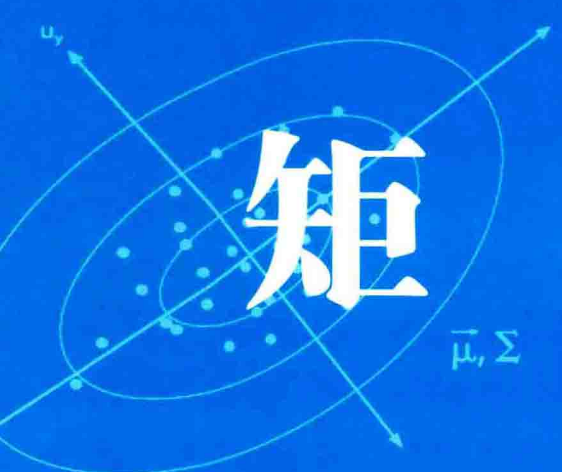
新三导丛书

XIN SANDAO CONGSHU



矩阵论

导教·导学·导考

张凯院 徐 仲◎编

- 自主学习（课后习题详解）
- 课程过关（典型例题解析）
- 教师备课（重点难点归纳）

西北工业大学出版社

新三导丛书

矩阵论导教·导学·导考

（第 3 版）

张凯院　徐　仲　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书对矩阵论课程的基本概念、主要结论和常用方法做了简明扼要的分类总结，对各章节的课后习题做了详细的解答.根据课程要求精选了适量的自测题，并附有答案或提示.书后附录部分收编了18套研究生矩阵论课程的考试真题，并做了详细的解答.

本书叙述简明，概括性强，可作为理、工科研究生和本科高年级学生学习矩阵论课程的辅导书，也可供从事矩阵论教学的教师和有关科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

矩阵论导教·导学·导考/张凯院，徐仲编.—西安：西北工业大学出版社，2014.8
（新三导丛书）
ISBN 978-7-5612-4053-3

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①张…②徐… Ⅲ.①矩阵—理论—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第180178号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号　　邮编：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：兴平市博闻印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：11
字　　数：324千字
版　　次：2014年8月第3版　　2014年8月第1次印刷
定　　价：24.00元

前 言

矩阵论是高等学校和科研院(所)面向研究生开设的一门数学基础课.作为数学的一个重要分支,矩阵理论具有极为丰富的内容;作为一种基本工具,矩阵理论在数学学科以及其他科学技术领域都有非常广泛的应用.因此,学习和掌握矩阵的基本理论与方法,对于研究生来说是必不可少的.

矩阵论课程的理论性强,概念比较抽象,而且有独特的思维方式和解题技巧.读者在学习矩阵论课程时,往往因概念多、结论多、算法多,从而对教学内容的全面理解感到困难.为了配合课堂教学,使研究生更好地掌握该门课程的教学内容,我们编写了本书.

本书根据程云鹏等编写的研究生教材《矩阵论》(第4版)的内容体系,对矩阵论课程的基本概念、主要结论和常用方法做了简明扼要的分类总结,对各章节的课后习题做了详细的解答.根据课程要求精选了适量的自测题,并附有答案或提示.附录部分收编了近年来西北工业大学研究生矩阵论课程(60学时)的考试真题18套,并做了详细的解答.本书对于学习矩阵论课程的研究生以及参加博士生入学矩阵论课程考试的有关人员有很好的辅导作用,对于从事矩阵论教学工作的教师也有一定的参考价值.

近年来,我们不断修订完善《矩阵论》教材,形成了以《矩阵论导教·导学·导考》为学习辅导,以《矩阵论典型题解析及自测试题》(西北工业大学出版社出版)为专项提高的矩阵论系列教材.

我们谨向关心本书和对本书提出宝贵意见的同行与读者表示衷心的感谢.

本书由张凯院、徐仲共同编写,张凯院任主编.

限于水平,书中疏漏和不妥之处在所难免,敬请读者批评指正.

