天勤数学考研系列

2015考研数学（二）

真题篇

十年真题精解与热点问题

陈启浩 编著

免费答疑

天勤微信考研平台

答疑服务

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

2015考研数学(二)

真题篇

免费

天勤数学考研系列

2015 考研数学（二）
真题篇
十年真题精解与热点问题

陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是考研数学辅导书. 主要内容包括2005年到2014年十年的考研数学二的真题及其精解, 以及对考试热点问题的讨论. 本书提供免费的线上答疑服务.

本书适合参加全国硕士研究生入学统一考试“数学二”的同学阅读, 也可作为教师的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

2015考研数学（二）真题篇十年真题精解与热点问题/陈启浩编著. —北京:机械工业出版社, 2014.3

（天勤数学考研系列）

ISBN 978-7-111-46057-2

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第040373号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑: 韩效杰 责任编辑: 韩效杰 汤 嘉
版式设计: 常天培
封面设计: 路恩中 责任印制: 乔 宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2014年3月第1版第1次印刷
184mm×260mm·13.75印张·331千字
标准书号: ISBN 978-7-111-46057-2
定价: 29.80元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心:（010）88361066	教材网: http://www.cmpedu.com
销售一部:（010）68326294	机工官网: http://www.cmpbook.com
销售二部:（010）88379649	机工官博: http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线:（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

天勤数学考研系列丛书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，能够在较为紧张的时间安排下，有效加深对概念与理论的理解，熟练掌握常用的解题方法与技巧，针对考研同学的实际需要，我社特组织出版了由北京邮电大学陈启浩教授编写的《天勤数学考研系列丛书》. 这套丛书2013年出版时曾用名《考研数学复习指导系列丛书》.

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对数学二考试的包括四本书，分别是：

《2015考研数学（二）真题篇　十年真题精解与热点问题》

《2015考研数学（二）基础篇　全面复习与常考知识点解析》

《2015考研数学（二）提高篇　常考问题的快捷解法与综合题解析》

《2015考研数学（二）冲刺篇　模拟试题5套及详解》

本套系列丛书是在陈启浩教授对全国硕士研究生入学统一考试大纲的深入研究和对历届考研真题的精细分析的基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导的结晶.

本套丛书提供**免费的答疑服务**，读者可以访问天勤论坛（www.csbiji.com），在相应版块就书中的内容提问，将由专门的老师负责来回答这些提问，合理的问题将在**48小时之内**得到回答.

本套系列丛书，无论是内容编写还是解题方法都比较精练、新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性、针对性也很强，可以明显提高复习的效率. 这套书贴近考纲、考试，更贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书.

机械工业出版社

前　言

参加考研的同学，一定要练习一下近十年的全国硕士研究生入学统一考试的真题．因为这样既可以评估复习的效果，找出不足，尽快补上，也可以获得试题形式、广度和难度等有价值的信息．

为了帮助同学们从考研真题的练习中发现更多不足，掌握更多方法，我们对 2005 年至 2014 年的考试试题，作了精心的解析，编成本套丛书的《2015 考研数学（二）真题篇十年真题精解与热点问题》一书．本书由三部分组成：

A. 十年真题（单独成册）

B. 十年真题精解

C. 热点问题

“十年真题精解”是对每一道真题通过“分析”“精解”和“附注”三部分进行精细、完整的解析，特别在“精解”中大量采用了既普遍实用又富有技巧性的方法给出解答，十分贴近考生，**这是本书的一个亮点，也是本书与其他同类书籍的一个区别**．

“热点问题”是对最近十几年考研真题进行全面分析、研究后，提出的经常出现于试题中的、对考生来说较为困难或容易失分的问题，通过例题进行讲解，十分贴近考试．

希望同学们在使用真题进行练习时，不要轻易翻阅真题解答，只有当百思不得其解时才查阅解答，这样练习才能起作用．在练习结束之后，针对每一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道题的分析、精解和附注的内容，进行比对和总结，内化为自己的能力．

本书提供**免费的答疑服务**，读者可以访问天勤论坛（www. csbiji. com），在相应版块就书中的内容提问，将由专门的老师负责来回答这些提问，合理的问题将**在 48 小时之内**得到回答．

希望同学们认真专注地进行复习，取得满意的成绩！

欢迎同学们对本书提出建议和意见，发邮件到 cqhshuxue@ gmail. com，非常感谢！

编　者

目　　录

B　十年真题精解

2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题精解

一、选择题

(1) **分析**　先寻找 $\ln^{\alpha}(1+2x)$ 与 $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 在 $x\to0^{+}$ 时的等价无穷小，然后由题设即可确定 α 的取值范围 .

