高职高专公共基础课规划教材

# 应用数学基础

◎ 黄裕建　和　炳　冯明军　主编
◎ 黄先勇　副主编

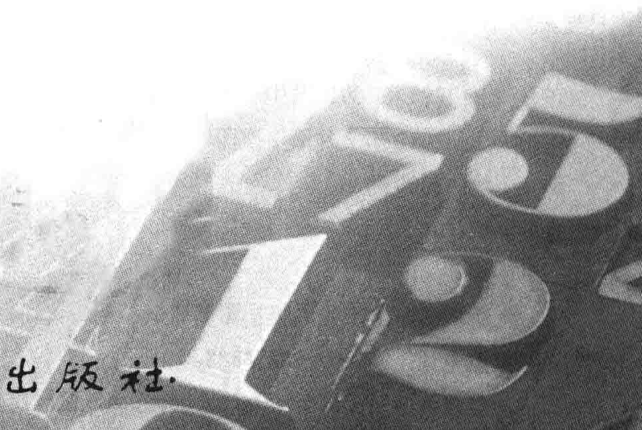
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http: //www.phei.com.cn

高职高专公共基础课规划教材

# 应用数学基础


黄裕建　和　炳　冯明军　主　编

黄先勇　副主编


電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

## 内容简介

本书内容包括：函数、极限与连续，导数与微分及其应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，微分方程，无穷级数等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能。为便于及时消化和理解概念及原理，每节都附上相关习题，每章都配有复习题。书末附有习题参考答案、常用公式表及积分表。

本书可作为高职高专院校工科类专业的教材，也可作为成人教育和社会培训教材。



**图书在版编目（CIP）数据**

应用数学基础 / 黄裕建，和炳，冯明军主编．—北京：电子工业出版社，2012.7
（高职高专公共基础课规划教材）
ISBN 978-7-121-17510-7

Ⅰ．①应… Ⅱ．①黄… ②和… ③冯… Ⅲ．①应用数学—高等职业教育—教材 Ⅳ．①029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 147699 号

策划编辑：朱怀永
责任编辑：朱怀永　特约编辑：王　纲
印　　刷：
装　　订：北京京师印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：19.5　字数：499 千字
印　　次：2012 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：3000 册
定　　价：36.50 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

# 前　言

高等数学作为各专业的公共基础课程，具有不可替代的专业服务功能和素质培育功能，不仅为学习后继课程和进一步扩充数学知识面奠定必要的基础，而且在培养学生抽象思维、逻辑推理能力，综合利用所学知识分析问题、解决问题的能力，较强的自主学习的能力，创新意识和创新能力上都具有非常重要的作用.为帮助学生掌握高等数学的基本思想，培养学生在各专业及相关领域中应用数学知识来分析、解决问题的能力，本书构建了以应用为目的、以应用为主线的课程内容体系.

微积分学区别于初等数学的本质在于：处理问题的范围由静态发展到动态，由均匀发展到非均匀，由简单规则的几何图形发展到复杂不规则的几何图形，处理问题的范围由比较特殊发展到较为一般，这也正是“微积分学”得以广泛应用的根源.它不仅是引入导数与定积分概念的基础，也是应用“微积分学”描述实际问题、解决实际问题的知识链条.

一直以来，传统的“微积分学”教学重视演绎及推理，重视定理的严格论证，这对培养学生的数学素养确有好处.但从应用的角度讲，需要的往往不是论证的过程，而是它的结论.因此，对于高职高专以及工科各专业的学生而言，在“微积分学”教学中，应淡化严格的数学论证，强化几何说明，重视直观、形象地理解.在数形结合方面，华罗庚先生也曾经有过精辟的论述：“数形本是两依依，数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形相助双翼飞”.数形结合让抽象变得自然，学生可以从烦琐的数学推导和不具一般性的数学技巧中解脱出来，这样做也符合教育部对高职高专教育所要求的“必须、够用”的原则.这一点在全国各高职高专院校和部分本科院校最近几年的“微积分学”教学中也达成了共识，本书在编写过程中也着重注意了这一点.

数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一门科学，而且是一种文化.它内容丰富，理论严谨，应用广泛，影响深远.数学也有自身的美、自身的和谐，由数学原理同样能折射出其他学科的本质，正所谓“原天地之美，而达万物之理”.因此，掌握数学基本原理，处理问题自会凌波微步，左右逢源.