编 者

2014年6月于西北工业大学

符号说明

$\mathbf{R}(\mathbf{C},\mathbf{Q})$	实(复,有理)数集合
$\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$	实(复)n维向量集合
$\mathbf{R}^{m\times n}(\mathbf{C}^{m\times n})$	实(复)$m\times n$矩阵集合
$\mathbf{R}_r^{m\times n}(\mathbf{C}_r^{m\times n})$	秩为r的实(复)$m\times n$矩阵集合
$P_n[t]$	次数不超过n的一元多项式集合
V^n	n维线性空间
$W^{\perp}$	子空间W的正交补
$\dim V$	线性空间V的维数
$\mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\}$	由元素$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$生成的子空间
$\mathbf{0}$	零向量或线性空间的零元素
$\boldsymbol{e}_i$	第i个分量为1,其余分量为0的向量
$\boldsymbol{O}$	零矩阵
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵
$\boldsymbol{E}_{ij}$	第i行第j列元素为1,其余元素为0的矩阵
$\boldsymbol{J}$	Jordan标准形矩阵
$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	以$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为对角元素的对角矩阵
$\det\boldsymbol{A}$	方阵$\boldsymbol{A}$的行列式
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	方阵$\boldsymbol{A}$的迹
$\rho(\boldsymbol{A})$	方阵$\boldsymbol{A}$的谱半径
$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$	方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵
$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的秩
$R(\boldsymbol{A})$	矩阵$\boldsymbol{A}$的值域
$N(\boldsymbol{A})$	矩阵$\boldsymbol{A}$的零空间
$R(T)$	线性变换T的值域
$N(T)$	线性变换T的零空间
$\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})$	矩阵$\boldsymbol{A}$按行拉直的列向量
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的共轭转置
$\boldsymbol{A}^{+}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的Moore-Penrose逆
$\boldsymbol{A}^{(1)}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的$\{1\}$-逆
$\boldsymbol{A}^{(1,j)}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的$\{1,j\}$-逆
$A\{1\}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的$\{1\}$-逆的集合
$A\{1,j\}$	矩阵$\boldsymbol{A}$的$\{1,j\}$-逆的集合

$\boldsymbol{A}^{(d)}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆
$\boldsymbol{A}^{\#}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的群逆
$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的直积
$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	元素 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积
$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$	元素 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交
$\\|\boldsymbol{x}\\|_p$	向量 $\boldsymbol{x}$ 的 p- 范数
$\\|\boldsymbol{A}\\|_F$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数
$V_1\cap V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的交
$V_1\cup V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的并
V_1+V_2	子空间 V_1 与 V_2 的和
$V_1\oplus V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的直和
$\mathrm{Re}(\lambda)$	复数 λ 的实部
$\mathrm{Im}(\lambda)$	复数 λ 的虚部
$\partial f(\lambda)$	多项式 $f(\lambda)$ 的次数

目　　录

第 1 章　线性空间与线性变换

线性空间是向量空间的推广. 具体的线性空间多种多样，其中的元素既可以是向量，也可以是矩阵、多项式、函数等；其中的线性运算既可以是通常的，也可以是特殊的. 线性空间的核心内容是线性变换，它反映了线性空间中元素之间的一种基本联系.

在有限维线性空间中，借助于基的概念可在元素与列向量之间、线性变换与方阵之间建立一一对应关系，从而元素的运算能够转化为列向量的运算，线性变换的运算能够转化为方阵的运算，一般线性空间中的问题能够转化为列向量空间中的问题. 这种转化依赖于三类特殊的矩阵，即两个基之间的过渡矩阵、线性变换在指定基下的矩阵、欧氏(酉)空间中基的度量矩阵.

线性空间中的元素统称为向量，加法运算和数乘运算也使用通常的运算符号.

1.1　基 本 概 念

1. 线性空间

线性空间指引进了加法运算和数乘运算且满足 8 条运算律的某个数域上的非空集合，通常用 V 表示(n 维线性空间记为 V^n).

(1) 实行向量空间　$\mathbf{R}^n = \{\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}\}$

实列向量空间　$\mathbf{R}^n = \{\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} \mid a_i \in \mathbf{R}\}$

复行向量空间　$\mathbf{C}^n = \{\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in \mathbf{C}\}$

复列向量空间　$\mathbf{C}^n = \{\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} \mid a_i \in \mathbf{C}\}$

(2) 实矩阵空间　$\mathbf{R}^{m\times n} = \{\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij} \in \mathbf{R}\}$

复矩阵空间　$\mathbf{C}^{m\times n} = \{\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij} \in \mathbf{C}\}$

(3) 实多项式空间　$P_n[t] = \{f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mid a_i \in \mathbf{R}\}$

复多项式空间　$P_n[t] = \{f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mid a_i \in \mathbf{C}\}$

2. 线性子空间

线性子空间指线性空间中对加法运算和数乘运算封闭的非空子集.