精解　由于 $\ln^{\alpha}(1+2x)$ 在 $x\to0^{+}$ 时是无穷小，所以 $\alpha>0$. 从而有

$$\ln^{\alpha}(1+2x)\sim(2x)^{\alpha},\ (1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\left(\frac{x^{2}}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}(x\to0^{+})\tag{1}$$

于是由题知 $\begin{cases}\alpha>1,\\ \dfrac{2}{\alpha}>1,\end{cases}$ 即 $\alpha\in(1,\ 2)$.

因此本题选(B).

附注　首先确定 $\alpha>0$ 是需要的，这是因为在不知 $\alpha>0$ 时，不能有式(1).

(2) **分析**　从计算非铅直渐近线入手 .

精解　对选项(C)，由于

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0.$$

所以，曲线 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 有渐近线 $y=x$.

因此本题选(C).

附注　对于曲线 $y=y(x)$，如果极限

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}\text{与 }b=\lim_{x\to\infty}[y(x)-ax]$$

都存在，则该曲线有非铅直渐近线 $y=ax+b$.

(3) **分析**　对 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 与 $[x,1]$ $(x\in(0,1))$ 上应用拉格朗日中值定理证明 .

精解　当 $x\in(0,1)$ 时，对 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 与 $[x,1]$ 上应用拉格朗日中值定理，于是由

$$f(x)=f(0)+f'(\xi_1)x\quad(\xi_1\in(0,\ x)),$$
$$f(x)=f(1)+f'(\xi_2)(x-1)\quad(\xi_2\in(x,\ 1))$$

得

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)(1-x)+f(1)x+[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]x(1-x)\\&=g(x)-f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)x(1-x)\quad(\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)\subset(0,1)).\end{aligned}$$

所以，当 $f''(x)\geqslant0(x\in(0,1))$ 时，有 $f(x)\leqslant g(x)(x\in(0,1))$. 此外 $f(0)=g(0)$，$f(1)=g(1)$，故有，$f(x)\leqslant g(x)(x\in[0,\ 1])$.

因此本题选 D.

附注　当 $f''(x)>0(x\in[0,1])$ 时，有 $f(x)\leqslant g(x)(x\in[0,1])$，其中仅在点 $x=0$，1 处取等号 . 当 $f''(x)\geqslant0(x\in[0,1])$ 时，有 $f(x)\leqslant g(x)(x\in[0,1])$，但是取等号处不限于

点 $x=0$ 与点 $x=1$.

(4) **分析** 先算$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}$与$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$，然后用公式计算曲线在对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径.

精解 由于$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=1}=\left.\left(1+\frac{2}{t}\right)\right|_{t=1}=3$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=1}=\left.\frac{-\frac{2}{t^2}}{2t}\right|_{t=1}=-1,$$

所以，所求的曲率半径为

$$R=\left.\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}\right|_{t=1}=\frac{(1+9)^{\frac{3}{2}}}{1}=10\sqrt{10}.$$

因此本题选(C).

附注 曲线 $y=y(x)$ 在点$(x_0, y(x_0))$处的曲率为

$$K=\left.\frac{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=x_0},$$

所以，在该点处曲线的曲率半径为

$$R=\left.\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}\right|_{x=x_0}.$$

(5) **分析** 先算出 ξ^2 的表达式，然后计算极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}$.

精解 由 $f(x)=f'(\xi)x$，即 $\arctan x=\frac{x}{1+\xi^2}$得 $\xi^2=\frac{x}{\arctan x}-1$.

