普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计简明教程

GAILULUN YU SHULI TONGJI JIANMING JIAOCHENG

◎主　编　马丽琼
◎副主编　薛玉娟

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十二五"规划教材

概率论与数理统计简明教程

主　　编　马丽琼

副主编　薛玉娟

参　　编　马　骁　左　东

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

本书分为概率论与数理统计两部分内容。其中概率论的主要内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理与中心极限定理。数理统计的主要内容包括数理统计的基础知识、参数估计、假设检验及回归分析。

本书可作为理工科及金融、医药、管理等各专业本科生的教材，也可作为其他学科学生学习“概率论与数理统计”课程的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计简明教程/马丽琼主编. —北京:机械工业出版社,2014.8
ISBN 978-7-111-47504-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①马… Ⅲ.①概率论—教材②数理统计-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 169938 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑:舒 雯 责任编辑:舒 雯
责任印制:杨 曦 责任校对:张 薇 封面设计:张 静
涿州市京南印刷厂印刷
2014 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
184mm × 260mm · 14.25 印张 · 353 千字
0001—3500 册
标准书号:ISBN 978-7-111-47504-0

定价:36.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务
社服务中心:(010)88361066
销 售 一 部:(010)68326294
销 售 二 部:(010)88379649
读者购书热线:(010)88379203
策划编辑:(010)88379733

网络服务
教材网:http://www.cmpedu.com
机工官网:http://www.cmpbook.com
机工官博:http://weibo.com/cmp1952
封面无防伪标均为盗版

前 言

概率论与数理统计已经发展成为一门具有广泛应用的学科,成为各高等院校理工科及金融、医药、管理等各专业学生的必修课程。

本书是专门为高等院校的理工科学生编写的"概率论与数理统计"教材,意在简明扼要地介绍概率论与数理统计的基本概念、基本思想、基本原理和方法,以适应现阶段学时总数不多但教学要求相对较高的现状。教学学时数为32至48学时,各院校可根据实际教学要求删减部分内容或部分内容略讲。全书共9章,其中第1、2、9章由马丽琼编写,第3、4章由薛玉娟编写,第5、6章由马骁编写,第7、8章由左东编写,全书由马丽琼统稿。

各位参编老师都长期担任"概率论与数理统计"课程的教学工作,拥有多年的教学经验。在教材的编写过程中,编者进行了充分的交流和讨论,在参考国内外各优秀教材的同时,还融入了各自的教学心得和体会。

本书的编写还参照了全国硕士研究生入学考试数学考试大纲,内容覆盖了大纲的所有要求,可以作为研究生入学考试的复习参考书;还可以作为高等院校教师的教学参考书。

作为主审,徐昌贵副教授和熊学副教授仔细审阅了全书初稿,并提出了许多宝贵的修改意见。

本书的编写得到了西南交通大学峨眉校区教材建设项目的资助,得到了西南交通大学峨眉校区教务处的大力支持和帮助。在编写过程中,还一直得到了数学教研室全体同仁的关心、鼓励和帮助,在此我们一并表示由衷的感谢!

在本书的编写过程中,我们参阅了许多专著和教材,并采用了其中的部分内容、例题与习题,也在此表示感谢。

由于编者水平有限,书中难免出现疏漏和不当之处,恳请读者批评指正。

编者

2014年3月于峨眉

目　　录

第1章 随机事件及其概率

各种各样的自然现象和社会现象，大致可以分为两类。一类现象在特定条件下一定发生或一定不发生，如水在摄氏零度以下一定会结冰，太阳必定从东方升起，两个大于零的数相乘结果一定不会小于零等，这类现象称为确定性现象。而另一类现象，在相同条件下可能发生也可能不发生，如抛掷一枚硬币，正面向上可能出现也可能不出现；某工厂生产的产品可能是合格品也可能不是合格品；对同一目标进行多次射击，弹着点不尽相同……这类现象称为随机现象。

概率论是研究随机现象的规律性的学科。它是数学的一个分支，是近代数学的重要组成部分。概率论的理论和方法在现代社会各个领域如工业、农业、医疗、军事和科学技术中，有着广泛的应用。