(1) 生成子空间 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m\}$ 或者 $L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)$：设 V 是数域 K 上的线性空间，$\boldsymbol{x}_i \in V\ (i = 1, 2, \cdots, m)$，则

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m\} = \{\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{x}_m \mid k_i \in K\}$$

(2) 矩阵的值域 $R(\boldsymbol{A})$：设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$，则

$$R(\boldsymbol{A}) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\} = \{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n\}$$

(3) 矩阵的零空间 $N(\boldsymbol{A})$：设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则

$$N(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n\}$$

(4) 线性变换的值域 $R(T)$：设 T 是线性空间 V 的线性变换，则

$$R(T) = \{\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V\}$$

(5) 线性变换的核 $N(T)$:设 T 是线性空间 V 的线性变换,则

$$N(T)=\{\boldsymbol{x}\mid T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in V\}$$

(6) 线性变换的特征子空间 V_λ:设 λ 是线性空间 V 中线性变换 T 的一个特征值,则

$$V_\lambda=\{\boldsymbol{x}\mid T\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in V\}$$

3. 线性空间的基

线性空间的基指线性空间 V 中满足下列条件的向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$:①$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性无关;② 任意 $\boldsymbol{x}\in V$ 都可由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性表示.

(1) 向量空间 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ 的简单基为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$,其中 $\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个分量为 1,其余分量为 0 的 n 维向量.

(2) 矩阵空间 $\mathbf{R}^{m\times n}(\mathbf{C}^{m\times n})$ 的简单基为

$$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\cdots,\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{21},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}$$

其中,$\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示第 i 行第 j 列元素为 1,其余元素为 0 的 $m\times n$ 矩阵.

(3) 多项式空间 $P_n[t]$ 的简单基为 $1,t,\cdots,t^n$.

4. 两个基之间的过渡矩阵

过渡矩阵是以线性空间的一个基中各元素在另一个基下的坐标为列向量构成的方阵.

(1) 表示方法:已知线性空间 V^n 的两个基为(Ⅰ)$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$;(Ⅱ)$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$. 设 $\boldsymbol{y}_j$ 在基(Ⅰ)下的坐标为 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,n)$,则由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,基变换公式为

$$(\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{C},\quad (\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=(\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n)\boldsymbol{C}^{-1}$$

[评注] 一般地,上式进行乘法运算时,只能将 $\boldsymbol{x}_i$ 或者 $\boldsymbol{y}_j$ 作为一个"数"看待;比较等号两端的对应"分量"时,亦将 $\boldsymbol{x}_i$ 或者 $\boldsymbol{y}_j$ 作为一个"数"看待.

(2) 主要特征:两个基之间的过渡矩阵是可逆方阵,它的阶数等于线性空间的维数.

5. 元素的坐标

元素的坐标指元素由线性空间的基线性表示时,表示式中的系数构成的列向量.

(1) 表示方法:设线性空间 V^n 的一个基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$,对于任意 $\boldsymbol{x}\in V^n$,有 $\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n$,则 $\boldsymbol{x}$ 在该基下的坐标为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

(2) 主要特征:元素的坐标是列向量,它的维数等于线性空间的维数.

(3) 运算转化:设数域 K 上的线性空间 V^n 的一个基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$,且 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V^n$ 在该基下的坐标分别为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 和$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,则有

1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 在该基下的坐标为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$;

2) $k\boldsymbol{x}$ 在该基下的坐标为 $k\boldsymbol{\alpha}(k\in K)$.

6. 线性变换的矩阵

线性变换的矩阵是以线性空间的基中各元素的像在该基下的坐标为列向量构成的方阵.

