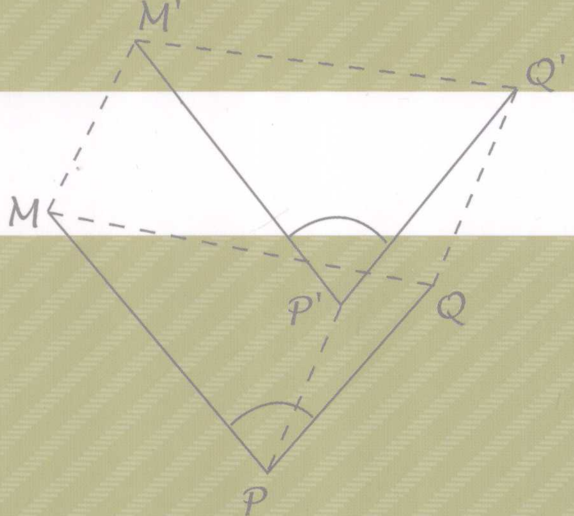


解析几何

丘维声

NALYTIC GEOMETRY

高等教育出版社

解析几何

Jiexi Jihe

丘维声

高等教育出版社·北京

内容提要

本书以研究几何空间的结构和图形的性质、分类为主线；加强几何直观，同时论证严密、简洁；运用变换的观点研究图形的性质；建立了从中学到大学的几何课程的严密讲授体系。内容包括向量与坐标，平面与空间直线，常见曲面与空间曲线，坐标变换，二次曲线的一般理论，变换。附录介绍二次曲面的类型。书末有详细的习题解答。

本书可作为综合性大学、理工科大学和高等师范院校的解析几何课程的教材。

图书在版编目（CIP）数据

解析几何/丘维声编. --北京：高等教育出版社，2014.5

ISBN 978-7-04-039525-9

Ⅰ. ①解… Ⅱ. ①丘… Ⅲ. ①解析几何-高等学校-教材 Ⅳ. ①O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 067372 号

策划编辑	田 玲	责任编辑	田 玲	特约编辑	张建军	封面设计	李小璐
版式设计	王 莹	插图绘制	黄建英	责任校对	杨凤玲	责任印制	田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	三河市吉祥印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	16.75	版 次	2014年5月第1版
字 数	310千字	印 次	2014年5月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	24.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 39525-00

前　言

本书是作者积40来年在北京大学讲授解析几何和高等代数等课程的经验和心得，潜心思考写成的。主要特色如下：

1. 以研究几何空间的结构和图形的性质、分类为主线

几何空间既可以看作是所有点组成的集合，又可以看作是以定点O为起点的所有定位向量组成的集合。后者使几何空间有加法和数量乘法两种运算，且满足8条运算法则。从而只要给了3个不共面的向量$\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$，几何空间中每个向量就都可以由$\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$线性表出，且表出方式唯一。这样几何空间的结构就完全清楚了，这是几何空间的线性结构。为了在几何空间中能统一解决有关长度、角度、垂直等度量问题，引进了向量的内积；为了解决有关面积等问题，引进了向量的外积；为了解决有关体积等问题，引进了向量的混合积。有了几何空间的线性结构的框架，又有了向量的内积、外积、混合积这些解决度量问题的工具，就可以顺畅地研究空间中图形的性质和分类：平面与空间直线，以及它们之间的位置关系和度量关系；常见曲面（旋转面、柱面、锥面、二次曲面）与空间曲线；二次曲线的类型，二次曲面的类型。

2. 加强几何直观，同时论证严密、简洁

从"不在一直线上的三点确定一个平面"得出"一个点和两个不共线的向量确定一个平面"。于是点M在由点M_0和不共线向量$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$确定的平面$\pi$上当且仅当向量$\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$共面。从而可利用3个向量共面的充分必要条件建立平面π在仿射坐标系中的方程。