于是有 $\frac{\xi^2}{x^2}=\frac{\frac{x}{\arctan x}-1}{x^2}=\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}$.

由此得到 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3(1+x^2)}=\frac{1}{3}.$$

因此本题选(D).

附注 题中的$f(x)=f'(\xi)x$ 是$f(x)$在$[0, x]$(或$[x, 0]$)上应用拉格朗日中值定理得到

的，其中 $\xi \in (0, x)$（或 $(x, 0)$），是其中值.

（6）**分析**　用反证法证明 $u(x, y)$ 在 D 的内部取不到最大值和最小值.

精解　设函数 $u(x, y)$ 在点 (x_0, y_0)（其中 (x_0, y_0) 位于 D 的内部）取到最大值，则 $u(x_0, y_0)$ 是极大值，故有

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial u}\right)^2\right]\bigg|_{(x_0,y_0)}\geqslant 0.$$

但由题设知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2<0.$$

以上矛盾表明 $u(x, y)$ 在 D 的内部取不到最大值. 同理可知，$u(x, y)$ 在 D 的内部也取不到最小值. 但连续函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上必取到最大值与最小值，所以 $u(x, y)$ 的最大值与最小值都在 D 的边界上取到.

因此本题选(A).

附注　当 $u(x,y)$（具有连续的二阶偏导数）在点 (x_0,y_0) 处取到极值时，未必有 $\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\bigg|_{(x_0,y_0)}>0$，但必有

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\bigg|_{(x_0,y_0)}\geqslant 0.$$

（7）**分析**　按第 1 行展开即可.

精解
$$\begin{vmatrix}0 & a & b & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a & 0 & b\\ 0 & d & 0\\ c & 0 & d\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}a & 0 & b\\ 0 & c & d\\ c & 0 & d\end{vmatrix}$$

$$=-a(ad^2-bcd)+b(acd-bc^2)=-(ad-bc)^2.$$

因此本题选(B).

附注　本题可按任一行(列)展开计算.

（8）**分析**　按向量组线性无关的定义进行推理.

精解　设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则对常数 λ_1，λ_2 有

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}，\text{即 }\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_1 k+\lambda_2 l)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

时，必有 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由此可知，$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

但反之未必成立，例如 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 却线性相关.

因此本题选(A).

附注　本题的必要性也可证明如下：

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量组，则由

$(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ k & l & 1\end{pmatrix}$ 及矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ k & l & 1\end{pmatrix}$ 可逆知，$\boldsymbol{\alpha}_1$

$+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

二、填空题

(9) **分析** 按收敛反常积分的牛顿-莱布尼茨公式计算.

精解 由于所给的反常积分是收敛的，所以

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+2^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\bigg|_{-\infty}^{1}=\frac{\pi}{8}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{8}.$$

附注 对收敛的反常积分，也有与定积分类似的牛顿-莱布尼茨公式，以 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 为例.设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)\overset{\text{记}}{=\!=\!=}F(x)\bigg|_a^{+\infty}.$$

(10) **分析** 先算出 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的表达式，然后利用 $f(x)$ 的周期性和奇偶性算出 $f(7)$.

精解 由于 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$. 于是

$$f(x)=f(0)+\int_0^x 2(t-1)\mathrm{d}t=x^2-2x\quad(x\in[0,2]).$$

由于 $f(x)$ 是以4为周期的奇函数，所以

$$f(7)=f(-1)=-f(1)=1.$$

附注 写出 $f(x)$ 在 $[0,4]$（即一个周期）上的表达式.

由 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$ 知，$x\in[-2,0)$ 时，$f(x)=-x^2-2x$.
从而当 $x\in[2,4]$ 时，$f(x)=f(x-4)=-(x-4)^2-2(x-4)=-x^2+6x-8$. 因此

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\in[0,2],\\ -x^2+6x-8, & x\in(2,4].\end{cases}$$

(11) **分析** 由所给方程确定 $z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 存在且为唯一，解出 z，然后计算 $\mathrm{d}z$，并将 $x=y=\frac{1}{2}$，z 代入即可.