本书内容包括：函数、极限与连续，导数与微分及其应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，微分方程，无穷级数等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能.为便于及时消化和理解概念及原理，每节都附上相关习题，每章都配有复习题.书末附有习题参考答案、常用公式表及积分表.

本书是在多年的讲义基础上修改而成的，加强与实际应用联系较多的基础知识和基本方法；注重基本运算训练，不追求过分复杂的计算和变换.除保证必要的知识体系外，突出内容的应用性和针对性.本书适用面较广，分为必学和选学内容，可供不同专业使用.考虑到不同专业对高等数学课程内容广度和深度的不同要求，本书作了适当的处理，在内容的选取上，对加*号的内容可依不同需要加以取舍，并不会影响后续内容的学习；在教学的深度上由于配有较丰富的例题和习题，从而使教师和学生都有较大的选择余地，以满足不同层次的教学对象的要求.

本书第 1 章～第 5 章由黄裕建编写，第 6 章～第 8 章由和炳编写，黄裕建负责本书的统稿及多次的修改定稿.参加审稿的还有广东第二师范学院的李样明教授.在此对所有关心支持《应用数学基础》的编写、修改工作的教师表示衷心的感谢.

限于编者的水平，书中难免存在一些疏漏，欢迎专家、同行及读者批评指正，以期不断修改和提高.

编　者

2012 年 4 月

# 目　　录

# 绪论　微积分纵览

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学关心的是变化的量.本书主要介绍微积分，微积分与初等数学相比更加富有动感，并存在本质的差异.因此在系统接触微积分之前，我们首先浏览一下微积分的基本问题，这对建立微积分宏观概念是大有裨益的.

下面我们通过解决各种问题提出微积分的基本思想——极限.

## 1. 面积问题

2500 年前的古希腊人用“切分”的方法计算面积.对任意的多边形 $A$，如图 0-1 所示将它切分为多个三角形，并将这些三角形的面积相加.

计算曲边梯形的面积要困难得多.例如求圆的面积，按照切分方法的思想就是在曲边圆形内作内接多边形，并使多边形的边数逐渐增加，如图 0-2 所示. 设 $A_n$ 是圆内接 $n$ 边形的面积，当 $n$ 增加时，$A_n$ 会越来越接近圆的面积.于是，我们称圆的面积就是其内接 $n$ 边形当边数无限增加时的面积的极限，记为 $A=\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

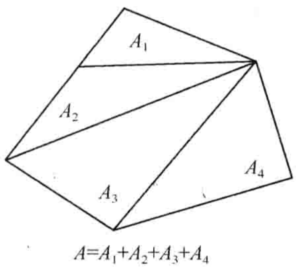



图 0-1

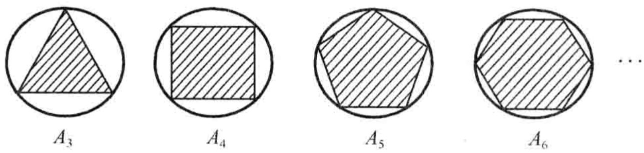



图 0-2

古希腊人并没有明确使用极限，但他们用间接推理方法证明了圆的面积公式 $A=\pi r^2$.无独有偶，我国魏晋时期的数学家刘徽（公元 225—295 年）在所著《九章算术》中曾提出“割圆术”并用来计算圆的周长、面积以及圆周率.割圆术的要旨是用圆内接正多边形去逐步逼近圆.刘徽从圆内接正六边形出发，将边数逐次加倍，并计算逐次得到的正多边形的面积（或周长）.他指出：“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.”

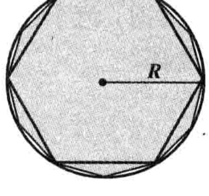



图 0-3

割圆术的作法是：首先作圆的内接正六边形，然后平分每条边所对的弧，作圆的内接正十二边形，同理作圆的内接正二十四边形、圆的内接正四十八边形等.显然，当圆的内接正多边形的边数成倍无限增加时，这一串圆的内接正多边形将无限地趋近于该圆周，即它们的极限位置就是该圆周，此时就是“无所失矣”.割圆术的作法如图 0-3 所示.