1.1 基本概念与知识

这一节我们首先给出一些基本的概念与知识。

1. 随机试验

为了寻找和研究随机现象的规律性，往往需要进行一系列试验。当试验满足下面三个条件：

1)在相同条件下可重复进行。

2)试验的结果不止一个，并且在试验前明确所有可能的结果。

3)试验之前不能确定哪一个结果会发生。

则称该试验为随机试验。

如："随机抛掷一粒骰子""从工厂的产品中随机抽取一个来进行检查""测量工厂生产的零件的尺寸误差"等都是随机试验。而"观察 2013 年 5 月 1 日某城市的天气"不可重复进行，"从 10 个白球中任取 1 个出来观察其颜色"结果只有一个(一定是白色)，都不是随机试

验。为了叙述的简洁，本书所讲的试验都指的是随机试验。

2. 样本点与样本空间

试验中每一个可能出现的结果称为一个样本点，通常用字母 ω 来表示，而所有样本点构成的集合称为样本空间，通常用字母 Ω 来表示。

例 1：随机抛掷一粒骰子，用 ω_i 表示"向上一面出现的点数为 i"，则 $i=1,2,3,4,5,6$，样本空间含有 6 个样本点，即 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$。

例 2：观察某交通点在一定时间段内经过的机动车数量，用 ω_i 表示"通过该交通点的机动车辆的辆数为 i"，则 $i=0,1,2,\cdots$，样本空间含有可数无穷多个样本点，即 $\Omega_2=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$。

例 3：向一个半径为 30cm 的靶盘进行射击，测量弹着点与靶心的距离。用 ω_x 表示"弹着点与靶心的距离为 x cm"，则 $0\leqslant x\leqslant 30$，样本空间含有不可数无穷多个样本点，即 $\Omega_3=\{\omega_x \mid 0\leqslant x\leqslant 30\}$。

3. 随机事件

样本空间的每一个样本点都是试验的一个基本结果，我们将它称为一个基本事件。而在试验中，我们有时候关心的是具有某种特征的基本事件是否发生。如在例 1 中，我们可能关心的是"出现偶数点"这样的基本事件是否发生；在例 2 中我们可能关心的是"一定时间段内通过该交通点的车辆数不低于 10 辆"这样的基本事件是否发生；在例 3 中我们可能关心的是"弹着点与靶心的距离不超过 5cm"这样的基本事件是否发生。这些由多个基本事件组成的集合称为复杂事件。不管是基本事件还是复杂事件，在试验中都有可能发生，也有可能不发生，统称为随机事件或简称为事件，通常用大写的英文字母 A,B,C 等来表示。

在例 1 中，用 A 表示"出现偶数点"，则 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$，显然事件 A 是样本空间 Ω_1 的一个子集，当 A 中的样本点 ω_4 发生的时候事件 A 发生。即随机事件是样本空间的子集，该子集中的任何一个样本点发生的时候，该事件发生。

样本空间 Ω 是所有样本点构成的集合，因而在任何一次试验中，不管是哪个样本点 ω 发生，都有 $\omega\in\Omega$，即 Ω 必然会发生，因此又把 Ω 称为必然事件。而从集合论的观点来看，空集 $\varnothing$ 也是样本空集 Ω 的子集，在任何一次试验中都不可能有样本点属于 $\varnothing$，也就是说 $\varnothing$ 永远不可能发生，因此我们把 $\varnothing$ 称为不可能事件。我们把不可能事件和必然事件都看做是特殊的随机事件。

例 4：从含有 5 件次品的 20 件产品中任取 10 件出来进行检查，在抽到的 10 件产品中，"次品多于 5 件"一定不会发生，为不可能事件 $\varnothing$；"次品不多于 5 件"一定会发生，为必然事件 Ω；而"次品有 3 件""次品不多于 2 件"都是可能发生也可能不发生的，为随机事件。

