普通高等教育“十一五”国家级规划教材

新编经济应用数学

（微分学 积分学）（第五版）

PUTONG GAODENG JIAOYU
SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI

新世纪高职高专教材编审委员会组编

主编 李凤香 主审 关革强

大连理工大学出版社

普通高等教育“十一五”国家

新编经济应用数学

（微分学 积分学）

（第五版）

新世纪高职高专教材编审委员会组编

主 审 关革强

主 编 李凤香 副主编 程敬松 张素华 赵文茹

XINBIAN JINGJI YINGYONG SHUXUE

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新编经济应用数学(微分学 积分学) / 李凤香主编 .—5版.—大连:大连理工大学出版社,2006.12
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 7-5611-2141-5

Ⅰ.新… Ⅱ.李… Ⅲ.经济数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037121 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:12.5 字数:277 千字
印数:46001 ~ 50000
2002 年 8 月第 1 版 2006 年 12 月第 5 版
2006 年 12 月第 9 次印刷

责任编辑:赵 部 责任校对:楚信谱
封面设计:波 朗

定 价:18.00 元

总序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代，我们已经跨入了21世纪的门槛。

20世纪与21世纪之交的中国，高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命，我们正在对传统的普通高等教育的培养目标与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20世纪最后的几年里，高等职业教育的迅速崛起，是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里，普通中专教育、普通高专教育全面转轨，以高等职业教育为主导的各种形式的培养应用型人才的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步，其来势之迅猛，发人深思。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育，还是迅速推进着的培养应用型人才的高职教育，都向我们提出了一个同样的严肃问题：中国的高等教育为谁服务，是为教育发展自身，还是为包括教育在内的大千社会？答案肯定而且惟一，那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会，它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之，教育资源必须按照社会划分的各个专业（行业）领域（岗位群）的需要实施配置，这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题，这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育目的问题。

如所周知，整个社会由其发展所需要的不同部门构成，包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门，等等。每一个部门又可作更为具体的划分，直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标，就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命，而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑（在市场经济条件下尤其如此）。可以断言，按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才，是教育体制变革的终极目的。

随着教育体制变革的进一步深入，高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应，我们姑且不论。但高等教育走应用型人才培养的道路和走研究型(也是一种特殊应用)人才培养的道路，学生们根据自己的偏好各取所需，始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起，既是高等教育体制变革的结果，也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展，必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育，它从专科层次起步，进而应用本科教育、应用硕士教育、应用博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时，也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说，高等职业教育的崛起，正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高等职业教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程，它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态，直至可以和现存的(同时也正处在变革分化过程中的)研究型人才培养的教育并驾齐驱，还需要假以时日；还需要政府教育主管部门的大力推进，需要人才需求市场的进一步完善发育，尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高职高专教材编审委员会就是由全国100余所高职高专院校和出版单位组成的旨在以推动高职高专教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上，这个联盟始终会以推动高职高专教材的特色建设为己任，始终会从高职高专教学单位实际教学需要出发，以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握，以其纵览全国高职高专教材市场需求的广阔视野，以其创新的理念与创新的运作模式，通过不断深化的教材建设过程，总结高职高专教学成果，探索高职高专教材建设规律。

在微观层面上，我们将充分依托众多高职高专院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势，从每一个专业领域、每一种教材入手，突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制，努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征，在不断构建特色教材建设体系的过程中，逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高职高专教材编审委员会在推进高职高专教材建设事业的过程中，始终得到了各级教育主管部门以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与，对此我们谨致深深谢意，也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友，在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中，和我们携手并肩，共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高职高专教材编审委员会

2001年8月18日

前　言

《新编经济应用数学(微分学 积分学)》(第五版)是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,也是《新编经济应用数学》的第一分册。

以往的《经济应用数学》大多与普通高等数学没有什么区别,这始终是从事经济应用数学教学的教师们的一个挥之不去的遗憾。因此,组编一部适合高职财经类各专业需要的富有特色的经济应用数学教材的良好愿望推动我们完成了《新编经济应用数学》(第一版)的出版。