正六边形的面积 $A_1$，正十二边形的面积 $A_2$，……正 $6\times2^{n-1}$ 形的面积 $A_n$。序列 $A_1$，$A_2$，…，有如下关系：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \to A\,.$$

面积的问题是积分学的核心问题，而且这种求面积的方法，同样适用于计算变速直线运动的路程、立体的体积、曲线的长度、变力做功等一系列问题.

### 2. 切线问题

何谓曲线的切线？对于一个圆，我们可以直接使用欧几里得的描述方法，即切线是一条与这个圆相交于一点且只有一点的直线（如图 0-4 所示）.对于更复杂的曲线，这个定义显然不再适用.如图 0-5 所示，直线 $l_2$ 与曲线 $C$ 只相交于一点，但它显然不是我们所想象的切线；相反，直线 $l_1$ 看起来是一条切线，然而它与 $C$ 相交于两点.

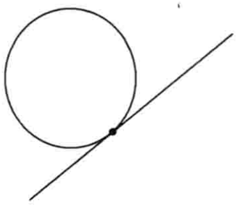


图 0-4

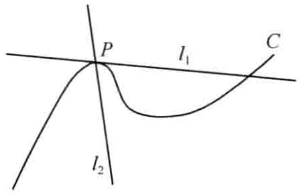



图 0-5

在高等数学中，一般用极限来研究切线.设点 $M$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一个定点，点 $N$ 是曲线上的动点，当点 $N$ 沿曲线 $y=f(x)$ 趋向点 $M$ 时，若割线 $MN$ 的极限位置 $MT$ 存在，则称直线 $MT$ 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $M$ 的切线.

设 $M=(x_0, f(x_0)), N=(x, f(x))$, 则割线 $MN$ 的斜率 $k_{\mathrm{MN}}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 当动点 $N$ 沿曲线趋向于点 $M$ 时，相应的有 $x \to x_0$，其极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 就是过点 $M$ 的切线的斜率（见图 0-6），即

$$k_{\mathrm{MT}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (0\text{-}1)$$

切线问题引出了微积分中另一个重要分支——微分学.

微积分的两个分支（微分与积分）及其基本问题（切线与面积）表面上似乎大相径庭，然而它们是紧密联系的.在第 4 章将指出微分与积分问题在一定意义下互为逆问题.

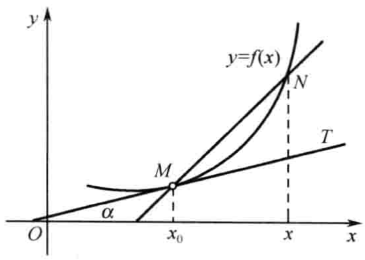



图 0-6

### 3. 速度问题

众所周知，速度用来描述物体运动的快慢.例如一辆沿着直线行驶的汽车在 3 小时内行驶了 210 千米，如果它是匀速运动的，则该汽车的速度是 210÷3=70 千米/时；但若汽车不是匀速前进，那么数值 210÷3=70 千米/时只能表示该汽车在这 3 个小时内的平均速度.这时，汽车在行驶过程中不同时刻的速度（称为瞬时速度）是不同的.那么如何来描述瞬时速度呢？

如果物体作非匀速直线运动，其运动规律（函数）是

$$s=f(t)$$

其中，$t$ 是时间，$s$ 是距离.我们的问题是，如何讨论物体在某时刻 $t_0$ 时的瞬时速度.

设该物体在时间段$[t_0,t]$（不妨假定$t>t_0$）内所走过的路程为$f(t)-f(t_0)$，则$\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$表示物体在时间段$[t_0,t]$内的平均速度，它不能表征瞬时速度$v(t_0)$.但是如果时间间隔$t-t_0$很小，则$v(t_0)\approx\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$.

显然若$t-t_0$越小，上式的近似程度越好，其极限$\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$就是物体在时刻$t_0$的瞬时速度，即

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{0-2}$$

我们发现，极限表达式（0-2）与（0-1）相似.由此可见，一旦解决了微分学中的切线问题，也就解决了运动物体的速度问题.推而广之，此方法可以解决自然科学和社会科学中各种有关变化率的问题.