4. 事件的关系与运算

由随机事件是样本空间的子集可知随机事件的数学本质就是集合，而集合与集合之间存在着一定的关系，也可以进行一些运算。因此事件之间也存在着一定的关系，也可以进行

一些运算。我们假定下面讨论的事件属于同一样本空间 Ω。

(1)事件的运算

1)积事件。集合 $A\cap B$ 中的点既属于集合 A,也属于集合 B。因此事件 $A\cap B$ 中只要有样本点发生,则事件 A 与事件 B 都发生,我们把事件 $A\cap B$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件,如图 1-1 所示。在不混淆的情况下也可以简记为 AB。

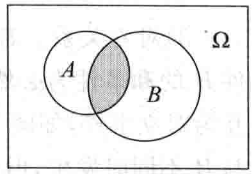

图 1-1

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 来说,$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生。

2)和事件。集合 $A\cup B$ 中的点要么只属于集合 A,要么只属于集合 B,要么属于集合 A 与集合 B 的交集 AB。因此事件 $A\cup B$ 中不管哪个样本点发生,要么只有事件 A 发生,要么只有事件 B 发生,要么事件 A 与事件 B 同时发生。也就是说,事件 $A\cup B$ 中只要有样本点发生,则事件 A 与事件 B 至少有一事件发生,我们把事件 $A\cup B$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件,如图 1-2 所示。

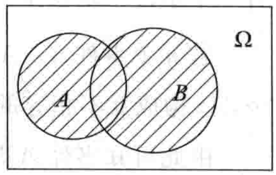

图 1-2

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 来说,$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一事件发生。

(2)事件的关系

1)包含关系。若集合 A 包含于集合 B 中即 $A\subset B$,则属于集合 A 的点一定属于集合 B。此时,当事件 A 中有样本点发生时,事件 A 发生,而该样本点一定属于事件 B,从而事件 B 一定发生。也就是说事件 A 发生必然导致事件 B 发生,此时我们称事件 A 包含于事件 B,如图 1-3 所示。

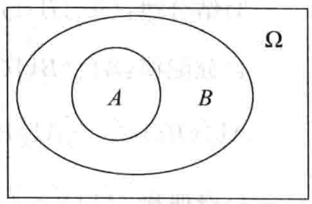

图 1-3

若事件 A 包含于事件 B,且事件 B 包含于事件 A,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 是相等的,即事件 A 与事件 B 为同一事件,记为 $A=B$。此时,事件 A,B 中任一事件发生必然导致另一事件发生。

2)互不相容。若集合 A 与集合 B 的交集为空集,即 $AB=\varnothing$,则集合 A 与集合 B 没有共同点。此时事件 A 与事件 B 没有共同的样本点,因而事件 A 与事件 B 不可能同时发生,我们称事件 A 与事件 B 是互不相容的,或称事件 A 与事件 B 互斥,如图 1-4所示。

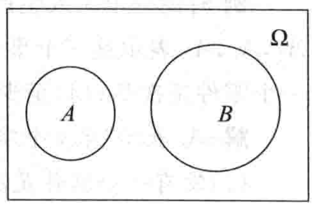

图 1-4

当事件 A 与事件 B 互不相容时,事件 A 与事件 B 不可能同时发生,此时记事件 A 与事件 B 的和事件 $A\cup B$ 为 $A+B$。

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 来说,若其中任意两个事件不可能同时发生,即 $A_iA_j=\varnothing$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$,则称这 n 个事件是互不相容的。此时,这 n 个事件中,若有事件发生,则每次只发生其中一件。

当 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容时，同样地，把它们的和事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 记为 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$。

3)对立关系。若事件 A 与事件 B 互不相容，且事件 A 与事件 B 的和事件为必然事件，即 $A+B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，如图 1-5 所示，记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$，此时，事件 A 与 B 不同时发生，但必发生其中一件。

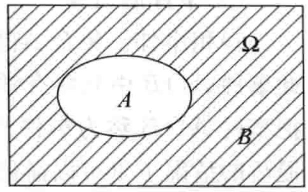

图 1-5

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件为必然事件，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成完备事件组，此时这 n 个事件中至少有一个事件一定发生。