从"两条平行直线的距离等于它们的公垂线段的长度"受到启发，探索两条异面直线l_1和l_2的距离是否也等于它们的公垂线段的长度。首先要解决两条异面直线的公垂线是否存在。设l_i经过一点M_i，一个方向向量为$\boldsymbol{v}_i,i=1,2$。直观上看，点M_i和$\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$确定一个平面$\pi_i,i=1,2,\pi_1$与$\pi_2$的交线就是$l_1$与$l_2$的公垂线。这需要进行严密论证：先要证$\boldsymbol{v}_i$与$\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$不共线，$i=1,2$；接着要证$\pi_1$与$\pi_2$必相交；最后证$\pi_1$与$\pi_2$的交线$l\perp l_i$，且与$l_i$相交，$i=1,2$。因此$l$就是$l_1$与$l_2$的公垂线。

作者按照数学的思维方式讲授解析几何的知识。先从几何直观引出概念，提出要研究的问题；充分利用几何直观进行探索，猜测可能有的规律；然后进行严密的论证，即只使用公理、定义和已经证明了的命题进行逻辑推理来论证，而不采用"显然……"的叙述方式去忽视论证。如果采用几何的方法去证明比较简

洁，那么就采用几何的方法。如果采用代数的方法去证明比较简洁，那么就采用代数的方法。这样讲授解析几何，就使读者既加强了几何直观的训练，又受到数学思维方式的熏陶。

3. 用变换的观点研究图形的性质

向量的内积使得几何空间中有关长度、角度、垂直等度量问题获得统一解决，而这关键是向量的内积具有线性性。因此必须证明向量的内积具有线性性。作者运用变换的观点来论证。首先讨论几何空间在一条轴 l（l 经过定点 O，方向向量为 $\boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量）上的正投影：过点 O 作与 l 垂直的平面 π，设向量$\overrightarrow{OA}$在平面 π 上的正投影为$\overrightarrow{OA_2}$，则$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$，其中$\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线，且这种分解是唯一的。于是把$\overrightarrow{OA}$对应到$\overrightarrow{OA_1}$ 的这个映射称为几何空间在轴 l 上的正投影，记作 $\mathscr{P}_e$，即 $\mathscr{P}_e(\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA_1}$。不难证明 $\mathscr{P}_e$ 保持加法和数量乘法。由于 $\mathscr{P}_e(\overrightarrow{OA})$与 $\boldsymbol{e}$ 共线，因此存在唯一的实数 a 使得，$\mathscr{P}_e(\overrightarrow{OA})=a\boldsymbol{e}$，把 a 称为$\overrightarrow{OA}$在方向 $\boldsymbol{e}$ 上的分量，记作 $\Pi_e(\overrightarrow{OA})$。容易证明：$\Pi_e(\overrightarrow{OA})=|\overrightarrow{OA}|\cos\langle\overrightarrow{OA},\boldsymbol{e}\rangle$，于是用 $\boldsymbol{b}^0$ 表示与 $\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\Pi_{b^0}(\boldsymbol{a})$。从 $\mathscr{P}_e$ 保持加法和数量乘法可推导出，Π_e 保持加法和数量乘法。由此可证明向量的内积具有线性性。

这本书的最后一章详细讲述了平移、旋转、反射等正交变换，相似、位似、压缩、错切等仿射变换。分别证明了在正交变换和仿射变换下，图形的哪些性质是不变的，哪些性质是会改变的，且是按什么规律改变的。证明了在向着 yOz 面且压缩系数为 k 的正压缩下，单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的像是椭球面$\dfrac{x^2}{k^2}+y^2+z^2=1$；旋转单叶双曲面$\dfrac{x^2+y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的像是单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{(kb)^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；旋转双叶双曲面$\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2+y^2}{b^2}=1$ 的像是双叶双曲面$\dfrac{x^2}{(kb)^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$；旋转抛物面 $x^2+y^2=2pz$ 的像是椭圆抛物面$\dfrac{x^2}{k^2p}+\dfrac{y^2}{p}=2z$。

4. 力求使解析几何与高等代数水乳交融

在许多大学的数学系中，解析几何与高等代数是大学一年级上学期同时开设的两门课程。解析几何一开始就要用行列式，但是可能高等代数课程还没有讲行列式。这本书第一章的§1.1 中，从几何的角度引出了 2 阶行列式和 3 阶行列式的概念，使解析几何的讲授顺利畅通。在讲二次曲线方程的化简及其类型时，可能高等代数课程还没有讲矩阵的特征值和特征向量以及矩阵的相似等内容。第五章§5.1 从几何的角度引出了矩阵的特征值和特征向量的概念，顺利地简明地讲了二次曲线方程的化简。§5.2 讲述二次曲线的不变量时也展示