《新编经济应用数学》(第一版)提出了一种非常好的思想,就是将数学的相关知识与经济过程中的实际应用联系起来,即在每一部分数学知识的讲述中引进经济应用模型,这是一种有突破意义的贡献。它使经济应用数学向着自己真正意义上的独立分支方面迈出了至关重要的一步。

经过第一版的试用,并结合教学实践,我们又陆续推出了第二版、第三版、第四版教材,不断地实践着编委会教材建设的创新理念——教材建设是建立在教学实践基础上的教材的不断深化、不断完善的过程,不曾停顿过教材修订、完善的脚步。

从一线教师经过一年多的教学实践后反馈的信息来看,第四版教材中还存在这样或那样的不足,这促使我们在第四版的基础上做了更为彻底的改进。具体的改进和调整主要体现在以下几个方面:

1.进一步强化了图形与实例说明,降低了学生掌握同等程度知识的难度。

2.适当地增加了习题数量,并在难易程度上做了比较好的把握,更利于学生消化所学的内容。

3.在每篇的数学模型与应用部分,剔除了部分陈旧的例题和习题,新增了一些实用性强、贴近生活的例题和习题,使之与经济应用的联系更紧密。

经过改进和调整,本教材具有如下特点:

1.结构上。本教材分微分学和积分学两篇,即将微分学与多元函数微分学的知识合并为一篇,统称微分学。这种调整是在总结多年教学实践的基础上,对传统的微积分知识结构的一次突破性尝试。在模块划分上分为两个模块:基本理论和数学模型与应用。将函数与极限的知识作为全书的预备知识。这种结构更有利于初等数学与高等数学的衔接与过渡。全书脉络清晰,便于教师讲授,更利于学生理解。

2.内容上。为了适应高职教育培养实用型人才的需要,对定理证明及理论性过强的内容做了适当的淡化处理,主要利用图形及实例加以直观说明,降低了学生掌握同等程度知识的难度;习题量适中,在难易程度上做了很好的把握,有利于学生消化所学内容,提高数学建模的能力;每篇后配有知识结构图,书后配有综合测试题;全书可读性、趣味性强,有利于培养学生学习数学的兴趣。

3.附录中介绍了 Mathematica 软件在经济应用数学计算中的应用。通过对此软件的介绍,进一步使学生了解应用计算机快捷地解决数学问题的方法,同时也为学生毕业后从事该职业岗位工作奠定了一定的基础。

4.突出了经济性和应用性,所选数学模型贴近生活实际,使经济与数学恰到好处地结合在一起。

《新编经济应用数学(微分学 积分学)》(第五版)由黑龙江工商职业技术学院李凤香任主编,吉林交通职业技术学院程敬松、辽宁金融职业学院张素华、辽宁工程技术大学职业技术学院赵文茹任副主编。另外,黑龙江工商职业技术学院季霏、彭秋艳老师也参与了部分内容的编写。各篇具体分工如下:程敬松(第 0 篇 0.1.1~0.2.1、第一篇 1.1.1~1.1.4 及复习题一),张素华、程敬松(第一篇 1.1.5~1.2.2),李凤香(第二篇 2.1.1~2.1.10 及复习题二),李凤香、彭秋艳(第二篇 2.2.1、2.2.2 及复习题三),赵文茹(各篇的“数学史话”及综合测试题),季霏(附录 I、附录 II 及习题参考答案),李凤香老师负责统稿。此外,广西工业职业技术学院关革强老师审阅了全部书稿并提出了很多宝贵的建议,在此谨致谢忱。

尽管我们在《新编经济应用数学(微分学 积分学)》(第五版)的特色建设方面做出了很多的努力,但由于能力和水平所限,不当之处仍在所难免,恳请各相关教学单位和读者在使用本教材的过程中继续给予关注,并将意见和建议及时反馈给我们,以便下次修订时改进。