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，且其和事件为必然事件，即 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成互不相容的完备事件组。

由此可知事件 A 与其对立事件 $\overline{A}$ 构成一个互不相容的完备事件组，样本空间 Ω 的所有基本事件也构成一个互不相容的完备事件组。

(3)运算规则　与集合的运算一样，事件的运算也满足下面这些规律：

1) $\overline{\overline{A}}=A, A\overline{A}=\varnothing, A+\overline{A}=\Omega$

2)交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

3)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

4)分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{n} AB_i$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A\cup(\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(A\cup B_i)$

5)对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}, \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

其中，事件 $\overline{A\cap B}$ 表示事件 A 与 B 不同时发生，也就是事件 A 与事件 B 至少有一件不发生，即为 $\overline{A}\cup\overline{B}$。

例 5：设一个工人生产了三个零件，若用 A_i 表示第 i 个零件是合格品，$i=1,2,3$。请用 A_1, A_2, A_3 表示这三个事件：(1)没有一个零件是次品；(2)只有第一个零件是次品；(3)恰有一个零件是次品；(4)至少有一个零件是次品。

解：A_i 表示“第 i 个零件是合格品”，则 $\overline{A_i}$ 表示“第 i 个零件是次品”。

(1)没有一个零件是次品即三个零件都是合格品：$A_1A_2A_3$。

(2)只有第一个零件是次品即第一个零件是次品且第二个和第三个都是合格品：$\overline{A}_1A_2A_3$。

(3)恰有一个零件是次品有三种情况，并且这三种情况不会同时发生，因而互不相容：$\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3$。

(4)三个零件至少有一个是次品，即 $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ 至少发生一件：$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$；至少有一个是次品的对立事件是三个都是合格品，因此也可以表示为 $\overline{A_1A_2A_3}$。由对偶律显然有

$$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}=\overline{A_1A_2A_3}$$

例 6:在区间[0,5]上任取一数,记事件 $A=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$,事件 $B=\{x\mid 2\leqslant x<4\}$,求下列事件的表达式:(1)$AB$;(2)$A\cup B$;(3)$A\overline{B}$。

解:(1)$AB=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$;(2)$A\cup B=\{x\mid 1<x<4\}$;(3)$A\overline{B}=\{x\mid 1<x<2\}$。

事件 $A\overline{B}$ 中的样本点属于事件 A 不属于事件 B,即事件 $A\overline{B}$ 表示事件 A 发生而事件 B 不发生。我们把事件 A 发生而事件 B 不发生的事件 $A\overline{B}$ 称为事件 A 与事件 B 的差,记为 $A-B$,即 $A-B=A\overline{B}$。

习题 1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1)随机抛掷两粒骰子一次,观察点数。

(2)随机抛掷一枚硬币,连续抛三次,观察出现正面向上还是正面向下。

(3)从装有三个白球(记为1,2,3号)和两个黑球(记为4,5号)的袋中一次性任取两球,观察颜色。

(4)从装有三个白球(记为1,2,3号)和两个黑球(记为4,5号)的袋中一次性任取两球,观察号码。

2. 已知 A,B,C 为三个随机事件,试用 A,B,C 表示下列事件:

(1)A,B,C 都发生;(2)A,B,C 都不发生;(3)A,B,C 不都发生;(4)A,B,C 至少发生一件;(5)A,B,C 最多发生一件。

3. 已知样本空间为 $\Omega=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$,记事件 $A=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$,事件 $B=\{x\mid 1.5\leqslant x<2.5\}$,试写出下列事件:(1)$\overline{A}B$;(2)$A\cup\overline{B}$;(3)$\overline{AB}$;(4)$\overline{A\cup B}$。

4. 已知 A,B,C 为三个随机事件,试问下列命题是否成立

(1)$A=AB+A\overline{B}$　　　(2)$A\cup B-B=A$

(3)$A\cup B=A+\overline{A}B$　　　(4)$A-(B-C)=(A-B)\cup C$

1.2 概率的定义

概率论研究的对象是自然界中具有不确定性的随机现象。人们在长期的实践活动中,根据经验的积累归纳总结出随机现象的规律,并想要通过量化的数学方式将这些随机现象的确定性的规律体现出来,于是就有了概率的概念,从而有了概率论这门学科的形成与发展。