了解析几何与高等代数是如何水乳交融的。

5. 建立从中学到大学的几何课程的严密讲授体系

平行线的判定定理和三角形全等的三个判定定理是几何学的最基本的定理。但是在绝大多数初中数学教材中都把它们作为基本事实而不加证明,这使从中学到大学的几何课程的讲授体系的根基不牢靠。作者在十年前就建立了几何课程的严密的讲授体系,对平行线的性质定理和判定定理、三角形全等的三个判定定理都给出了证明,现在把这些写进了这本书。

什么是相似的图形?初中数学教材把"对应边成比例且对应角相等的两个三角形称为相似三角形""对应边成比例且对应角相等的两个多边形称为相似多边形"。那么对于其他图形,什么样的两个图形叫做相似图形呢?如果把形状相同的图形称为相似的图形,那么如何判别两个图形是否形状相同呢?这种对相似图形缺乏统一的科学的定义,也使得从中学到大学的几何课程的讲授体系的根基不牢靠。作者在这本书第六章的§6.2给出了相似图形的准确定义,并且由此出发证明了三角形相似的三个判定定理,证明了"对应边成比例且对应角相等的两个多边形相似"(这不应作为相似多边形的定义,而是定理)。

6. 书末附有习题解答

建议读者先自己做每一节的习题,然后再看书末的习题解答。

这本书可作为综合性大学、理工科大学和高等师范院校的解析几何课程的教材(或"高等代数与解析几何"课程的教材之一,可以配上作者写的《高等代数(第2版)上册、下册》)。全书共需60学时,其中讲大课48学时,习题课12学时。讲大课的学时分配如下:第一章8学时,第二章8学时,第三章10学时,第四章4学时,第五章8学时,第六章10学时。

感谢高等教育出版社的李蕊编辑和田玲编辑,她们为本书的出版付出了辛勤劳动。

真诚欢迎广大读者对本书提出宝贵意见。

丘维声
北京大学数学科学学院
2013年5月

目 录

第一章　向量与坐标

我们生活在地球上，站在某个地方，有东西向，南北向和上、下之分. 由此自然而然地抽象出 3 维几何空间，它由点组成，同时也有方向的概念. 汽车行驶的速度既有大小又有方向，轮船在大海航行的位移也是既有大小又有方向，拉小车的力也是这样. 既有大小又有方向的量称为向量(或矢量). 为了研究几何空间中的图形，通常是建立一个坐标系，使得点用有序实数组(称为它的坐标)表示，从而图形的几何特征性质就可以用这个图形上的点的坐标所满足的方程来刻画，于是可以用方程来研究图形，这样做的好处在于它利用了数可以进行运算的优点. 如果我们对向量也引进它的运算，并且对向量也引进它的坐标，那么我们就多了一种研究图形性质的方法，这种方法具有直观性强又可以进行运算的双重优点. 向量在力学、物理学和工程技术中也有重要应用. 这一章我们引进向量的加法和数量乘法运算，进而研究几何空间的线性结构；引进向量的内积，统一解决几何空间中有关长度、角度、垂直等度量问题；引进向量的外积和混合积，解决几何空间中有关面积和体积以及两条异面直线的距离等度量问题.

§1.1　向量的加法和数量乘法，向量的坐标

既有大小又有方向的量称为**向量**. 通常用黑体的小写英文字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 来记向量；手写时也可以用加箭头的小写英文字母 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$ 来记向量.

生活中常常用一个箭头的指向来标明方向，这启发我们用带有一个箭头的线段(称为**有向线段**)来表示向量. 例如，图 1.1 中，向量 $\boldsymbol{a}$ 用一条有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示：线段 AB 的长度表示 $\boldsymbol{a}$ 的大小，$\overrightarrow{AB}$ 的箭头指向(即起点 A 到终点 B 的指向)表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向. 今后我们把有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示的向量就叫做向量 $\overrightarrow{AB}$.