(1) 表示方法:设线性空间 V^n 的一个基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$,线性变换为 T,基象组 $T\boldsymbol{x}_1,T\boldsymbol{x}_2,\cdots,T\boldsymbol{x}_n$ 在该基下的坐标依次为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,则 T 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,且有

$$T(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\xlongequal{\text{def}}(T\boldsymbol{x}_1,T\boldsymbol{x}_2,\cdots,T\boldsymbol{x}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}$$

(2) 主要特征:线性变换的矩阵是方阵,它的阶数等于线性空间的维数.

(3) 运算转化:设数域 K 上的线性空间 V^n 的一个基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$,线性变换 T_1 和 T_2 在该基下的矩阵

分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，则有

1) $T_1 + T_2$ 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；

2) kT_1 在该基下的矩阵为 $k\boldsymbol{A}(k \in K)$；

3) T_1T_2 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{AB}$；

4) T_1^{-1} 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$（若 T_1 为可逆变换）.

7. 基的度量矩阵

度量矩阵是以欧氏（酉）空间的基中第 i 个元素与第 j 个元素的内积为 i 行 j 列元素构成的方阵.

(1) 表示方法：设欧氏（酉）空间 V^n 的一个基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$，令 $a_{ij}=(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)(i,j=1,2,\cdots,n)$，则该基的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$.

(2) 主要特征：基的度量矩阵是实对称（Hermite）正定矩阵，它的阶数等于欧氏（酉）空间的维数.

(3) 运算转化：设酉空间 V^n 的一个基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$，该基的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V^n$ 在该基下的坐标（列向量）分别为 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，那么 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{\beta}}$. 当 V^n 为欧氏空间时，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$.

8. 标准正交基

标准正交基指欧氏（酉）空间中由两两正交的单位向量构成的基.

(1) 构造方法：对欧氏（酉）空间的一个基进行 Schmidt 正交化可得正交基，再对正交基进行单位化可得标准正交基.

(2) 主要特征：正交基的度量矩阵是对角矩阵，标准正交基的度量矩阵是单位矩阵.

(3) 运算转化：设欧氏（酉）空间 V^n 的一个标准正交基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$，且 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V^n$ 在该基下的坐标分别为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则有

1) $a_i=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)$，$b_i=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_i)(i=1,2,\cdots,n)$；

2) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=a_1\bar{b}_1+a_2\bar{b}_2+\cdots+a_n\bar{b}_n=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

1.2 主要结论

1. 线性子空间

设 V_1 和 V_2 是线性空间 V^n 的两个子空间，则有

(1) $V_1\cap V_2$ 和 V_1+V_2 是 V^n 的子空间.

(2) $\boxed{V_1\cap V_2} \subset \begin{matrix}\boxed{V_1}\\ \boxed{V_2}\end{matrix} \subset \boxed{V_1+V_2}$.

(3) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$.

(4) 下面四种说法等价：

1) V_1+V_2 是直和；

2) V_1+V_2 中零元素的分解式唯一；

3) $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$；

4) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

(5) 若 V_1+V_2 是直和，则将 V_1 的基与 V_2 的基拼接起来可构成 V_1+V_2 的基.

(6) 若 $V_1=L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$，则 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的最大无关组是 V_1 的基.

(7) 若 $V_1=L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$,$V_2=L(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_l)$,则

$$V_1+V_2=L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_l)$$

(8) 线性空间 V^n 为欧氏(酉)空间时,$V^n=V_1\oplus V_1^{\perp}$.

(9) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$,则有

1) $[R(\boldsymbol{A})]^{\perp}=N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$,且 $\mathbf{C}^m=R(\boldsymbol{A})\oplus N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$;

2) $[R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})]^{\perp}=N(\boldsymbol{A})$,且 $\mathbf{C}^n=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\oplus N(\boldsymbol{A})$.

(10) 设 V^n 的一个基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$,则 $V^n=L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$.

2. 向量组的线性关系

设线性空间 V^n 的一个基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$,且 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_j\in V^n$ 在该基下的坐标分别为 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,m)$,则有

(1) $\boldsymbol{y}$ 可由 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m$ 线性表示的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示.

(2) $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m$ 线性相(无)关的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相(无)关.

(3) $\boldsymbol{y}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{y}_{j_r}$ 为 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m$ 的最大无关组的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的最大无关组.

