分数阶控制器设计方法与振动抑制性能分析

李 文 赵慧敏 著

科学出版社

分数阶控制器设计方法与振动抑制性能分析

李　文　赵慧敏　著

科学出版社

内 容 简 介

本书主要围绕分数阶微积分算子的近似化方法、分数阶控制器实现方法、基于神经网络的分数阶控制器参数整定方法、基于电机振动与定子电流频谱分析的分数阶控制器性能分析以及对交流电机调速系统测控平台与分数阶控制器设计平台等问题进行了详细论述与说明。

全书共 11 章，主要分为分数阶微积分基本理论、分数阶微积分算子的近似方法、分数阶 $PI^{\alpha}D^{\beta}$控制器的设计与实现、分数阶交流电机调速系统的建立、交流电机振动频谱特性与分数阶 $PI^{\alpha}D^{\beta}$控制器振动抑制性能分析六部分。

本书可作为自动化与智能控制领域的高年级本科生、研究生、科研工作者和工程技术人员的教学与参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

分数阶控制器设计方法与振动抑制性能分析/李文，赵慧敏著. —北京：科学出版社，2014. 6

ISBN 978-7-03-041010-8

Ⅰ. ①分…　Ⅱ. ①李…　②赵…　Ⅲ. ①数字控制器　Ⅳ. ①TM571. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 124897 号

责任编辑：姚庆爽 / 责任校对：桂伟利
责任印制：肖　兴 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2014 年 6 月第　一　版　　开本：720×1000 1/16
2014 年 6 月第一次印刷　　印张：14 1/2
字数：292 000

定价：70.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

从 1695 年提出分数阶微积分至今已有三百多年的历史。分数阶微积分在这三百多年的发展过程中,主要经历了纯数学研究、分数阶微积分基本理论研究、分数阶微积分理论与应用研究三个阶段。在第三个阶段中,分形学鼻祖美国耶鲁大学 Mandelbrot 教授为推动分数阶微积分理论与应用的发展做出了重要贡献。他首先将 Riemann-Liouville 分数阶微积分定义应用于分析和研究分形媒介中的布朗运动,提出了分形学说,并指出在自然界和科学技术中存在着大量的分数维,亦即在事物的整体和部分之间有着自相似的特性。他将寻找混沌吸引子普适常数的物理内容转化为研究分形维数的物理意义。该研究表明,整数阶微积分有效地描述了 Euclid 空间,而分数阶微积分则有效地描述了分数维空间。分数阶微积分理论的这一成功应用为分形几何和分数维动力学研究提供了基础和有力工具,同时也极大地促进了分数阶微积分在松弛、生物组织、高分子材料的解链、混沌与湍流、随机游走、统计与随机过程、黏弹性力学及非牛顿流体力学、电化学、振动抑制、信号与图像处理等诸多方面得到应用。

电机振动抑制一直受到相关领域的关注,为了解决振动所带来的危害,长期以来人们提出了各种主动、被动和半主动控制方法。这些振动抑制方法是通过优化设备结构、增加减振材料或装置等来实现的,通常具有较好的振动抑制作用,但同时也增加了系统结构的复杂性。在传统线性时不变控制理论中,通常假设系统为刚性系统,且被控对象模型和控制器模型均为整数阶次。然而,这样的假设与实际系统总是存在一定差距的。分数阶微积分理论的发展,为刻画分数阶系统提供了理论基础与手段。传统线性时不变整数阶控制系统的校正是通过增加整数阶的超前或滞后环节来实现的,从系统的幅频特性与相频特性角度来看,这种校正属于“有级”校正。如果将整数阶校正环节的阶次一般化为分数阶次,显然可以方便地改变校正环节的幅频特性与相频特性,提高系统校正的灵活性,从而可以有效提高系统的控制性能。

基于上述考虑,作者与研究小组在国家自然科学基金(铁道联合资助)项目“牵引电机传动系统振动与噪声分数阶控制研究”(项目编号:60870009)、国家高技术研究发展计划(863)项目“复杂装备运维服务专业化构件与系统开发”(项目编号:2012AA040912)以及辽宁省学科提升计划专项基金的资助下,以交流电机转速控制系统为背景,探讨了在不改变原有系统结构复杂性的前提下,从控制律的角度如