最初,人们在大量的试验中发现了与事件相关的某种数量指标即事件的频率具有稳定性,从而给出了概率的统计定义。而概率的统计定义只能说明事件的概率是客观存在的,通过观测数据只能给出概率的估计值,不能给出其确切取值。后来,利用频率所体现的比率意义,人们又给出了概率的古典定义。而古典定义也只适合于具有某类特征的随机现象,并且

只能处理样本空间含有的样本点数为有限个和不可数无穷多个的情况，对于其他情况则不能进行计算。直到 1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出了概率的公理化定义，它刻画了概率的本质，提出了概率作为集合的函数应该满足的三条公理，是对一切随机现象都适用的一般的定义。

下面我们依次给出概率的这三种定义。

1. 统计定义

我们先来了解事件的频率及频率的稳定性。

设进行了 n 次观测，其中事件 A 发生的次数记为 n_A，我们把 n_A 称为事件 A 发生的频数。频数与观测总次数的比$\frac{n_A}{n}$称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$。

由频率的定义可知任何随机事件的频率介于 0 到 1 之间，即 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$。而不可能事件 $\varnothing$ 的频数一定为 0，必然事件 Ω 的频数一定为 n，从而有 $f_n(\varnothing)=0$，$f_n(\Omega)=1$。

历史上，曾经有很多学者进行过大量的试验，如蒲丰、皮尔逊等人都先后做过这样的试验：抛掷一枚质地均匀的硬币，观察"徽花向上"这一事件(记为 A)发生的次数。如在多组试验中统计事件"徽花向上"即事件 A 发生的频数，并计算其相应的频率，得到的试验结果为

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

通过上表中的数据可以看出，当试验次数较少时，事件 A 发生的频率波动性较大，而随着试验次数的增加，事件 A 发生的频率波动性在减小。也就是说，随着试验次数的增加，频率越来越明显地呈现出稳定性。如当 $n=500$ 时，事件 A 发生的频率大致是稳定在 0.5 附近取值的。这说明随机事件在大量的重复试验中存在着某种客观规律性，我们把这种客观规律性称为频率的稳定性。

由频率的稳定性可知，随着试验次数的不断增加，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 越来越稳定地在一个数 p 的附近摆动。虽然我们还不能给出这个数的确切取值，但是通过这样的统计工作

我们明白这个数是客观存在的，并且这个数体现了随机事件的某种客观属性，可以用它来刻画随机事件 A 发生的可能性的大小，我们把它称为随机事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$，即 $P(A)=p$。

由频率的取值范围为 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$，可知概率的取值范围为 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。对于不可能事件 $\varnothing$ 和必然事件 Ω 来说，由 $f_n(\varnothing)=0$ 可知 $P(\varnothing)=0$，由 $f_n(\Omega)=1$ 可知 $P(\Omega)=1$。

概率的统计定义说明了概率的客观存在性，而不能给出概率的确切取值。正因为随着试验次数的增加，频率稳定在概率的附近取值，因此，我们可以在试验次数 n 充分大的时候，把事件 A 发生的频率近似地作为事件 A 发生的概率，即 $P(A)\approx f_n(A)=\frac{n_A}{n}$。

2. 古典定义

通过大量的统计工作，我们只能得到随机事件发生的频率，从而只能得到其概率的近似值。在概率论的发展初期，其主要研究对象是一些具有特殊性的概率模型，一种称为古典概型，一种称为几何概型。在这两种概率模型中，以概率的古典定义为基础，我们可以确切地计算随机事件发生的概率。

(1)古典概型　如果随机试验满足下面两个条件：

1)样本空间含有样本点的个数为有限个。

2)每个样本点发生的机会均等(等可能性)。

则称这种试验为等可能概型，也称为古典概型。在古典概型中，记样本空间含有的样本点数为 N，事件 A 所含的样本点数为 M，则随机事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 所含样本点数}}{\Omega\text{ 所含样本点总数}}=\frac{M}{N}$$