我们看到极限的概念源于实际的问题，如数列的极限、曲线切线的斜率、汽车的瞬时速度、区域的面积等.它们的共同之处在于，最终要计算的量是另外一个较容易计算的量的极限.这一基本思想使微积分有别于数学的其他领域.实际上，我们可以将微积分描述为数学中处理极限问题的分支.

极限和微积分的概念可以追溯到古代.到了十七世纪后半叶，牛顿和莱布尼茨完成了许多数学家都研究过的工作，分别独立地创立了微积分.最初，牛顿应用微积分得到了万有引力定律，并进一步导出了开普勒行星运动三定律.此后，微积分学成为推动近代数学发展强大的引擎，同时也极大地推动了天文学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学及应用科学各个分支的发展，并在这些学科中有越来越广泛的应用，特别是计算机的出现更有助于这些应用的不断发展.

总体来说，微积分是高等数学中研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支，内容主要包括极限、微分学、积分学及其应用.微分学包括求导数的运算，是一套关于变化率的理论.它使得函数、速度、加速度和曲线的斜率等均可用一套通用的符号进行讨论.积分学，包括求积分的运算，为定义和计算图形面积、体积等提供了一套通用的方法.

# 第1章　函数·极限·连续

### 本章导读

客观世界的一切事物，小至粒子，大至宇宙，始终都在运动和变化着.因此，在数学中引入了变量的概念后，就有可能把运动现象用数学来加以描述了.研究变量与变量之间的依从关系，导致了“函数”概念的引入.由于函数概念的产生和运用的加深，也由于科学技术发展的需要，微积分学应运而生.微积分学这门学科在数学发展中的地位是十分重要的，可以说它是继欧氏几何后，数学领域的最大的一个创造.

函数、极限和连续都是微积分学的基本概念.在微积分学中我们要处理的最基本对象就是函数，它为深入学习微积分做必要的准备；极限是研究微积分学的重要工具，微积分学中的许多重要概念，如连续、导数、定积分等，均是通过极限来定义，因此极限是我们学习微积分的起点.极限理论早在古代就有比较清楚的论述.比如我国的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中，记有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”.魏晋时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”.这些都是朴素的、典型的极限概念.

男子100米世界纪录曾被人认为不会突破10秒大关，然而迄今为止，世界纪录是9秒58.那么，一个个新的世界纪录有没有极限呢？

## 1.1　函数及其性质

### 1.1.1　函数的概念

先考察几个例子.

**【例1-1】**　圆的面积$S$由圆的半径$r$决定.只要$r$取定一个正数值，面积$S$就有一个确定的值与之对应，且$S$与$r$之间有关系式

$$S=\pi r^2 \quad (r>0)$$

上式表明了变量$r$和$S$之间的函数关系.

**【例1-2】**　按邮章规定，国内本埠（县）平信，按首重和续重计收资费，首重100克内，每重20克（不足20克按20克计算）付邮资0.80元，续重101～2000克，每重100克（不足100克按100克计算）付邮资1.20元.则邮资$M$与信重 $W$的关系表达式为（$0<W\leqslant 2000$）：

$M$=0.8（元），　　当$0<W\leqslant 20$

$M=1.6$（元），　　当 $20<W\leqslant 40$

……

$M=4.0$（元），　　当 $80<W\leqslant 100$

$M=5.2$（元），　　当 $100<W\leqslant 200$

$M=6.4$（元），　　当 $200<W\leqslant 300$

……

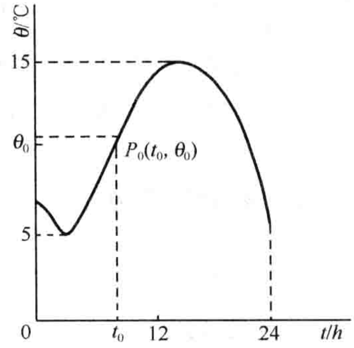



图 1-1

**【例 1-3】** 温度记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，如图 1-1 所示的曲线.曲线上某一点 $P_0(t_0,\theta_0)$ 表示时刻 $t_0$ 的气温是 $\theta_0$.可以知道时间 $t$ 和气温 $\theta$ 这两个变量之间的函数关系是由一条曲线确定的.