何进一步提高交流电机振动抑制性能问题；通过电机振动频谱分析，研究了分数阶 $PI^{\alpha}D^{\beta}$控制器的振动抑制特性。为了将多年来关于分数阶 $PI^{\alpha}D^{\beta}$控制器振动抑制性能研究所取得的一些有价值的研究成果提供给从事相关研究的研究人员、高等院校师生及工程技术人员，以期能为他们提供一些有益的借鉴，同时也希望能够得到他们的指导，将研究成果经过整理形成了本书。

本书的特点在于从控制律的角度探讨控制器对电机振动抑制的性能问题，用电机振动频谱特征来分析控制器的振动抑制性能。采用这种角度，着眼于控制器的振动抑制性能分析突破了常规的控制器性能分析思路，是对现有控制器性能分析方法的一种补充，同时也为主动振动控制提供有益的借鉴。

全书共 11 章，主要分为分数阶微积分基本理论、分数阶微积分算子的近似化方法、分数阶 $PI^{\alpha}D^{\beta}$控制器的设计与实现、分数阶交流电机调速系统的建立、交流电机振动频谱特性与分数阶 $PI^{\alpha}D^{\beta}$控制器振动抑制性能分析六部分。第 1 章结合国内外文献资料对分数阶微积分理论发展的各个阶段进行了阐述。第 2 章本着理论上够用、并有一定系统性的原则，重点介绍了现有的、最基本的分数阶微积分相关理论。第 3 章讨论了分数阶微积分算子的近似方法，对常用的直接离散化方法进行了比较，专门讨论了 Oustaloup 逼近阶次的选择问题。第 4 章讨论了基于函数逼近理论的分数阶微积分算子间接离散化问题，提出了基于分数阶微积分算子对数幅频特性的最佳有理逼近方法，并在此基础上提出了联合最优分数阶微积分算子逼近方法。第 5 章分别详细讨论了基于分数阶微积分算子直接离散化方法和间接离散化方法的分数阶 $PI^{\alpha}D^{\beta}$控制器的设计与数值实现方法。第 6 章在简要介绍相关神经网络基本原理基础上，主要阐述了基于 BP 神经网络的分数阶 $PI^{\alpha}D^{\beta}$控制器的设计方法，并给出了参数整定的具体算法。第 7 章专门介绍基于 MATLAB 图形用户界面的分数阶 $PI^{\alpha}D^{\beta}$控制器设计平台，在该平台上可以实现基于最佳有理逼近方法的分数阶 $PI^{\alpha}D^{\beta}$控制器设计。第 8 章详细介绍了交流电机调速系统测控平台的建立，在该测控平台上可以完成不同类型控制器的控制实验，为对比研究各控制器对电机振动的抑制性能提供基础。第 9 章首先从理论上对变频器驱动下的异步电机谐波进行了分析，然后对比分析了在调压器调压调速和变频器变频调速这两种不同调速控制方式下的电机振动频谱，为后续的分数阶控制器振动抑制性能研究提供参考依据。第 10 章讨论了在分数阶 $PI^{\alpha}D^{\beta}$控制器控制下的电机振动频谱特征。对不同频段内的振动与定子电流频谱进行了对比，分析了二者之间的联系。通过对不同控制算法作用下的不同频段振动频谱和定子电流频谱的对比，分析了不同算法对于振动幅度的抑制效果。从整数阶与分数阶控制器控制下的定子电流基波频率处的电流频谱和振动频谱的特征对比，解释了分数阶$PI^{\alpha}D^{\beta}$控

制器具有更好的振动抑制性能的原因。第 11 章从简要介绍二自由度控制的基本概念及控制器结构出发，对干扰观测器的基本思想与设计原理进行了详细的说明与分析，并通过 MATLAB 仿真验证了干扰观测器对干扰的有效抑制作用。

在撰写本书过程中得到了上海交通大学陈善本教授的指导；大连交通大学学科学位办公室和机械工程学院何卫东院长、谭晓东副院长对本书的出版给予了热情支持；同时，大连交通大学杨鑫华、邓武、聂冰、李秀梅等老师，以及武长竞、徐智超、刘君霞、邓楚等研究生为本书的研究工作做出了贡献，在此一并表示最衷心的感谢。

