

 **21**世纪高等学校数学系列教材

高等数学学习指导

■ 主编 阎国辉



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

 **21**世纪高等学校数学系列教材

高等数学学习指导

■ 主编 阎国辉
■ 参编 沈小芳 徐 彬 龙 松 朱祥和
李春桃 张文钢 柯 玲



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/阎国辉主编. —武汉:武汉大学出版社, 2014. 6
ISBN 978-7-307-13454-6

I. 高… II. 阎… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 114128 号

责任编辑:李汉保 责任校对:汪欣怡 版式设计:马 佳

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:武汉珞珈山学苑印刷有限公司

开本:787×1092 1/16 印张:25.75 字数:651千字 插页:1

版次:2014年6月第1版 2014年6月第1次印刷

ISBN 978-7-307-13454-6 定价:40.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

21 世纪高等学校数学系列教材

编 委 会

主 任	羿旭明	武汉大学数学与统计学院, 副院长, 教授
副 主 任	何 穗	华中师范大学数学与统计学院, 副院长, 教授
	叶牡才	中国地质大学(武汉)数理学院, 教授
	蹇 明	华中科技大学数学学院, 副院长, 教授
	曾祥金	武汉理工大学理学院, 数学系主任, 教授、博导
编 委	(按姓氏笔画为序)	
	王绍恒	重庆三峡学院数学与计算机学院, 教研室主任, 副教授
	叶子祥	武汉科技学院东湖校区, 副教授
	刘 俊	曲靖师范学院数学系, 系主任, 教授
	全惠云	湖南师范大学数学与计算机学院, 系主任, 教授
	何 斌	红河师范学院数学系, 副院长, 教授
	李学峰	仰恩大学(福建泉州), 副教授
	李逢高	湖北工业大学理学院, 副教授
	杨柱元	云南民族大学数学与计算机学院, 院长, 教授
	杨汉春	云南大学数学与统计学院, 数学系主任, 教授
	杨泽恒	大理学院数学系, 系主任, 教授
	张金玲	襄樊学院, 讲师
	张惠丽	昆明学院数学系, 系副主任, 副教授
	陈圣滔	长江大学数学系, 教授
	邹庭荣	华中农业大学理学院, 教授
	吴又胜	咸宁学院数学系, 系副主任, 副教授
	肖建海	孝感学院数学系, 系主任
	沈远彤	中国地质大学(武汉)数理学院, 教授
	欧贵兵	武汉科技学院理学院, 副教授
	赵喜林	武汉科技大学理学院, 副教授

徐荣聪	福州大学数学与计算机学院, 副院长
高遵海	武汉工业学院数理系, 副教授
梁 林	楚雄师范学院数学系, 系主任, 副教授
梅汇海	湖北第二师范学院数学系, 副主任
熊新斌	华中科技大学数学学院, 副教授
蔡光程	昆明理工大学理学院数学系, 系主任, 教授
蔡炯辉	玉溪师范学院数学系, 系副主任, 副教授
执行编委 李汉保	武汉大学出版社, 副编审
胡 艳	武汉大学出版社, 编辑

内 容 简 介

本书是根据全国工科院校高等数学教学大纲要求编写的，是与同济大学数学系编写的《高等数学》（第六版）配套的复习参考书，是高等工科院校不同专业的学生不可缺少的学习资料。

本书系统地介绍了函数与极限，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数等。本书可以作为高等学校本科生、专科生学习高等数学课程的教辅教材，也可以供高等学校教师、相关工程技术人员以及数学爱好者参考。

本书侧重对基础知识的详解与分析，旨在帮助学生练习夯实高等数学的基本功，以便在解题过程中融会贯通，举一反三，掌握解题技巧，拓宽解题思路，提高分析问题和解决问题的能力。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议、策划，组建 21 世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套 21 世纪高等学校数学课程系列教材，旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加 21 世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学（福建泉州）、华中师范大学、湖北工业大学、湖北科技职业学院等 20 余所院校。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作、力争将该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2007 年 7 月

前言

高等数学是大学工科、经济学、管理学等各学科专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的必考科目。高等数学的应用几乎遍及所有学科领域，也是大学生学习后续专业课程必不可少的数学基础。