例 1: 随机掷一粒质地均匀的骰子，观察向上一面出现的点数，求出现偶数点的概率。

解: 设事件 A 表示“掷出的骰子向上一面出现偶数点”，ω_i 表示出现的点数为 i 点，$i=1,2,\cdots,6$，则样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，而事件 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$，从而 $N=6$，$M=3$，由古典概型可得

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

在古典概型的计算中，主要是确定样本空间及事件 A 含有的样本点数，我们要注意在确定样本点数的时候必须确保样本空间的每一个样本点发生的机会均等这一点。

例 2: 从 1,2,3,4,5 五个号码中任取两个，求取到的两个号码中最小号码是 3 的概率。

解: 设事件 A 表示“取到的两个号码中最小号码是 3”，则样本空间含有的样本点数为 $N=C_5^2$，而 A 含有的样本点数为 $M=C_1^1C_2^1$，由古典概型可得

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{C_1^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{1}{5}$$

例 3: 设袋中装有 a 只白球和 b 只黑球，随机地从中把球一个一个取出来，求第 k 次取到白球的概率。

解:设事件 A 表示"第 k 次取得白球"。

解法一:把 a 只白球与 b 只黑球看做不同(例如设想把它们编号),若把取出的球依次放在排成一直线的 $a+b$ 个位置上,则

$N=A_{a+b}^{a+b}=(a+b)!\qquad M=C_a^1A_{a+b-1}^{a+b-1}=a(a+b-1)!$ (先考虑第 k 个位置)

由古典概型可得

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

这个结果说明事件 A 发生的概率与 k 无关,它体现了体育比赛中的公平抽签原则。

解法二:把白球与黑球分别看做是无区别的,仍把取出的球依次放在排成一直线的 $a+b$ 个位置上,若把 a 只白球的位置固定下来,则其他位置必定放黑球,则

$$N=C_{a+b}^{a},M=C_1^1C_{a+b-1}^{a-1}\text{(第 } k \text{ 个位置一定放白球)}$$

由古典概型可得

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{C_1^1C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!}\times\frac{a!\,b!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

解法三:将白球与黑球分别看做不同,只考虑前 k 次取球,则

$$N=A_{a+b}^{k}\quad M=C_a^1A_{a+b-1}^{k-1}$$

由古典概型可得

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{C_a^1A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}}=\frac{a}{a+b}$$

解法四:将白球与黑球分别看做不同,样本空间只考虑第 k 次取球,则

$$N=C_{a+b}^1\quad M=C_a^1$$

由古典概型可得

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{C_a^1}{C_{a+b}^1}=\frac{a}{a+b}$$

古典概型研究的是样本空间样本点数为有限个的情况,这种计算可以推广到样本空间样本点数为不可数无穷多的情况。

(2)几何概型　当样本空间含有的样本点数为不可数无穷多时,其取值对应为数轴上某个区间或平面上某个区域或空间中的某个区域。这些区间或区域中的点虽然不可数,但是这些区间或区域具有各自的一种几何度量,如区间具有长度,平面区域具有面积,而空间区域具有体积。

如果随机试验满足下面两个条件:

1)样本空间含有样本点的个数为不可数无穷多。

2)每个样本点发生的机会均等(等可能性)。

则称这样的随机试验为几何概型。在几何概型中,记样本空间的几何度量为 $\mu(\Omega)$,事件 A 的几何度量为 $\mu(A)$,则随机事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

例 4:长途汽车站每天上午 11 点有一趟发往某旅游胜地的班车,而乘客在上午 7 点至 11 点之间的任一时刻到达车站是等可能的。求该乘客的候车时间不超过 1 小时的概率。

解:设乘客到达车站的时间为 x,则 x 在区间 $(7,11)$ 中等可能地取值,从而样本空间为 $\Omega=\{x|7<x<11\}$。设事件 A 表示"乘客的候车时间不超过 1 小时",要使事件 A 发生,则要求 x 在区间 $(10,11)$ 中取值,从而 $A=\{x|10<x<11\}$,如图 1-6 所示。由几何概型得事件 A 发生的概率为