3. 坐标变换

设数域 K 上的线性空间 V^n 的两个基分别为(Ⅰ)$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 和(Ⅱ)$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$,且由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{x}\in V^n$ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的坐标(列向量)分别为 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$,则有

(1) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{C\beta}$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(2) 对于 $\lambda_0\in K$,存在 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\beta}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{C\beta}=\lambda_0\boldsymbol{\beta}$,即 λ_0 为 $\boldsymbol{C}$ 的一个特征值.

4. 标准正交基

设欧氏空间 V^n 的两个基分别为(Ⅰ)$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 和(Ⅱ)$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$,且由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$,基(Ⅰ)的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}$,基(Ⅱ)的度量矩阵为 $\boldsymbol{B}$,则有

(1) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$.

(2) 基(Ⅰ)是标准正交基的充要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

(3) 若基(Ⅰ)与基(Ⅱ)都是标准正交基,则 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵.

(4) 若基(Ⅰ)(或(Ⅱ))是标准正交基,$\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵,则基(Ⅱ)(或基(Ⅰ))是标准正交基.

5. 相似矩阵

(1) $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 相似于上(下)三角矩阵.

(2) $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 相似于 Jordan 标准形矩阵.

(3) $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 酉相似于上三角矩阵.

(4) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}$ 的充要条件是存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$(对角矩阵).

(5) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 的特征值都是实数,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(6) 实对称矩阵正交相似于对角矩阵.

6. 方阵的最小多项式

(1) 方阵是其特征多项式的矩阵根.

(2) 方阵的最小多项式整除它的零化多项式.

(3) 方阵的最小多项式与它的特征多项式有相同的零点(不计重数).

(4) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项为 $\varphi(\lambda)$，特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶行列式因子为 $D_{n-1}(\lambda)$，则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m(\lambda)=\dfrac{\varphi(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$.

(5) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体初等因子为

$$
\begin{aligned}
&(\lambda-\lambda_1)^{k_1},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{k_{t_1}} \quad (1\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_{t_1})\\
&(\lambda-\lambda_2)^{l_1},\cdots,(\lambda-\lambda_2)^{l_{t_2}} \quad (1\leqslant l_1\leqslant\cdots\leqslant l_{t_2})\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&(\lambda-\lambda_s)^{r_1},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{r_{t_s}} \quad (1\leqslant r_1\leqslant\cdots\leqslant r_{t_s})
\end{aligned}
$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 互不相同，则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{t_1}}(\lambda-\lambda_2)^{l_{t_2}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_{t_s}}$$

7. 线性变换

设线性空间 V^n 的两个基分别为(Ⅰ) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 和(Ⅱ) $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$，且由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$，线性变换 T 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{x}\in V^n$ 在基(Ⅰ)下的坐标为 $\boldsymbol{\alpha}$，则有

(1) $\dim R(T)=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$，$\dim N(T)=n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$.

(2) $T\boldsymbol{x}$ 在基(Ⅰ)下的坐标为 $\boldsymbol{A\alpha}$.

(3) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$.

(4) T 的特征值与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同，T 的对应于特征值 λ 的特征向量在基(Ⅰ)下的坐标为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

(5) 在 V^n 中存在某个基使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的充要条件是，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$. 此时，$\boldsymbol{P}$ 是由基(Ⅰ)改变为这个基的过渡矩阵.

(6) T 在 V^n 的某个基下的矩阵为对角矩阵的充要条件是 T 有 n 个线性无关的特征向量.

(7) 关于正交变换，下面四种说法等价：

1) T 是欧氏空间 V^n 的正交变换，即对于任意的 $\boldsymbol{x}\in V^n$，有 $(T\boldsymbol{x},T\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$；

2) 对于任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V^n$，有 $(T\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$；

3) T 在 V^n 的标准正交基下的矩阵为正交矩阵；

4) T 将 V^n 的标准正交基变换为标准正交基.

(8) 关于对称变换，下面两种说法等价：

1) T 是欧氏空间 V^n 的对称变换，即对于任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V^n$，有 $(T\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y})$；

2) T 在 V^n 的标准正交基下的矩阵为对称矩阵.

(9) 若 T 是欧氏空间 V^n 的对称变换，则 T 在 V^n 的某个标准正交基下的矩阵为对角矩阵.

(10) 在欧氏空间 V^n 中，若正交变换 T 的特征值都是实数，则 T 是对称变换.