近年来，一方面，由于高等学校教学改革的实施，高等数学授课时间有所减少，受到时间的限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定影响；另一方面，后续课程的学习以及研究生的入学考试对高等数学的要求在教学大纲范围内有深化的趋势。如何解决这一新的矛盾，为了帮助学生领会高等数学的精髓，更好地学习好高等数学，我们根据长期的教学实践，参考了多种相关资料，精心编写了这本《高等数学学习指导》。本书紧扣教学大纲的要求，并与现行教材完全同步。我们期望这本《高等数学学习指导》能对广大读者在高等数学学习和复习过程中达到节约时间，加强理解基本概念，拓宽解题思路和提高分析问题及解决问题能力的目的。

全书共 12 章，与同济大学数学系编写的《高等数学》（第六版）教材同步配套，对于经管类学生，除去第 11 章曲线积分与曲面积分部分不作要求外，其他各章均是适宜的。

全书每章都有以下七个部分：

1. 大纲基本要求：列出了教学大纲对本章内容的基本要求，一目了然，简明扼要，使学生明白通过本章学习后必须掌握的数学概念和相关知识。

2. 内容提要：体系完整，系统归纳了本章所学习的全部内容，帮助学生理解基本概念，理清思路，抓住主要矛盾。

3. 解难释疑：抓住要害，突出重点、难点，逐一加以剖析，帮助读者消化好本章所学知识，举一反三。

4. 典型例题选讲：每章精选了大量的各种例题，题型典型灵活，解题方法富于技巧，开阔解题思路，内容覆盖全面。

5. 错解分析：根据教师们长期的教学经验，搜集了大量典型的初学者易犯的解题错误，析理透彻，一针见血。

6. 考研真题选解：精选了历届考研试题中涉及本章内容的试题，开阔了学生的视野，“一步到位”，使准备报考硕士研究生的学生更加明了考研的题型和难度，做到有的放矢。

7. 自测题：每章都给出了适量的自测题，并附有自测题参考答案，便于学生在学习完本章后自我检查掌握本章所学知识的情况，复习巩固所学内容。

相信读者通过对本书系统阅读，对学习好高等数学会有极大帮助。

本书第 1 章由徐彬编写、第 2 章由李春桃编写、第 3 章由沈小芳编写、第 4 章～第 6

章由朱祥和编写、第 7 章由柯玲编写、第 9 章由阎国辉编写、第 8 章、第 12 章由龙松编写、第 10 章、第 11 章由张文钢编写。

限于编者的水平，错漏不当在所难免，诚恳期望同行和读者不吝批评指正。

编 者

2014 年 5 月

目 录

第 1 章 函数与极限	1
1.1 大纲基本要求	1
1.2 内容提要	1
1.3 解难释疑	7
1.4 典型例题选讲	12
1.5 错解分析	25
1.6 考研真题选解	30
1.7 自测题	35
第 2 章 导数与微分	39
2.1 大纲基本要求	39
2.2 内容提要	39
2.3 解难释疑	43
2.4 典型例题选讲	44
2.5 错解分析	59
2.6 考研真题选解	64
2.7 自测题	69
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	72
3.1 大纲基本要求	72
3.2 内容提要	72
3.3 解难释疑	77
3.4 典型例题选讲	80
3.5 错解分析	101
3.6 考研真题选解	102
3.7 自测题	110
第 4 章 不定积分	113
4.1 大纲基本要求	113
4.2 内容提要	113
4.3 解难释疑	115
4.4 典型例题选讲	117

4.5	错解分析	129
4.6	考研真题选解	131
4.7	自测题	133
第5章	定积分	138
5.1	大纲基本要求	138
5.2	内容提要	138
5.3	解难释疑	142
5.4	典型例题选讲	144
5.5	错解分析	159
5.6	考研真题选解	161
5.7	自测题	172
第6章	定积分的应用	175
6.1	大纲基本要求	175
6.2	内容提要	175
6.3	解难释疑	176
6.4	典型例题选讲	176
6.5	错解分析	183
6.6	考研真题选解	186
6.7	自测题	192
第7章	常微分方程	194
7.1	大纲基本要求	194
7.2	内容提要	194
7.3	解难释疑	196
7.4	典型例题选讲	198
7.5	错解分析	211
7.6	考研真题选解	215
7.7	自测题	221
第8章	空间解析几何与向量代数	225
8.1	大纲基本要求	225
8.2	内容提要	225
8.3	解难释疑	231
8.4	典型例题选讲	232
8.5	错解分析	242
8.6	考研真题选解	245
8.7	自测题	246