所有意见、建议请发往:gzjckfb@163.com
联系电话:0411-84707492　84706104

编　者

2006 年 12 月

目　　录

第0篇　预备知识

第一篇　微分学

第二篇　积分学

第 0 篇

预备知识

高等数学与中学所学过的初等数学是有很大区别的，初等数学研究的对象基本上是不变的量（常量），而高等数学研究的对象则是变化的量（变量）。函数是客观世界中变量与变量之间相互联系的一种数学抽象，它是高等数学研究的基本对象，而极限是贯穿高等数学始终的一个最重要的基本概念。高等数学中其他的一些重要概念，如微分、积分等，都是用极限来定义的。

本篇我们将从复习函数的概念及性质入手，补充介绍复合函数、分段函数及多元函数的概念，通过讨论数列极限，引出函数极限的概念及求极限的方法，并在此基础上讨论函数的连续性，本篇还对极限理论在经济领域的应用加以介绍。

通过学习要求掌握求函数定义域的基本方法及函数性质的判定方法；会利用极限的运算法则和两个重要极限公式求函数的极限；会判定分段函数在分段点是否有极限、是否连续；掌握复利问题和抵押贷款问题的公式和计算。

第一部分

基本理论

0.1.1 函数

1.常量与变量

在各种自然现象或过程中，经常遇到的量一般可以分为两类：一类在考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们称它为常量；另一类在考察的过程中是变化的，可以取不同的数值，我们称它为变量。例如，北京到上海的直线距离，作匀速直线运动的物体的速度都是常量；一天中的气温，生产过程中的产量，都是不断变化的，它们都是变量。

在理解常量与变量时，应注意以下几点：

(1)常量和变量依赖于所研究的过程，而一个量，在某一过程中是常量，但在另一个过程中可能是变量；反过来也是同样的。例如，某种商品的价格在某一时间段内是常量，但在较长的时间段内则是变量。这说明常量和变量具有相对性。

(2)从几何意义上讲，常量对应着实数轴上的定点，变量则对应着实数轴上的动点。

(3)一个变量所能取的数值的集合叫做这个变量的变动区域。

2.函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个量在变化着，这几个量的变化并不是孤立的，而是相互联系并遵循一定的变化规律，现在我们就两个变量的情形举几个例子。

【例 1】 圆的面积与它的半径之间存在着相依关系，这种关系由公式

$$S = \pi R^2$$

给定，当半径 R 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 S 的相应数值。

【例 2】 自由落体的路程 S 与时间 t 由公式

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

给定，t 的值确定了，S 的值就随之确定了。设落体着地的时刻为 T，则当 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时，由上式就可以确定下落距离 S 的相应数值。

【例 3】 生产某种产品的固定成本为 6800 元，每生产一件产品，成本增加 70 元.那么该种产品的总成本 y 与产量 x 之间的相依关系由公式

$$y = 70x + 6800$$

给定，当产量 x 取任何一个合理的值时，成本 y 有相应的数值与之对应。

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的相依关系，这种相依关系给出了一种对应法则。根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应，而两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质。

定义 1 如果在某变化过程中有两个变量 x、y，D 是一个给定的数集，且对于 D 中的每一个数值 x，按照某种对应法则总有确定的数值 y 和它对应，那么称 y 是 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$，其中 x 称为**自变量**，D 称为函数的**定义域**；当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$。当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的**值域**。

这里 f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应法则，有时函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y = g(x)$、$y = \varphi(x)$ 等。

当函数 $y = f(x)$ 的自变量 $x = x_0$ 时，若函数值 $f(x_0)$ 存在，我们称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 有定义。如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内的每一点都有定义，那么我们称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义。

由定义 1 可以看出，确定函数有两个要素：定义域和对应法则。故对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应法则都分别相同时它们才表示同一函数，而与自变量及因变量用什么字母表示无关。例如，函数 $y = f(x)$ 也可以用 $\varphi = f(\theta)$ 表示。

【例 4】 已知 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$，$f(t^2)$。

解 $f(0) = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$； $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