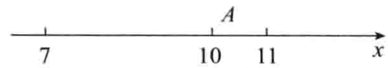

图 1-6

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{1}{4}$$

例 5:甲乙两人电话通话时约定,在接下来的两小时内在某地点会面,先到达的人应等候另一人,经过二十分钟后方可离开,假定甲乙两人在接下来的两小时内的任一时刻到达约定地点是等可能的,求甲乙两人会面成功的概率。

解:设甲乙两人在接下来的两小时内到达预定地点的时刻分别为 x,y,则 x,y 在区间 $[0,2]$ 内等可能地取值,即 $0<x<2,0<y<2$。从而可得样本空间为平面矩形区域

$D=\{(x,y)|0<x<2,0<y<2\}$

设事件 A 表示"甲乙两人成功会面",则 x 与 y 之差的绝对值应小于 $\frac{1}{3}$,如图 1-7 所示,则事件 A 为平面区域

$$G=\left\{(x,y)\middle| |x-y|<\frac{1}{3},0<x<2,0<y<2\right\}$$

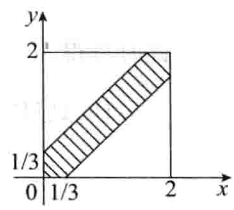

图 1-7

由几何概型可得事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{4-\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}}{4}=\frac{11}{36}$$

3. 公理化定义

在介绍概率的公理化定义之前,我们先来介绍概率的加法定理。

(1)加法定理　概率的加法定理是用来处理和事件的概率公式,为了便于理解,我们通过几何概型来进行说明。假设在样本空间 Ω 中取到每个点的机会均等,而事件 A,B,C 为样本空间的子集,则当事件 A 与事件 B 互不相容时,如图 1-8 所示。

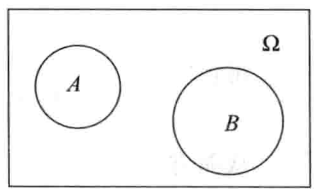

图 1-8

由几何概型可得

$$P(A+B)=\frac{\mu(A+B)}{\mu(\Omega)}=\frac{\mu(A)+\mu(B)}{\mu(\Omega)}=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}+\frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)}=P(A)+P(B)$$

更一般地,当 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容时有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

当事件 A 与事件 B 相容时,如图 1-9 所示。

由几何概型可得

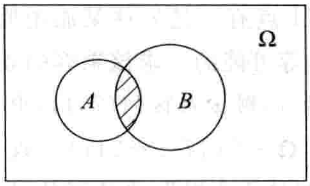

图 1-9

$$P(A\cup B)=\frac{\mu(A\cup B)}{\mu(\Omega)}=\frac{\mu(A)+\mu(B)-\mu(AB)}{\mu(\Omega)}=P(A)+P(B)-P(AB)$$

而当三个事件 A,B,C 相容时，如图 1-10 所示。

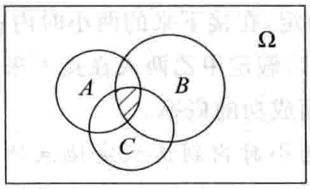

图 1-10

此时可得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=\frac{\mu(A\cup B\cup C)}{\mu(\Omega)}\\&=\frac{\mu(A)+\mu(B)+\mu(C)-\mu(AB)-\mu(AC)-\mu(BC)+\mu(ABC)}{\mu(\Omega)}\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\end{aligned}$$

更一般地，对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

对于互不相容的完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 来说，有

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$$

可得

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(\Omega)=1$$

从而有

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$$

特别地，对于事件 A 来说，A 与 $\overline{A}$ 构成互不相容的完备事件组，从而有

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

因此

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

我们在计算某一事件的概率时，若此事件本身比较复杂，而其对立事件相对比较简单，则可以先计算其对立事件的概率，然后通过上面的公式来计算该事件的概率。