高度抽象化的表达。

从这个角度来看，数字不再是动画片里浅显易懂的概念了，它的抽象性为它蒙上了一层神秘的色彩。数字仿佛是柏拉图理想国里的某种玄而又玄的东西，它抽象而神秘地存在于现实生活中。从这个层面来看，数字不像是我们日常生活中接触到的各种实实在在的事物，而是与“真理”、“正义”之类的东西一样，是一种高高在上的抽象概念。你越是哲学的角度上思考数字的概念，越会觉得它仿佛是一团看不透彻的迷雾：数字到底是从哪儿冒出来的？是我们人类发明了数字，还是数字本来就客观地存在于自然界中，只是被我们人类发现了而已？

如果你再进一步考虑一下数字的“性质”，就会觉得问题变得更加微妙了。正如其他数学符号或数学概念一样，数字也有自己的“生命”和“行为模式”。我们人类无法操控数字的性质和行为模式。即使数字是存在于人类的思维之中的，但一旦它们被定义出来，我们就再也无权干涉它们的行为和性质了。数字服从于某些特殊的规律，有自己的特殊性质，它们要以特定的方式与另一个数字结合，这就好像一个人有自己独特的个性一样。人类完全无法改变数字的这些性质，我们只能默默地观察它们的“行为”，试图了解和学习它们的“性质”。在这个意义上，数字就好像

我们头顶的繁星，又好像微观世界里的原子，它们都在冥冥之中服从于某些神秘的客观规律，这些规律不以我们人类的意志为转移。当然，不同的是，繁星和原子客观地存在于我们人类社会以外，而数字似乎只存在于我们的脑海之中。

是的，数字的确具有这种神秘的双重性：它既方便实际，又神秘莫测；它既是6条鱼、6个盘子那类具体的东西，又是比繁星和原子更为缥缈虚幻的抽象存在；它既是最实用直观的工具，又是理想国里的抽象概念。也许正是数字的这种奇妙的特性，才使得它成为我们人类历史上最有用的工具之一。著名的物理学家尤金·维格纳曾这样写道：“在自然科学的领域里，数学的应用是如此广泛，数学的威力是如此巨大。数学的神通广大、无所不至已经超出了我们人类智慧所能理解的范围。”

也许你会觉得我有点儿言过其实，也许你会问：你所谓的数字的“生命”到底指什么？或者你为什么说“我们人类完全无法掌控数字的性质”？为了说明这个问题，让我们回到《芝麻街》的例子中来。假设，在汉弗莱先生把企鹅们所下的6条鱼的订单传达给厨房之前，他又接到了另一个电话：另一个房间里恰好也有6只企鹅，他们恰好也想订6条鱼。在接完这两个电话并记下这两个订单以后，汉弗莱要怎么把信息传达给厨房呢？如果汉弗莱先生还没有得到厄尼的点拨，他就要为每一只企鹅顾客大喊一声“鱼”，喊足12声；如果他已经学会了数字的概念，那么他就会告诉厨房：第一个订单要6条鱼，第二个订单也要6条鱼。实际上，汉弗莱先生需要的是“加法”的概念，如果他懂得加法，他就会骄傲地对厨房喊道：“我要6加6条鱼。”（如果汉弗莱先生爱表现的话，他就会说：“我要12条鱼。”）

这个极为有用又极富创造性的新工具就叫作加法。与数字一样，发明加法是为了给我们提供方便：有了数字，我们便不必重复叫喊同一个名词；有了加法，我们便不必重复说同一个数字。这便是数学发展的动力和过程：更进一步的抽象化给了

我们更多的启迪和方便，也让数学有了更强大的力量和效用。

数数也许并不是一件多么高超的技能。很快，我们的汉弗莱先生就能学会数一位数、两位数、三位数……用不了多久，他会发现自己可以无穷无尽地数下去。

虽然数字的边界是无限的，但人类的能力却是有限的。我们可以定义数字6和数学符号“+”，但一旦我们明确了它们的定义，我们就再也不能干涉“ $6+6$ ”等于多少。不管你喜不喜欢， $6+6$ 必须等于12。因为任何其他的答案都是不符合逻辑的。在这个意义上，数学永远包含着两个部分：一部分是有意为之的“发明”，另一部分是随之产生的“发现”。我们发明了这样或那样的概念（比如，数字6和数学符号“+”），然后我们又发现了这些概念所产生的结果（比如， $6+6=12$ ）。在下面的章节中你将会看到，在数学领域，人类的自由是有限的。我们可以自由决定提出什么样的问题，以及如何研究这些问题，但是问题的答案却在我们的控制范围之外，不管我们喜欢也好，不喜欢也罢，一旦问题被提出，它们的答案就已经在某个地方等着我们了。



## 第 2 章

### 一组组石头与加减乘除运算

---



就像世界上的其他东西一样，算术有它严肃性的一面，也有它趣味性的一面。

对于算术严肃性的一面，你可能已经非常熟悉了，不外乎是我们在学校里数学课上学到的内容，以及日后我们在工作中用到的算术：如何处理一列列的数字，如何把它们相加，如何把它们相减，如何把它们放进表单里进行计算，如何处理税务报表和年终报表上的数字等。算术严肃性的一面当然是非常实用的，也是非常必要的，但对大多数人来说，它也是枯燥无味、毫无乐趣的。

算术趣味性的一面是怎样的呢？大部分人对此都非常陌生，除非你接受的是培养高级数学家的数学教育。但其实，这并不像你想象的那么高深莫测，只要拥有孩子般的好奇心，算术趣味性的一面就是一些十分自然、十分简单的内容。

在保罗·洛克哈特的著作《一个数学家的叹息》中，作者认为，在儿童教育中，教师应该用一种更具体的方式向孩子们展示数字的概念。他认为，应该让孩子们把数字想象成一组组石头。比如，数字 6 就是如下图所示的一组石头。