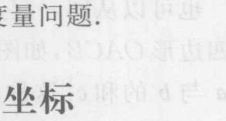


图 1.1

向量的大小也称为向量的**长度**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作 $|\boldsymbol{a}|$. 长度为 0 的向量叫做**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$. 它是起点与终点重合的向量. 零向量的方向不确定.

由于向量只有大小和方向两个要素，因此很自然地把长度相等且方向相同的向量称为**相等的向量**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 所有的零向量都相等.

由于平移不改变两点的距离，也不改变方向，因此在任意一个平移下，有向

线段$\overrightarrow{AB}$与它的像$\overrightarrow{A'B'}$表示的向量是相等的. 如图 1.2,在沿 $\boldsymbol{d}$ 的平移下,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$.

长度为 1 的向量称为**单位向量**. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$.

与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$. 例如,$\overrightarrow{BA}$是$\overrightarrow{AB}$的反向量,因此$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

向量有**加法**运算:对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,作有向线段$\overrightarrow{AB}$表示 $\boldsymbol{a}$,接着作有向线段$\overrightarrow{BC}$表示 $\boldsymbol{b}$,我们把$\overrightarrow{AC}$表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 1.3,也就是

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

这称为**向量加法的三角形法则**.

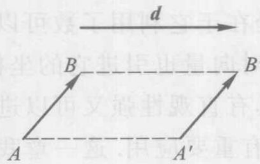


图 1.2

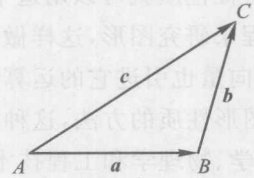


图 1.3

也可以从同一起点 O 作$\overrightarrow{OA}$表示 $\boldsymbol{a}$,作$\overrightarrow{OB}$表示 $\boldsymbol{b}$,再以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$,如图 1.4. 由于$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$,因此,$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. 从而$\overrightarrow{OC}$表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{c}$. 这称为**向量加法的平行四边形法则**.

容易证明向量的加法满足下述运算法则:

(1) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(2) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(3) 对任意向量 $\boldsymbol{a}$,有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) 对任意向量 $\boldsymbol{a}$,有 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

本书用符号"$A:=B$"表示用 B 来规定 A,读作"A 定义成 B".

向量减法的定义为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}:=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别用同一起点的有向线段$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$表示,则如图 1.5,

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}.$$

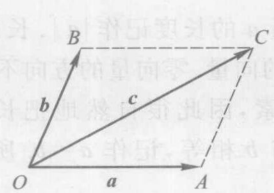


图 1.4

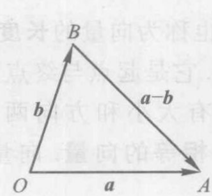


图 1.5

容易证明：对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

这个不等式称为**三角形不等式**.

向量还有**数量乘法**运算：实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的长度为 $|\lambda\boldsymbol{a}|:=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；如果 $|\lambda\boldsymbol{a}|\neq 0$，那么 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

从上述定义立即得到：对于任意向量 $\boldsymbol{a}$ 有 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；对一切实数 λ 有 $\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$；若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，由于 $\left|\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|=1$，因此 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，于是

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

可以证明向量的数量乘法满足下述运算法则：

(1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(2) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$；

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(4) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

从数量乘法的定义立即得到：$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

向量的加法和数量乘法统称为向量的**线性运算**.

由于两个向量的和是向量，实数与向量的乘积是向量，且向量的加法满足结合律，因此对于一组向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 和一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，有 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{a}_s$ 是一个向量，称它是向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 的一个**线性组合**，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 称为**系数**.

对于向量 $\boldsymbol{b}$ 和向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$，如果存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{a}_s$，那么称 $\boldsymbol{b}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ **线性表出**.

向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 若用同一起点的有向线段表示后，它们在同一条直线上，则称向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 是**共线**的.

显然 $\boldsymbol{0}$ 与任意向量 $\boldsymbol{a}$ 共线.