$f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x-1}{x+1}$； $f(x+1) = \dfrac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = -\dfrac{x}{x+2}$

$f(t^2) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

【例 5】 求下列函数的定义域：

(1) $f(x) = \dfrac{3}{5x^2+2x}$ (2) $f(x) = \sqrt{x+3} + \ln(x-2)$

(3) $f(x) = \lg(4x-3) - \arcsin(2x-1)$

解 (1)在分式 $\dfrac{3}{5x^2+2x}$ 中，分母不能为零，所以 $5x^2 + 2x \neq 0$，解得 $x \neq -\dfrac{2}{5}$ 且 $x \neq 0$。

即定义域为$\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$。

(2)该函数的定义域应满足不等式组

$$\begin{cases}x+3\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$$

解为 $x>2$,即定义域为$(2,+\infty)$。

(3)该函数的定义域应满足不等式组

$$\begin{cases}4x-3>0\\ |2x-1|\leqslant 1\end{cases}$$

解此不等式组,得其定义域为

$$\frac{3}{4}<x\leqslant 1,\text{即}\left(\frac{3}{4},1\right]$$

应当指出,在实际问题中,除了要根据解析式本身来确定自变量的取值范围以外,还要考虑自变量的实际意义,一般来说,经济变量往往取正值,即变量都是大于零的。

3.多元函数的概念

在很多自然现象和实际问题中所涉及的往往是多个变量之间的依存关系。例如矩形面积公式 $S=xy$,描述了面积依赖于长 x 与宽 y 这两个量的关系。一定质量的理想气体的压强 P、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系:$P=\frac{RT}{V}$(其中 R 为常数)。下面我们给出二元函数的定义。

定义 2 如果在某变化过程中有三个变量 x、y 和 z,且当变量 x、y 在一定范围内任取一对值(x,y)时,按照某一确定的对应法则,变量 z 总有惟一确定的值 z 与其相对应,那么称变量 z 为变量 x、y 的**二元函数**,记作

$$z=f(x,y)$$

其中 x、y 称为**自变量**,函数 z 称为**因变量**。自变量 x、y 的变化范围称为函数 z 的**定义域**。对应的函数值的集合称为函数的**值域**。

同一元函数一样,对应法则与定义域是二元函数的两个要素。

类似地可以定义三元函数,进而推广至 n 元函数。

二元及二元以上的函数统称为**多元函数**。

二元函数的定义域的几何表示往往是一个平面区域。

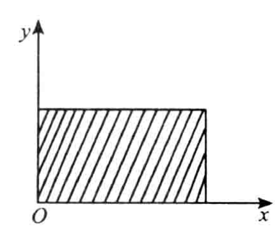

图 0-1

平面区域是坐标平面上满足某些条件的点的集合,围成平面区域的曲线称为该区域的边界,包含边界的平面区域称为**闭区域**(如图 0-1 所示),不含边界的平面区域称为**开区域**,包含部分边界的平面区域称为**半开区域**(如图 0-2 所示)。如果一个区域总可以被包含在一个以原点为圆心的圆域内部,则此区域称为**有界区域**(如图 0-1 和图 0-3 所示),否则称之为**无界区域**(如图 0-2 所示)。

【例 6】 某企业生产某种产品的产量 Q 与投入的劳动力 L 和资金 K 有下面的关系：

$$Q = AL^{\alpha} \cdot K^{\beta}$$

其中 A、α、β 均为正常数，则产量 Q 是劳动力投入 L 和资金投入 K 的函数。在经济学理论中，这一函数称为柯布-道格拉斯(Kobb-Douglas)函数。根据问题的经济意义，函数的定义域为

$$D = \{(L, K) \mid L \geqslant 0, K \geqslant 0\}(\text{如图 0-2 所示})$$

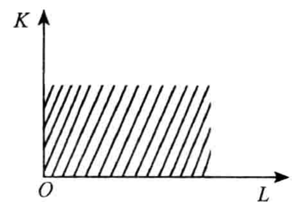

图 0-2

值域为

$$Z = \{Q \mid Q = AL^{\alpha} \cdot K^{\beta}, (L, K) \in D\}$$

【例 7】 求函数 $y = \arcsin(x^2 + y^2)$ 的定义域。

解 要使函数有意义，变量 x、y 必须满足

$$x^2 + y^2 \leqslant 1$$

这就是所求函数的定义域，它是一个有界闭区域(如图 0-3 所示)，是平面上的点集，可记为 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$。