8. 线性变换的不变子空间

设 T 是线性空间 V^n 的线性变换，则有

(1) $R(T)$，$N(T)$ 及 V_λ 都是 T 的不变子空间.

(2) 若 V_1 和 V_2 都是 T 的不变子空间，则 $V_1\cap V_2$ 与 V_1+V_2 也是 T 的不变子空间.

(3) 若 V^n 可分解为 T 的不变子空间 $V_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的直和，则 T 在由 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的基拼接而构成 V^n 的基下的矩阵为准对角矩阵.

(4) 若 T 在 V^n 的某个基下的矩阵为准对角矩阵 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m)$，则 V^n 可分解为 T 的 m 个不变子空间的直和.

1.3 常用方法

1. 求线性空间(子空间)的基

(1) 根据线性空间的构成规律,找出其中的一组特殊元素,使得线性空间的一般元素都可由这组元素线性表示.

(2) 若这组元素线性无关,则它就是线性空间的基;若这组元素线性相关,则它的一个最大无关组就是线性空间的基.

2. 求 $R(A)$ 和 $N(A)$ 的基

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组是 $R(\boldsymbol{A})$ 的基.

(2) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系是 $N(\boldsymbol{A})$ 的基.

3. 求 $R(T)$,$N(T)$ 及 V_λ 的基

设线性空间 V^n 的一个基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$,线性变换 T 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,记 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=r$,则有

(1) 求出 $R(\boldsymbol{A})$ 的一个基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$(列向量),那么 $R(T)$ 的一个基为

$$\boldsymbol{y}_1=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_r=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\alpha}_r$$

(2) 求出 $N(\boldsymbol{A})$ 的一个基为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$(列向量),那么 $N(T)$ 的一个基为

$$\boldsymbol{z}_1=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{z}_{n-r}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\beta}_{n-r}$$

(3) 求出 $N(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 的一个基为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_l$(列向量),那么 V_λ 的一个基为

$$\boldsymbol{u}_1=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\gamma}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_l=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\gamma}_l$$

4. 求过渡矩阵

设线性空间 V^n 的两个基分别为(Ⅰ)$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 和(Ⅱ)$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$,由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$,那么求过渡矩阵有下述方法.

(1) 直接法:

1) 计算 $\boldsymbol{y}_j$ 在基(Ⅰ)下的坐标 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,n)$;

2) 写出 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$.

(2) 中介法:

1) 选取 V^n 的简单基,使 V^n 的元素在该基下的坐标能够直接写出;

2) 分别写出由简单基改变为基(Ⅰ)和基(Ⅱ)的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{C}_2$;

3) 计算 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2$.

[评注] 在中介法中,由于 $\boldsymbol{x}_j$ 在简单基下的坐标可以直接写出,所以由简单基改变为基(Ⅰ)的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 能够直接写出.同理,由简单基改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}_2$ 也能够直接写出.

5. 求在两个基下坐标向量成比例的非零元素

设线性空间 V^n 的两个基分别为(Ⅰ)$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 和(Ⅱ)$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$,且 $\boldsymbol{z}\in V^n$ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$($\lambda$ 为给定常数),求元素 $\boldsymbol{z}$ 的步骤如下:

(1) 求出由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(2) 求出齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$.

(3) 写出满足要求的全体线性无关的元素组

$$z_1=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ z_l=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\boldsymbol{\beta}_l$$

那么,满足要求的全体非零元素为

$$z=k_1z_1+k_2z_2+\cdots+k_lz_l\quad (k_1,k_2,\cdots,k_l\text{ 不全为 }0)$$

6. 求线性变换的矩阵

设线性空间 V^n 的一个基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$,线性变换 T 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,那么求线性变换的矩阵有下述方法.

(1) 直接法:

1) 计算 $T\boldsymbol{x}_j$,并求出 $T\boldsymbol{x}_j$ 在基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 下的坐标 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,n)$;

2) 写出 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$.

(2) 中介法:

1) 选取 V^n 的简单基,记作 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,使 V^n 中的元素在该基下的坐标能够直接写出;

2) 写出由简单基改变为给定基的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$;

3) 计算 $T\boldsymbol{\varepsilon}_j$,并写出 $T\boldsymbol{\varepsilon}_j$ 在简单基下的坐标 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,n)$,得到 T 在简单基下的矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$;

4) 计算 T 在给定基下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$.