鉴于我们对分数阶控制器振动抑制性能分析的研究还存在许多有待改进之处，书中疏漏在所难免，恳请各位读者给予批评指正。

作　者

2014 年 2 月

目　　录

第1章 绪　论

1.1 分数阶微积分发展概述

分数阶微积分是一个研究任意阶次的微分、积分算子特性及其应用的数学问题，是相对于传统意义上的整数阶微积分提出的。通常意义上的微积分运算，如一阶微分、二阶微分、一阶积分、二阶积分等都是在运算阶次为整数时的微积分运算。顾名思义，分数阶微积分，就是将通常意义下的整数阶微积分运算推广到微积分的阶次为分数的情况。这里，“分数”的概念不仅仅指的是有理分数，也包括阶次为无理小数和复数的情形，因此，“分数阶”是一个统称。同时，在微积分阶次为整数的情况时，分数阶微积分运算就转化为整数阶微积分运算，从这一性质来说，分数阶微积分运算就可以看做是整数阶微积分运算的推广。

关于分数阶微积分问题，早在17世纪整数阶微积分还处在发展阶段时就已经在Leibniz和L'Hospital之间以书信的方式展开了讨论。在1695年，即在Leibniz发表首篇微积分论文的11年前，法国数学家L'Hospital询问Leibniz如何理解当导数阶次为分数时的情形。并特别提到对 $f(x)=x$，当 $n=0.5$ 时，导数 $\mathrm{d}^{0.5}f(x)/\mathrm{d}x^{0.5}$ 的含义是什么。显然当时这个问题是难以回答的。不过Leibniz坚信将积分与微分阶次扩展到非整数阶次是可能的，这里的非整数阶次可以是任意实数，甚至是复数的情况。因此，1695年9月30日，Leibniz在回复L'Hospital所提问题的信中这样写道：“这会导致悖论，不过总有一天会得到有用的结果”，还写道“你可以这样看，分数导数可以在两整数阶导数的阶数之间引入某种插入方法(interpolation)”[1,2]。这一点虽然也是猜测，但毕竟用现在的手段做到了。这封信在历史上不止一次的被公开发表过。人们通常也把1965年9月30日作为分数阶微积分的诞生日。此后关于分数阶微积分的发展大致可分为三个阶段[3]。

1. 1695～1812年纯数学研究阶段

这期间，由于没有物理和力学等相关背景学科的支持，关于分数阶微积分的研究主要是在纯数学领域中进行。从1695年到1812年的这一百多年间，虽然有Euler、Bernoulli等一大批数学家的关注，但分数阶微积分与分数阶微分方程仍然只是数学界的一些讨论和猜测而已。1730年Euler对分数阶次的微分给出了自己的解释。1772年Lagrange提出了整数阶微分运算阶次的可叠加性性质，但是尚不知道对于分数阶微分运算是否同样具有该性质。

2. 1812～1974 年分数阶微积分基本理论发展阶段

在这个时期,分数阶微积分经历了从逐渐提出分数阶微积分的相关概念、名词,给出确切定义和性质,到出现为数不多但确有见地的实际应用发展过程,并于 1974 年出版了第一本分数阶微积分的专著[4]。

1812 年 Laplace 首先通过积分定义了一个分数阶导数,1819 年他又首次使用“任意阶导数”这一名词。同年 Laeroix 给出了如下结论:

当 $y=x$ 时

$$\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}y}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \tag{1.1}$$

1822 年 Fourier 用他自己的函数积分表达式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(a)\mathrm{d}a\int_{-\infty}^{\infty}\cos P(t-a)\mathrm{d}P \tag{1.2}$$

给出了任意阶导数的定义

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(a)\mathrm{d}a\int_{-\infty}^{\infty}\cos P(t-a)\mathrm{d}P \tag{1.3}$$

直到 1832 年,Liouville 才给出了分数阶微分的第一个合理的定义。他在给出第一个应用例子的同时,给出了两个公式,其中之一是由 Gamma 函数来定义的,即在一些假定之下,对 $\alpha\in\mathrm{R}^{+}$,定义 t^{-n}的 α 阶导数

$$\mathrm{D}^{\alpha}t^{n}=\frac{(-1)^{\alpha}\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)}t^{-n-\alpha} \tag{1.4}$$

1847 年 Riemann 在此定义的基础上,对分数阶微积分的定义做了进一步的补充,从而形成了第一个较为完备的 Riemann-Liouville 分数阶微积分定义。此后 Grünwald 和 Letnikov 联合推导出了使用更为广泛的 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义;该定义不仅微分、积分算子有统一的表达式,而且更容易数字实现;并在 1868～1872 年间发表了 4 篇推导分数阶积分的论文,提供了很好的分析与代数技巧。正是 Riemann 和 Liouville 以及 Grünwald 和 Letnikov 所做的研究工作使分数阶微积分理论有了历史性的发展。所有这些学者的研究成果奠定了今天普遍认可的 R-L 分数阶微积分理论基础[5,6]。