若 $\boldsymbol{c}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线，则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向，图 1.6 是 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向的情形. 若 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，则 $\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{a}^0=\dfrac{|\boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$；若 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，则 $\boldsymbol{c}=-|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{a}^0=-\dfrac{|\boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$. 总之，存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}$. 假如还有 $\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{a}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}$，从而 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，因此 $\lambda-\mu=0$. 于是 $\lambda=\mu$. 这证明了下述命题：

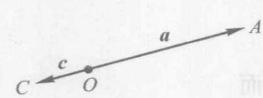


图 1.6

命题 1　若 $\boldsymbol{c}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线，则存在唯一的实

数 λ，使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}$.　□

从数量乘法的定义立即得到：若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.

命题 2　两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 共线的充分必要条件是：存在不全为零的实数 k_1，k_2，使得

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

证明　必要性. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 共线. 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则有

$$1\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则根据命题 1 得，存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}$. 从而 $\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，于是有

$$\lambda\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

充分性. 设有不全为零的实数 k_1,k_2 使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 不妨设 $k_2\neq 0$，则 $\boldsymbol{c}=-\dfrac{k_1}{k_2}\boldsymbol{a}$. 于是 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.　□

推论 1　两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线的充分必要条件是：从 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 可以推出 $k_1=k_2=0$.　□

向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 若用同一起点的有向线段表示后，它们在同一个平面上，则称向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 是共面的.

显然，共线的向量组一定共面，两个向量一定共面，$\boldsymbol{0}$ 与任意两个向量组成的向量组是共面的.

三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线时，根据向量的加法和数量乘法的定义，以及两条相交直线决定一个平面得，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共线，从而它们共面.

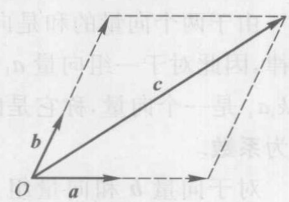


图 1.7

反之，若三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，则如图 1.7，存在一对实数 λ,μ，使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

假如还有一对实数 λ_1,μ_1，使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b},$$

则

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}.$$

从而

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{a}+(\mu-\mu_1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,因此从上式得,

$$\lambda-\lambda_1=0,\quad \mu-\mu_1=0.$$

于是 $\lambda=\lambda_1,\mu=\mu_1$. 这样我们证明了下述命题:

命题 3 若三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,则存在唯一的一对实数 λ, μ,使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$ □

命题 4 三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是:有不全为零的实数 k_1, k_2,k_3,使得

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

证明 必要性. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,则根据命题 3 得,存在一对实数 λ,μ,使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$. 从而

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+(-1)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,则有不全为零的实数 k_1,k_2,使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 从而

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+0\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

充分性. 不妨设 $k_3\neq 0$,则 $\boldsymbol{c}=-\dfrac{k_1}{k_3}\boldsymbol{a}-\dfrac{k_2}{k_3}\boldsymbol{b}$. 于是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. □

推论 2 三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面的充分必要条件是:从 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 可以推出 $k_1=k_2=k_3=0$. □

几何空间是由所有的点组成的集合. 取定一个点 O,对于任意一个点 P,向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为以 O 为起点的**定位向量**. 于是几何空间中所有点组成的集合与所有以 O 为起点的定位向量组成的集合之间有一个一一对应:点 P 对应到定位向量 $\overrightarrow{OP}$. 起点不在 O 的向量在适当的平移下的像是以 O 为起点的定位向量,它们是相等的. 因此我们可以把几何空间看成是以定点 O 为起点的所有定位向量组成的集合,把它记作 G.

几何空间 G 中有无穷多个向量,它们的结构如何? 即每一个向量可不可以由有限多个向量线性表出? 下面的定理回答了这个问题.

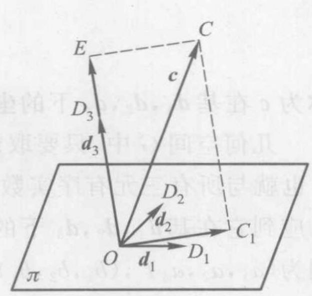


图 1.8

定理 1 几何空间 G 中取定三个不共面的向量 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$,则 G 中每一个向量 $\boldsymbol{c}$ 可以由 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{d}_3$ 线性表出,且表出方式唯一.