精解 将 $x=y=\frac{1}{2}$ 带入方程得 $\mathrm{e}^z+z=1$，可看出 $z=0$ 为满足条件的解. 把原方程看成三元函数 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z-\frac{7}{4}$，则有 $f_x=1$，$f_y=2z\mathrm{e}^{2yz}+2y$，$f_z=2y\mathrm{e}^{2yz}+1$. 将 z 看成 x 和 y 的函数，把 $x=y=\frac{1}{2}$ 代入 f_y，f_z 则有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z}=-\frac{1}{2}$，$\frac{z}{y}=-\frac{f_y}{f_z}=-\frac{1}{2}$，所以 $\mathrm{d}z\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$.

(12) **分析** 将 L 的极坐标方程转换成参数方程，然后计算切线的直角坐标方程.

精解 由于 L 的方程可以写成参数为 θ 的方程

$$\begin{cases}x=r\cos\theta=\theta\cos\theta,\\ y=r\sin\theta=\theta\sin\theta,\end{cases}$$

且 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 对应的 $x=0$，$y=\frac{\pi}{2}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$. 所以，所求的切线的直角坐标方程为

$$y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0),\ \text{即}\ y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}.$$

附注　当曲线的极坐标方程为 $r=r(\theta)$ 时，它的参数方程为

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}(\text{此时 }\theta\text{ 为参数}).$$

(13) **分析**　由于质心坐标 $\bar{x}=\dfrac{\int_0^1 x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1\rho(x)\,\mathrm{d}x}$，所以只要算出上式中的两个定积分即可.

精解　由于 $\int_0^1\rho(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(-x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right)\right|_0^1=\frac{5}{3}$,

$$\int_0^1 x\rho(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(-x^3+2x^2+x)\,\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\right|_0^1=\frac{11}{12},$$

所以，质心坐标 $\bar{x}=\dfrac{\int_0^1 x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1\rho(x)\,\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\dfrac{11}{20}$.

附注　当区间 $[a,b]$ 上有质量分布，其密度为 $\rho(x)$，则质心坐标

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b\rho(x)};$$

当平面区域 D 上有质量分布，其密度为 $\rho(x,y)$，则质心坐标

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma},\ \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}.$$

对于空间区域 Ω 也有相应的质心坐标计算公式.

(14) **分析**　用配平方的方法将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 转换成标准形即可确定 a 的取值范围.

精解　由于

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=[x_1^2+2ax_1x_3+(ax_3)^2]-[x_2^2-4x_2x_3+(2x_3)^2]+(4-a^2)x_3^2\\&=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2\\&=y_1^2-y_2^2+(4-a^2)y_3^2\quad(f(x_1,x_2,x_3)\text{ 的标准形})\end{aligned}$$

$\left(\text{其中}\begin{cases}y_1=x_1+ax_3,\\ y_2=x_2-2x_3,\\ y_3=x_3,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1=y_1-ay_3,\\ x_2=y_2+2y_3,\\ x_3=y_3\end{cases}\text{是可逆线性变换}\right)$，所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的负惯性指数为 1 时，a 应满足 $4-a^2\geqslant 0$，故 a 的取值范围为 $[-2,2]$.

附注 对二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 进行可逆线性变换，不改变其矩阵的秩，也不改变其正惯性指数(或负惯性指数)的值.

三、解答题

(15) **分析** 用洛必达法则计算所给的$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限.

精解
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x}{2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$$
$$\xlongequal{\text{令 } u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}.$$

附注 本题也可以用以下方法求解：
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{\int_0^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$$
$$\xlongequal{\text{以下同题解}}\frac{1}{2}.$$

本题是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限计算，在基础篇第二章六及提高篇 01 中可以找到类似的例题.

(16) **分析** 由所给微分方程及 $y(2)=0$ 算出 $y=y(x)$ 及 y'，y''，由此即可算出 $y(x)$ 的极大值与极小值.