到了 1892 年,另一个重要的进步来自于 Heavisid 的线性微分方程的算子解法。当他用 Laplace 变换式对 $s^{\frac{1}{2}}$ 进行逆变换时,得到微分算子

$$\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}=\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}t^{\frac{1}{2}}} \tag{1.5}$$

并将其运用于电路理论之中。最终人们还把这一算子解法与分数阶微积分和分数

阶微分方程很好地联系起来。

总之,这一时期的分数阶微积分发展可以概括如下:分数阶微积分最早有系统化的研究是由 Liouville(1832)、Riemann(1853)和 Holmgren(1864)在 19 世纪初期和中叶完成的,但 Grunwald 和 Krug 最先统一了 Liouville 和 Riemann 的分数阶微积分定义。后来人们针对分数阶微积分从不同角度又给出了一些不同的定义,如 Grünwald 分数阶微积分、Weyl-Marchaud 分数阶微积分、局部分数阶微分、Caputo 分数阶微积分等。并基于这些定义,进行了类似经典微积分的研究,讨论了它们的一些性质。然而,由于缺少明确的物理意义以及应用前景不明朗,这一时期分数阶微积分的发展比较缓慢。

3. 1974 年至今分数阶微积分迅速发展阶段

1974 年以来,分数阶微积分在应用数学、材料力学、生物物理学等领域的应用使得分数阶微积分的研究受到更多研究者的关注,广泛的应用背景推动了分数阶微积分的研究系统而快速的发展。应用化学专家 Oldham 和 Spanier 在 1974 年联合出版了第一本关于分数阶微积分理论与应用的著作《The Fractional Calculus: Theory and Applications, Differentiation and Integration to Arbitrary Order》[4],书中包含了分数阶微积分理论的一些古典内容,它的发表标志着分数阶微积分理论与应用的研究进入了一个新的时代。

分形学鼻祖美国耶鲁大学 Mandelbrot 教授为推动分数阶微积分理论与应用的发展做出了重要贡献。他首先将 Riemann-Liouville 分数阶微积分定义应用于分析和研究分形媒介中的布朗运动,提出了分形学说[7,8]。Mandelbrot 教授指出,在自然界和科学技术中存在着大量的分数维,亦即在事物的整体和部分之间有着自相似的特性。认为混沌在本质上是一种分形,混沌产生于非线性方程的数值计算结果,但描述混沌吸引子的分形维数却不依赖于方程。他将寻找混沌吸引子普适常数的物理内容转化为研究分形维数的物理意义。该研究表明,整数阶微积分有力地描述了 Euclid 空间,相应地,分数阶微积分有力地描述了分数维空间。分数阶微积分理论的这一成功实践,极大地激发了工程技术领域的学者们对分数阶微积分理论和应用研究的关注,使分数阶微积分成为分形几何和分数维动力学的基础和有力工具,并在松弛、生物组织、高分子材料的解链、混沌与湍流、随机游走、统计与随机过程、黏弹性力学及非牛顿流体力学、电化学、振动抑制、信号与图像处理等诸多方面得到应用[9~15]。

这一时期涌现了大量的论文、专著,并举行了多次分数阶微积分理论、分数阶微分方程理论和应用的国际会议。1974 年,由 Ross 召开了第一次关于分数阶微积分及其应用的国际学术交流会,并于 1975 年出版了一部阐述分数阶微积分历史发展的专著[16]。其后,又有一些具有代表性的著作出版,如 Samko 和 Kilbas 等编

著的《The Fractional Calculus: Theory and Applications》[17]，Miller 和 Ross 编著的《An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations》[18]以及 Podlubny 编著的《Fractional Differential Equations》[19]。这些著作介绍了分数阶微积分的计算以及分数阶微积分方程的解法，为分数阶微分和分数阶积分提供了物理解释，并且提出了用矩阵的方法来计算离散分数阶微积分，将 Laplace 变换、Fourier 变换等一些工程中常用工具性知识引入到分数阶控制系统中来，为分数阶控制理论的发展奠定基础。