**【例 1-4】** 为了预测某种商品的销售情况，调查了该商品过去 6 个月的销售数量，见表 1-1.

表 1-1

| 月份 $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 销量 $Q$/千件 | 98 | 100 | 110 | 115 | 95 | 120 |

表 1-1 描述了月份 $t$ 与销售量 $Q$ 之间的函数关系. $t$ 每取定表中列出的一个值，就有唯一确定的 $Q$ 值与之对应.

上面几个例子都反映了在同一过程中有着两个互相联系的起着变化的量，这些在过程中起着变化的量，称为变量（在过程中保持不变的量，则称为常量）.当第一个量在某数集内取值时，按一定的规则，第二个量在另一数集内有唯一的一个值与之对应，函数的概念正是从这样一些事实中抽象出来的.

**定义 1.1** 设 $D$ 是一个非空的实数集，如果存在一个对应法则 $f$，对每一个 $x\in D$，都能对应唯一的一个实数 $y$，则这个对应法则 $f$ 称为定义在 $D$ 上的一个函数，记作 $y=f(x)$，其中称 $x$ 为函数的自变量，$y$ 为函数的因变量或函数值，$D$ 称为函数的定义域.

定义域 $D$ 是自变量 $x$ 的取值范围.由此，若 $x$ 取数值 $x_0\in D$ 时，则称该函数在 $x_0$ 有定义，与 $x_0$ 对应的 $y$ 的数值称为函数在点 $x_0$ 的函数值，记作 $y=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

当 $x$ 取遍数集 $D$ 中的所有数值时，对应的函数值全体构成的数集

$$Z=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为该函数的值域.若 $x_0\notin D$，则称该函数在点 $x_0$ 没有定义.

关于函数的定义域，一般是取使函数的表达式有意义的自变量取值的全体.当然对实际问题还应根据问题的实际意义来确定.

例如，函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为闭区间[−1，1].

由函数定义知，一个函数有三个因素：定义域、对应法则和值域.注意，给了定义域和对应法则，值域就相应地被确定了，因此定义域和对应法则是决定一个函数的两个要素.

两个函数相同，是指它们的定义域和对应法则①分别相同.例如 $f(x)\equiv 1,x\in(-\infty,+\infty)$ 和

① 两函数的对应法则相同，是指在相同的定义域内，每个 $x$ 所对应的函数值相同.

$g(x)=\frac{x}{x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是两个不同的函数，因为其定义域不相同.两个相同的函数，其对应法则的表达形式可能不同.例如函数 $f(x)\equiv 1, x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ ，$x\in(-\infty,+\infty)$，虽然形式上不同，实际上是相同的.

## 1.1.2 函数的表示法

表示函数的方法主要有以下三种.

**1. 解析法**

用一个数学表达式表示两个变量之间函数关系的方法称为**公式法**或**解析法**.如例 1-1 以及下列函数：

$$y=x+\frac{1}{x},\ y=\sin x+\cos x,\ \ y=\ln x,\cdots$$

此外，一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式表示，这样的函数称为**分段函数**.如函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 2^x & x>0 \end{cases}$$

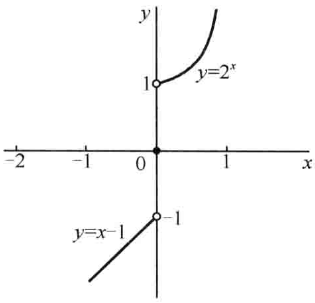


图 1-2

是一个分段函数，$x=0$ 是该函数的分段点，如图 1-2 所示.

又如例 1-2 中对应的函数也是分段函数.

**2. 图像法**

用几何图形表示两个变量之间函数关系的方法，称为**图形法**或**图像法**.如例 1-3.

**3. 列表法**

用表格表示两个变量之间函数关系的方法，称为**列表法**.如例 1-4 以及通常所用的三角函数表、对数表等.

## 1.1.3 函数的几种特性

**1. 函数的有界性**

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，函数 $y=\sin x$ 的图形（见图 1-3）介于两条直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间，即有 $|\sin x|\leqslant 1$，这时称 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数.在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数 $y=x^3$ 的图形（见图 1-4）向上、向下都可以无限延伸，不可能找到两条平行于 $x$ 轴的直线，使这个图形介于这两条直线之间，这时称 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界函数.