[评注] 中介法的第 3 步是采用直接法求线性变换在简单基下的矩阵.

(3) 混合法:

1) 选取 V^n 的简单基,记作 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$;

2) 写出由简单基改变为给定基的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$;

3) 计算 $T\boldsymbol{x}_j$,并写出 $T\boldsymbol{x}_j$ 在简单基下的坐标 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,n)$,得到矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,即

$$T(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{B}$$

4) 计算 T 在给定基下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}$.

7. 求线性变换的特征值与特征向量

(1) 选取线性空间 V^n 的一个基(通常是简单基)$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$,并求出线性变换 T 在该基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(2) 求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s(1\leqslant s\leqslant n)$.

(3) 求出特征方程 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\beta}_1^{(i)},\boldsymbol{\beta}_2^{(i)},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{l_i}^{(i)}$.

(4) 写出线性变换 T 的对应于特征值 λ_i 的全体线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{y}_1^{(i)}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\beta}_1^{(i)},\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_{l_i}^{(i)}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\beta}_{l_i}^{(i)}$$

那么,T 的对应于特征值 λ_i 的全体特征向量为

$$\boldsymbol{y}=k_1\boldsymbol{y}_1^{(i)}+k_2\boldsymbol{y}_2^{(i)}+\cdots+k_{l_i}\boldsymbol{y}_{l_i}^{(i)}\quad (k_1,k_2,\cdots,k_{l_i}\text{ 不全为 }0)$$

8. 求线性空间的基使线性变换的矩阵为对角矩阵

(1) 选取线性空间 V^n 的一个基(通常是简单基)$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$,并求出线性变换 T 在该基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$(对角矩阵).

(3) 构造 V^n 的另一个基 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$,使之满足

$$(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{P}$$

那么,T 在基 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{\Lambda}$.

[评注] 并非对于任何线性变换 T,都存在线性空间 V^n 的一个基,使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.但是在复数域上,任何 n 阶方阵都相似于 Jordan 标准形,因此总存在 V^n 的一个基,使 T 在该基下的矩阵为 Jordan

标准形 —— 特殊的准对角矩阵.

9. 求方阵的 Jordan 标准形

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 的全体初等因子为 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ $(i=1,2,\cdots,s;m_1+m_2+\cdots+m_s=n)$，对应第 i 个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ 的 Jordan 块为 $\boldsymbol{J}_i$，那么 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_s)$，求 $\boldsymbol{A}$ 的全体初等因子常用下面三种方法.

(1) 行列式因子法：

1) 计算 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的行列式因子 $D_k(\lambda)(k=1,2,\cdots,n)$；

2) 计算 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的不变因子

$$d_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)} \quad (k=1,2,\cdots,n;\quad D_0(\lambda)=1)$$

3) 对 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 分解因式.全体不可约因式(一次因式方幂)为 $\boldsymbol{A}$ 的全体初等因子.

(2) 初等变换法：

1) 用初等变换将 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵 $\mathrm{diag}(f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_n(\lambda))$，其中 $f_k(\lambda)(k=1,2,\cdots,n)$ 是首 1 多项式；

2) 对 $f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_n(\lambda)$ 分解因式，全体不可约因式为 $\boldsymbol{A}$ 的全体初等因子.

(3) 特征多项式分析法：

1) 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$；

2) 求出 $\varphi(\lambda)$ 的全体不可约因式

$$(\lambda-\lambda_i)^{r_i} \quad (i=1,2,\cdots,l;\quad r_1+r_2+\cdots+r_l=n)$$

3) 对于 $\varphi(\lambda)$ 的第 i 个不可约因式 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$，有

ⅰ) $r_i=1$ 时，$\lambda-\lambda_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个初等因子；

ⅱ) $r_i>1$ 时，$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-\mathrm{rank}(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 个初等因子的乘积.

[评注] 在特征多项式分析法中，当 $r_i\leqslant 3$ 时，一定能够确定出 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ 是几个初等因子的乘积；而当 $r_i>3$ 时，不一定能够确定出 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ 是几个初等因子的乘积，此时该方法可能失效。

1.4 内容结构框图