随着分数阶微积分理论与应用研究的迅速发展，出现了许多有意义的研究成果。为了方便问题讨论与研究成果的介绍，一些关于分数阶微积分理论及应用的专题期刊应运而生，如期刊《Journal of Fractional Calculus(1992)》、《Fractional Calculus and Applied Analysis(1998)》及《Fractional Dynamic Systems(2010)》；另外，在一些包括美国《数学评论》(MR，Mathematical Reviews)在内的专业学科期刊，如《Journal of Vibration and Control》、《Chaos, Solitons and Fractals》、《Journal of Mathematical Analysis and Applications》、《Journal of Nonlinear Dynamics》、《Signal Processing》、《Nonlinear Analysis》、IEEE 部分会刊、《SIAM》等数十种期刊的分类目录中都已列出专项，对分数阶微积分的理论和应用研究成果进行报道[20]。

1.2 分数阶微积分定义发展简介

1.2.1 各种定义的提出

自从 1695 年 Leibniz 和 L'Hospital 开始关于分数阶微积分的讨论以后，许多著名数学家从各自不同的角度开展了分数阶微积分理论的研究，给出了不同的分数阶微积分定义[21]。当时 Leibniz 对求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{nt}$ 的分数阶微分给出了一个可能的解决方法是

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha \mathrm{e}^{nt}}{\mathrm{d}t^\alpha}=n^\alpha \mathrm{e}^{nt} \tag{1.6}$$

式中，n 为正整数；α 为非整数。

1730 年，Euler 提出对函数 $f(t)=t^n$，当 α 为负数或非整数(非有理)值时的导数使用下列关系式[22]：

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha t^n}{\mathrm{d}t^\alpha}=n(n-1)\cdots(n-\alpha+1)t^{n-\alpha} \tag{1.7}$$

因为

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots(n-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha+1) \tag{1.8}$$

将式(1.8)代入式(1.7)有

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}t^{n}}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}t^{n-\alpha} \tag{1.9}$$

以 $n=1,\alpha=1/2$ 为例,将其代入式(1.9)则可得出函数 $f(t)=t$ 的 1/2 次微分

$$\frac{\mathrm{d}^{1/2}t}{\mathrm{d}t^{1/2}}=\sqrt{\frac{4t}{\pi}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{1/2} \tag{1.10}$$

1822 年,Fourier 在给出任意函数微分定义的一般化表达之前,首先引入函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}p^{n}\cos(pt-pz)\mathrm{d}p \tag{1.11}$$

他利用 $f(t)$的积分表达给出了分数阶微分的定义。当 n 为整数时有

$$\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}t^{n}}\cos p(t-z)=p^{n}\cos\left[p(t-z)+\frac{1}{2}n\pi\right] \tag{1.12}$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}p^{\alpha}\cos\left[p(t-z)+\alpha\frac{\pi}{2}\right]\mathrm{d}p \tag{1.13}$$

式(1.13)则是函数 $f(t)$当 n 为非整数 α 时的分数阶微分定义。Fourier 指出:“数 n 可以被看做是任意值,无论是正的还是负的”。

1819 年 Lacroix 给出了第一个有意义的幂函数分数阶微分定义[23]

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\frac{n!}{(n-\alpha)!}t^{n-\alpha},\quad n\geqslant\alpha \tag{1.14}$$

他将该分式函数用 Gamma 函数来表示,得到

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}t^{n-\alpha},\quad n\geqslant\alpha \tag{1.15}$$

由于 Lacroix 的这种定义方法不能够应用到其他函数中,所以它不适用更宽泛的研究。

1832 年,Liouville 开始致力于分数阶微积分的研究,他从整数阶次的微分

$$\mathrm{D}^{n}\mathrm{e}^{at}=a^{n}\mathrm{e}^{at} \tag{1.16}$$

入手,将式(1.16)扩展到任意阶次

$$\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{e}^{at}=a^{\alpha}\mathrm{e}^{at},\quad \alpha\in\mathrm{R} \tag{1.17}$$

并提出了这样的假设,如果一个函数 $f(t)$可以被展成如式(1.18)形式的级数

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}\mathrm{e}^{a_{n}t},\quad \mathrm{Re}(a_{n})>0 \tag{1.18}$$

则 $f(t)$的任意阶次的导数为

$$\mathrm{D}^{\alpha}f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}a_{n}^{\alpha}\mathrm{e}^{a_{n}t} \tag{1.19}$$