精解 将所给微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$改写成
$$(y^2+1)dy=(1-x^2)dx \tag{1}$$
即$\frac{1}{3}y^3+y=x-\frac{1}{3}x^3+C$，将 $y(2)=0$ 代入得 $C=\frac{2}{3}$. 所以$\frac{1}{3}y^3+y=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$.

由式(1)得 $y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}$. 所以 $y(x)$的可能极值点为 $x=-1$，1，显然 $y(-1)=0$，$y(1)=1$.

由于$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-1}=\left.\frac{-2x(1+y^2)-(1-x^2)2yy'}{(1+y^2)^2}\right|_{x=-1}=2>0$，所以 $y(x)$的极小值为 $y(-1)$

$=0$，

由于$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1}=\left.\dfrac{-2x(1+y^2)-(1-x^2)2yy'}{(1+y^2)^2}\right|_{x=1}=-1<0$，所以 $y(x)$ 的极大值为 $y(1)=1$.

附注　本题是函数极值计算与微分方程求解的综合题，在提高篇06，013中给出了这类综合题的典型例子.

(17) **分析**　由于积分区域是角域的一部分，所以用极坐标计算所给的二重积分.

精解
$$\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{r\cos\theta\sin(\pi r)}{r(\cos\theta+\sin\theta)}r\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\cdot\int_1^2 r\sin(\pi r)\mathrm{d}r,$$

其中，
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta+\sin\theta}+\frac{\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\theta+\sin\theta}\right]\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2(\cos\theta+\sin\theta)}\mathrm{d}(\cos\theta+\sin\theta)$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$
$$\int_1^2 r\sin(\pi r)\mathrm{d}r=-\frac{1}{\pi}\int_1^2 r\mathrm{d}\cos(\pi r)=-\frac{1}{\pi}\left[r\cos(\pi r)\Big|_1^2-\int_1^2\cos(\pi r)\mathrm{d}r\right]$$
$$=-\frac{3}{\pi},$$

所以
$$\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\left(-\frac{3}{\pi}\right)=-\frac{3}{4}.$$

附注　当积分区域 D 是角域一部分，即 $D=\{(r,\theta)\mid r_0\leqslant r(\theta)\leqslant r_1,\ 0\leqslant\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi\}$ 时，通常用极坐标计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（其中 $f(x,y)$ 在 D 及其边界上连续）.

在基础篇第三章八及提高篇12中可以找到类似的例题.

(18) **分析**　先计算$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}$与$\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}$，并利用它们满足的等式得到关于 $f(u)$ 的微分方程，然后求解该微分方程得到 $f(u)$ 的表达式.

精解　由 $\mathrm{d}z=f'(u)[\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x+(-\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}y]$（其中 $u=\mathrm{e}^x\cos y$）得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\mathrm{e}^x\cos y,\quad\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)(-\mathrm{e}^x\sin y),$$

所以，$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=f''(u)\mathrm{e}^{2x}\cos^2y+f'(u)\mathrm{e}^x\cos y$，$\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=f''(u)\mathrm{e}^{2x}\sin^2y-f'(u)\mathrm{e}^x\cos y$.

从而由所给等式得
$$f''(u)\mathrm{e}^{2x}=[4f(u)+u]\mathrm{e}^{2x},$$

即
$$f''(u)-4f(u)=u.\text{（二阶常系数非齐次线性微分方程）}\tag{1}$$

由于 $f''(u)-4f(u)=0$ 有通解 $F=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$，以及 $f''(u)-4f(u)=u$ 有特解 $f^*=-\frac{1}{4}u$. 所以式(1)的通解为

$$f(u)=F+f^*=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u, \tag{2}$$

且

$$f'(u)=2C_1e^{2u}-2C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}. \tag{3}$$

将 $f(0)=f'(0)=0$ 代入式(2)、式(3)得 $C_1=\frac{1}{16}$，$C_2=-\frac{1}{16}$，将它们代入式(2)得

$$f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u.$$

附注 本题是偏导数计算与求解二阶常系数线性微分方程的综合题，应熟练掌握一、二阶偏导数的计算和二阶常系数线性微分方程的解法.