证明 可表性. 设 $\boldsymbol{d}_i$ 的终点为 $D_i,i=1,2,3$. 由于 $\boldsymbol{d}_1$ 与 $\boldsymbol{d}_2$ 不共线,因此直线 OD_1 与 OD_2 决定

一个平面 π,如图 1.8. 由于 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 不共面,因此 $\boldsymbol{d}_3$ 的终点 D_3 不在平面 π 内. 任取一个向量 $\boldsymbol{c}$,若 $\boldsymbol{c}$ 的终点 C 不在直线 OD_3 上,且 C 不在平面 π 内. 则过点 C 作直线平行于 OD_3,且与平面 π 相交于点 C_1. 在由两条平行线 CC_1 与 OD_3 决定的平面内,过点 C 作直线平行于 OC_1,且与直线 OD_3 交于点 E,则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OE}$. 由于 $\overrightarrow{OC_1}$ 在平面 π 内,因此存在实数 k_1,k_2,使得 $\overrightarrow{OC_1}=k_1\boldsymbol{d}_1+k_2\boldsymbol{d}_2$. 又由于 $\overrightarrow{OE}$ 与 $\boldsymbol{d}_3$ 共线,因此存在实数 k_3,使得 $\overrightarrow{OE}=k_3\boldsymbol{d}_3$. 从而

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=k_1\boldsymbol{d}_1+k_2\boldsymbol{d}_2+k_3\boldsymbol{d}_3.$$

若点 C 在直线 OD_3 上,则 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=\lambda\boldsymbol{d}_3=0\boldsymbol{d}_1+0\boldsymbol{d}_2+\lambda\boldsymbol{d}_3$. 若点 C 在平面 π 内,则 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=l_1\boldsymbol{d}_1+l_2\boldsymbol{d}_2=l_1\boldsymbol{d}_1+l_2\boldsymbol{d}_2+0\boldsymbol{d}_3$.

唯一性. 假如 $\boldsymbol{c}$ 还有一种表出方式:$\boldsymbol{c}=h_1\boldsymbol{d}_1+h_2\boldsymbol{d}_2+h_3\boldsymbol{d}_3$. 则 $k_1\boldsymbol{d}_1+k_2\boldsymbol{d}_2+k_3\boldsymbol{d}_3=h_1\boldsymbol{d}_1+h_2\boldsymbol{d}_2+h_3\boldsymbol{d}_3$. 于是有

$$(k_1-h_1)\boldsymbol{d}_1+(k_2-h_2)\boldsymbol{d}_2+(k_3-h_3)\boldsymbol{d}_3=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 不共面,因此根据推论 2 得,

$$k_1-h_1=0,\quad k_2-h_2=0,\quad k_3-h_3=0.$$

从而 $k_1=h_1,k_2=h_2,k_3=h_3$. 于是 $\boldsymbol{c}$ 由 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 线性表出的方式唯一. □

定理 1 从加法和数量乘法的角度刻画了几何空间 G 的结构,称之为几何空间 G 的线性结构.

几何空间 G 中三个有序的不共面的向量 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 称为 G 的一个**基**. 根据定理 1,G 中每一个向量 $\boldsymbol{c}$ 可以由基 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 唯一地线性表出:

$$\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{d}_1+k_2\boldsymbol{d}_2+k_3\boldsymbol{d}_3,$$

我们把三元有序实数组(写成一列):

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{c}$ 在基 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 下的**坐标**. 为了节省篇幅,把它写成 $(k_1,k_2,k_3)'$.

几何空间 G 中,只要取定了一个基,G 的结构就完全清楚了,而且几何空间 G 也就与所有三元有序实数组构成的集合(记作 $\mathbf{R}^3$)建立了一一对应 σ:向量 $\boldsymbol{c}$ 对应到它在基 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 下的坐标 $(k_1,k_2,k_3)'$. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在基 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 下的坐标分别为 $(a_1,a_2,a_3)',(b_1,b_2,b_3)'$,则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{d}_1+a_2\boldsymbol{d}_2+a_3\boldsymbol{d}_3)+(b_1\boldsymbol{d}_1+b_2\boldsymbol{d}_2+b_3\boldsymbol{d}_3)$$

$$=(a_1+b_1)\boldsymbol{d}_1+(a_2+b_2)\boldsymbol{d}_2+(a_3+b_3)\boldsymbol{d}_3.$$