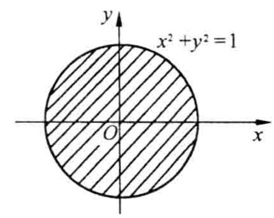

图 0-3

4. 函数的表示法

函数的表示法有解析法、图示法及表格法等，本书不作详述。

5. 分段函数

某市电话局规定市话收费标准为：当月所打电话次数不超过 30 次时，只收月租费 18 元，超过 30 次的每次加收 0.23 元，则电话费 y 和用户当月打电话次数 x 的关系可用下面的形式给出：

$$y = \begin{cases} 18, & x \leqslant 30 \\ 18 + 0.23(x - 30), & x > 30 \end{cases}$$

像这样把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子来分段表达的函数称为**分段函数**。分段函数是微积分中常见的一种函数。

【例 8】 设有分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & -1 < x \leqslant 0 \\ x^2, & 0 < x \leqslant 1 \\ 3 - x, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

(1) 画出函数的图像；

(2) 求此函数的定义域；

(3) 求 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$ 的值。

解 (1) 函数图像如图 0-4 所示；

(2) 函数的定义域为 $(-1, 2]$；

(3) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$。

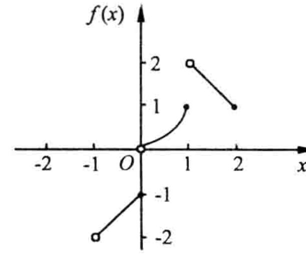

图 0-4

6.函数的几种特征

(1)函数的单调性

定义 3 如果函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,且对于(a,b)内任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么称函数 $f(x)$在(a,b)内是**单调递增**的;如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,那么称函数 $f(x)$在(a,b)内是**单调递减**的。

单调递增函数与单调递减函数统称为**单调函数**。

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增函数;在区间$(-\infty,0]$上是单调递减函数;在$(-\infty,+\infty)$区间内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的(如图 0-5 所示)。

又例如,函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调递增的(如图 0-6 所示)。

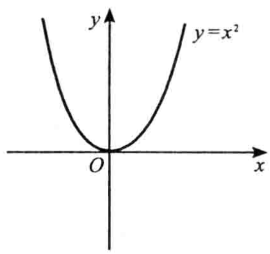

图 0-5

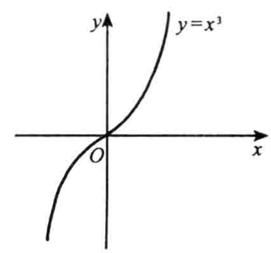

图 0-6

(2)函数的奇偶性

定义 4 如果函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则必有 $-x\in D$),且对于任一 $x\in D$ 都有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立,那么称 $f(x)$为**偶函数**;如果对于任一 $x\in D$ 都有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立,那么称 $f(x)$为**奇函数**。

例如,$f(x)=x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$。又例如 $f(x)=x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$。

偶函数的图像关于 y 轴对称。因为若 $f(x)$是偶函数,则 $f(-x)=f(x)$,所以如果 $A(x,f(x))$是图像上的点,那么它关于 y 轴对称的点$A'(-x,f(x))$也在图像上(如图 0-7 所示)。

奇函数的图像关于原点对称。因为若 $f(x)$是奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,所以如果 $A(x,f(x))$是图像上的点,那么它关于原点对称的点 $A'(-x,-f(x))$也在图像上(如图 0-8 所示)。