在提高篇14中可以找到与本题十分相似的例题.

(19) **分析** (Ⅰ) 可由 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$ 直接得到.

(Ⅱ) 将欲证不等式中的 b 换成 x，然后利用对变上限积分求导数的方法证明.

精解 (Ⅰ) 对 $x\in[a,b]$，由 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$ 得

$$\int_a^x 0\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x \mathrm{d}t, \text{即 } 0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a.$$

(Ⅱ) 将欲证不等式中的 b 改为 x，并记

$$F(x)=\int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} f(u)\mathrm{d}u-\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$\begin{aligned}F'(x)&=\left[f\left(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)-f(x)\right]g(x)\\&\leqslant[f(a+(x-a))-f(x)]g(x)\\&\quad(\text{利用} f(x) \text{ 在}[a,b]\text{上单调增加及(Ⅰ)的结论})\\&=0,\end{aligned}$$

所以，$F(b)\leqslant F(a)=0$，即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

附注 含定积分的不等式的证明方法在基础篇九及提高篇05中有详细叙述，并在其中可以找到与本题相似的例题.

(20) **分析** 先写 $f_n(x)$ 的表达式，并由此计算 S_n，然后求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

精解 根据函数列的定义得 $x\in[0,1]$ 时.

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{1+x},$$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x},$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}}=\frac{x}{1+3x},$$

依此类推得$f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}\quad(n=4,\ 5,\ \cdots).$

由于$f_n(0)=0$，$f_n'(x)=\dfrac{1}{(1+nx)^2}>0(x\in[0,\ 1])$，所以由曲线$y=f_n(x)$，直线$x=1$及$x$轴围成的概图如图B. 14. 1的阴影部分所示．由此得到

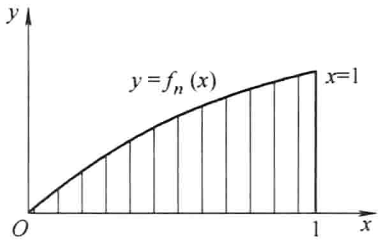

图　B. 14. 1

$$\begin{aligned}nS_n&=n\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{nx}{1+nx}\mathrm{d}x\\&=1-\frac{1}{n}\ln(1+nx)\Big|_0^1\\&=1-\frac{1}{n}\ln(1+n)\quad(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}nS_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{n}\ln(1+n)\right]=1.$

附注　照理对$n=1,\ 2,\ \cdots,\ f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}(x\in[0,\ 1])$需用数学归纳证明．具体如下：

显然$n=1,\ 2$时，$f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}(x\in[0,\ 1])$是正确的．现设$f_k(x)=\dfrac{x}{1+kx}(x\in[0,\ 1])$，则对$x\in[0,\ 1]$有

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=\frac{\frac{x}{1+kx}}{1+\frac{x}{1+kx}}=\frac{x}{1+(k+1)x},$$

于是，对$n=1,\ 2,\ \cdots,\ f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}(x\in[0,\ 1])$正确．

(21) **分析**　先算出$f(x,y)$的表达式，画出曲线$f(x,y)=0$与y轴围成的平面图形，然后按公式计算旋转体体积．

精解　由$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$得$f(x,y)=(y+1)^2+\varphi(x)$．于是将

$$f(y,y)=(y+1)^2+\varphi(y)$$

与所给的$f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)$比较得$\varphi(y)=y-2$，从而

$$f(x,y)=(y+1)^2+x-2.$$

于是由曲线$f(x,y)=0$与y轴围成的平面图形D如图B. 14. 2阴影部分所示，于是D绕直线$y=-1$旋转一周而成的旋转体体积

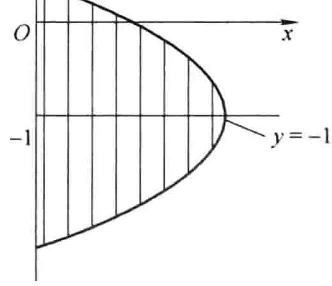

图　B. 14. 2

$V=D$的位于直线$y=-1$以上部分绕该直线旋转一周而成的