从而 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在基 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 下的坐标为 $(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)'$. 任给实数 k，有

$$k\boldsymbol{a}=k(a_1\boldsymbol{d}_1+a_2\boldsymbol{d}_2+a_3\boldsymbol{d}_3)=(ka_1)\boldsymbol{d}_1+(ka_2)\boldsymbol{d}_2+(ka_3)\boldsymbol{d}_3.$$

从而 $k\boldsymbol{a}$ 在基 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 下的坐标为 (ka_1,ka_2,ka_3).

在 $\mathbf{R}^3$ 中规定加法运算如下：

$$(a_1,a_2,a_3)'+(b_1,b_2,b_3)'=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)';$$

规定数量乘法运算如下：

$$k(a_1,a_2,a_3)'=(ka_1,ka_2,ka_3)',\quad k\in\mathbf{R}.$$

由上述讨论看出：几何空间 G 与 $\mathbf{R}^3$ 之间的一一对应 σ 保持加法运算和数量乘法运算.

几何空间 G 中，点 O 和一个基 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 合在一起称为一个**仿射标架**或**仿射坐标系**，记作 $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3]$，其中点 O 称为**原点**. 定位向量 $\overrightarrow{OP}$ 在基 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 下的坐标称为 $\overrightarrow{OP}$ 在仿射标架 $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3]$ 下的坐标，简称为 $\overrightarrow{OP}$ 的**仿射坐标**.

几何空间 G 又可看成点集，对于任一点 P，我们把定位向量 $\overrightarrow{OP}$ 在基 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 下的坐标（即 $\overrightarrow{OP}$ 的仿射坐标）称为点 P 在仿射标架 $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3]$ 下的坐标，简称为**点 P 的仿射坐标**.

设点 P 和点 Q 的仿射坐标分别为 $(p_1,p_2,p_3)'$ 和 $(q_1,q_2,q_3)'$，由于 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$，且 $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ 的仿射坐标为

$$(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3)',$$

因此向量 $\overrightarrow{PQ}$ 在仿射标架 $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3]$ 下的坐标（简称为 $\overrightarrow{PQ}$ 的**仿射坐标**）为 $(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3)'$，它是终点 Q 的仿射坐标 $(q_1,q_2,q_3)'$ 减去起点 P 的仿射坐标 $(p_1,p_2,p_3)'$ 所得的差. 于是我们证明了下述定理：

定理 2 在仿射标架 $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3]$ 下，向量的坐标等于其终点坐标减去其起点坐标. □

设 l_1 是过定点 O 的一条直线，过点 O 有一个平面 π 与 l_1 垂直，如图 1.9. 在 l_1 上取一个单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，在平面 π 上取两个互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$. 则 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 垂直，$\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_3$ 也垂直. 于是我们得到了两两垂直的三个单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$. 显然 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面. 从而 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是几何空间 G 的一个基，称它为 G 的一个**标准正交基**. 把 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 称为一个**直角标架**或**直角坐标系**. 点或向量在直角标架下的坐标简称为**直角坐标**. 经过原点 O，且分别以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为正向的数轴分别称为 x 轴，y 轴，z 轴，统称为**坐标轴**；由每两条坐标轴决定的平面称为**坐标面**，

它们分别为 xOy 面，yOz 面，zOx 面. 坐标面把几何空间分成八个部分，称为八个卦限，如图 1.10.