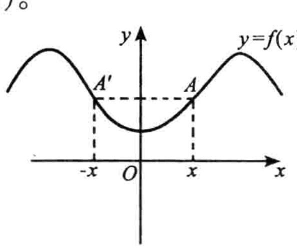

图 0-7

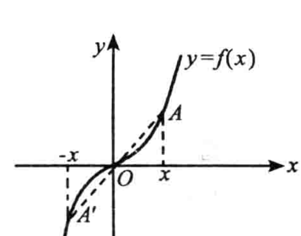

图 0-8

(3) 函数的周期性

定义 5 如果对于给定的函数 $f(x)$,存在一个不为零的数 T,使得对于定义域 D 内的任意 x,当 $(x\pm T)\in D$ 时,有

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,那么称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的**周期**。通常我们说周期函数的周期是指**最小正周期**。

例如,函数 $\sin x$、$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$、$\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数。

(4)函数的有界性

定义 6 如果对于函数 $f(x)$,存在一个正数 M,使得对于定义区间 (a,b) 内的任意 x 的值,对应的函数值均有 $|f(x)|\leqslant M$,那么称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**有界**;如果这样的正数不存在,那么称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**无界**。

对于函数的有界性,要注意以下两点:

①当一个函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界时,正数 M 的取法不是惟一的。例如 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,有 $|\cos x|\leqslant 1$,但我们也可以取 $M=3$,即 $|\cos x|<3$ 总是成立的,实际上 M 可以取任何大于 1 的数。

②有界性是依赖于区间的,例如 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的,但在区间 $(0,1)$ 内是无界的。

7.反函数

某种商品的单价为 P,销售量为 x,则收入 y 是 x 的函数:$y=Px$。这时 x 是自变量,y 是 x 的函数。若已知收入 y,反过来求销售量 x,则有 $x=\frac{y}{P}$。这时 y 是自变量,x 变成 y 的函数了。

上面的两个式子是同一关系的两种写法,但从函数的角度来看,由于对应法则不同,它们是两个不同的函数,我们称它们互为反函数。

定义 7 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数,其值域为 W。如果对于 W 中的每一个值 y,都有惟一一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 的值与之对应,则得到一个定义在 W 上的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数,那么称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记作

$$x=f^{-1}(y)$$

并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**。

当然,我们也可以说 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数,也就是说,它们互为反函数。显然,由定义可知,单调函数一定有反函数。习惯上,我们总是用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$。

直接函数和反函数的图像关于直线 $y=x$ 是对称的。求反函数的过程可以分为两步:第一步是从 $y=f(x)$解出 $x=f^{-1}(y)$;第二步是交换字母 x 和 y,并指明反函数的定义域。

习题 0.1.1

1.判断下列函数是否相同,并说明理由。

(1)$f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$与 $g(x)=x-1$

(2)$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

2.求下列函数的定义域:

(1)$y=\sqrt{x^2-4}+\ln(x-2)$

(2)$y=\dfrac{x^2}{1+x}$

(3)$z=\ln(x+y)$

3.证明函数 $y=\lg x$ 在其定义域内单调上升。

4.判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=x^3-4$

(2)$f(x)=a^x-a^{-x}(a>0)$

(3)$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$

5.求下列函数的反函数:

(1)$f(x)=x^2(x\geqslant 0)$　(2)$f(x)=2^x+1$

6.指出下列函数的最小正周期:

(1)$y=\sin x\cos x$　(2)$y=1+\cot x$

(3)$y=\sin^2 x$　(4)$y=\sin(x+1)$

7.将直径为 d 的圆木料锯成截面为矩形的木材(如图 0-9 所示),列出矩形截面的两条边长之间的函数关系。

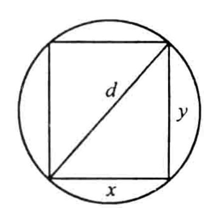

图 0-9

0.1.2 初等函数

1.基本初等函数

我们将已学过的常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**。它们的定义域、值域、图像和性质见表 0-1。