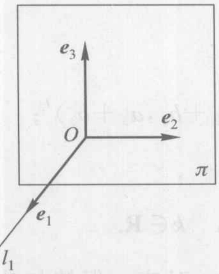


图 1.9

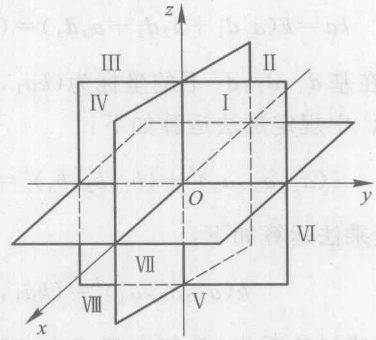
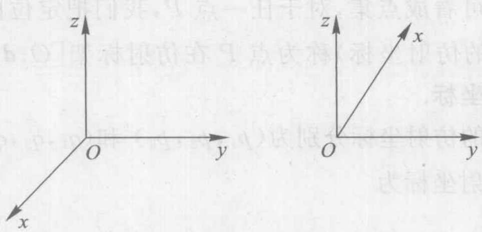


图 1.10

将右手四指（拇指除外）从 x 轴正向弯向 y 轴正向（转角小于 π），如果拇指所指的方向与 z 轴正向在 xOy 面同侧，那么称此坐标系为**右手系**；否则称为**左手系**，如图 1.11.



右手系　　　　左手系

图 1.11

在具体问题中，仿射标架或直角标架的原点可以取空间中一个合适的点.

如果不加特别声明，那么本书中点或向量的坐标都是指仿射坐标.

运用几何空间 G 的线性结构，可以解决线段的定比分点、三点共线和三线共点等问题.

对于线段 AB，如果点 C 满足 $\overrightarrow{AC}=\lambda\,\overrightarrow{CB}$，那么称点 C **分线段** AB **成定比** λ. 当 $\lambda>0$ 时，$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 同向，点 C 是线段 AB 内部的点，称 C 是**内分点**；当 $\lambda<0$ 时，$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 反向，C 是线段 AB 外部的点，称 C 是**外分点**；当 $\lambda=0$ 时，点 C 与点 A 重合；$\lambda\neq-1$（假如 $\lambda=-1$，则 $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CB}$，于是 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$，矛盾）.

命题 5 设点 A，点 B 的坐标分别是 $(a_1,a_2,a_3)'$，$(b_1,b_2,b_3)'$，则分线段 AB 成定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$ 的分点 C 的坐标 $(c_1,c_2,c_3)'$ 为

$$c_1=\frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda},\quad c_2=\frac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda},\quad c_3=\frac{a_3+\lambda b_3}{1+\lambda}. \tag{1}$$

证明 由于$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，因此根据定理2得

$$\begin{cases} c_1-a_1=\lambda(b_1-c_1), \\ c_2-a_2=\lambda(b_2-c_2), \\ c_3-a_3=\lambda(b_3-c_3). \end{cases}$$

解得

$$c_1=\frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda},\quad c_2=\frac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda},\quad c_3=\frac{a_3+\lambda b_3}{1+\lambda}.$$ □

推论3 设点A，点B的坐标分别是$(a_1,a_2,a_3)'$，$(b_1,b_2,b_3)'$，则线段AB的中点坐标为$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$. □

向量有了坐标后，许多几何问题就可以利用向量的坐标来解决，这时需要一些代数知识.

平面上取定一个仿射标架$[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2]$. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的坐标分别为$(a_1,a_2)'$，$(b_1,b_2)'$. 若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共线，且$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则存在非零实数$\lambda$，使得$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 于是

$$b_1=\lambda a_1,\quad b_2=\lambda a_2.$$

从而

$$b_1b_2=\lambda a_1b_2,\quad b_1b_2=\lambda a_2b_1.$$

由此得出

$$\lambda a_1b_2=\lambda a_2b_1.$$

整理得

$$\lambda(a_1b_2-a_2b_1)=0.$$

由于$\lambda\neq0$，因此$a_1b_2-a_2b_1=0$.

反之，若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的坐标满足$a_1b_2-a_2b_1=0$，且$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则不妨设$a_1\neq0$，于是有$b_2=\frac{b_1}{a_1}a_2$. 又有$b_1=\frac{b_1}{a_1}a_1$，因此$\boldsymbol{b}=\frac{b_1}{a_1}\boldsymbol{a}$. 从而$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$共线.

综上所述，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的坐标组成的表达式$a_1b_2-a_2b_1$的值是否等于0刻画了非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$是否共线. 为了容易记忆这个表达式$a_1b_2-a_2b_1$，我们引进一个记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}:=a_1b_2-a_2b_1, \tag{2}$$