第 9 章 多元函数微分法及其应用	249
9.1 大纲基本要求	249
9.2 内容提要	249
9.3 解难释疑	255
9.4 典型例题选讲	259
9.5 错解分析	270
9.6 考研真题选解	276
9.7 自测题	282
第 10 章 重积分	287
10.1 大纲基本要求	287
10.2 内容提要	287
10.3 解难释疑	292
10.4 典型例题选讲	294
10.5 错解分析	313
10.6 考研真题选解	317
10.7 自测题	324
第 11 章 曲线积分与曲面积分	330
11.1 大纲基本要求	330
11.2 内容提要	330
11.3 解难释疑	339
11.4 典型例题选讲	341
11.5 错解分析	354
11.6 考研真题选解	358
11.7 自测题	363
第 12 章 无穷级数	368
12.1 大纲基本要求	368
12.2 内容提要	368
12.3 解难释疑	373
12.4 典型例题选讲	374
12.5 错解分析	383
12.6 考研真题选解	387
12.7 自测题	396
参考文献	399

第1章 函数与极限

1.1 大纲基本要求

- (1) 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
- (2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
- (3) 了解反函数的概念,掌握由直接函数求反函数的方法;理解复合函数的概念,会进行函数的复合运算和复合步骤的分解.
- (4) 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
- (5) 了解数列极限和函数极限的概念,掌握函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.
- (6) 了解极限的性质和存在准则,记住并会运用两个重要极限公式.
- (7) 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小的比较方法,了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系,会用等价无穷小量求极限.
- (8) 掌握极限的四则运算法则,并熟练地用来求数列及函数的各类极限,会用变量代换的方法求某些简单复合函数的极限.
- (9) 理解函数连续性的概念,会判别函数间断点的类型.
- (10) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质,并会运用这些性质.

1.2 内容提要

1.2.1 集合

1. 集合概念

具有某种特定性质的事物的总体称为集合,组成这个集合的事物称为该集合的元素.通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.

表示集合的方法有两种:一种是列举法,另一种是描述法.

2. 集合的运算

(1) 集合的基本运算有以下几种:

并集 $A \cup B$, 交集 $A \cap B$, 差集 $A - B$, 补集 A^c .

(2) 集合的运算法则:

交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

对偶律: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

3. 区间和邻域

介于某两个实数之间的全体实数称为区间, 区间有闭区间与开区间、有限区间与无限区间之分, 区间是有关数集的一种常用表示方法.

邻域是一种特殊的开区间.

a 的 δ 邻域就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 记为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$$

a 的去心 δ 邻域就是两个开区间的并集 $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, 记为 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

1.2.2 映射

1. 映射的概念

设 X, Y 是两个非空集合, 如果存在一个法则 f , 使得对 X 中每个元素 x , 按法则 f , 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记为 $f: X \rightarrow Y$. 集合 X 称为映射 f 的定义域, 记为 D_f , X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域, 记为 R_f 或 $f(X)$.

映射又称为算子. 根据集合 X, Y 的不同情形, 在不同的数学分支中, 映射又有不同的惯用名称. 从实数集(或其子集) X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

2. 逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射, 对每个 $y \in R_f$, 有唯一的 $x \in X$, 适合 $f(x) = y$. 定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g , 即 $g: R_f \rightarrow X$, 对每个 $y \in R_f$, 规定 $g(y) = x$, 这里 x 满足 $f(x) = y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射, 记为 f^{-1} , 其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域 $R_{f^{-1}} = X$.

设有两个映射 $g: X \rightarrow Y_1, f: Y_2 \rightarrow Z$, 其中 $Y_1 \subset Y_2$, 则由映射 g 和 f 可以定义一个从 X 到 Z 的对应法则, 该法则将每个 $x \in X$ 映射成 $f[g(x)] \in Z$, 这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射, 这个映射称为由映射 g 和 f 构成的复合映射, 记为 $f \circ g$.

1.2.3 函数

1. 函数的概念

设数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为 $y = f(x), x \in D$, 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记为 D_f , 即 $D_f = D$. 对每个 $x \in D$, 按照对应法则 f , 总有唯一确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记为 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记为 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

2. 函数的几种特性

(1) 有界性: 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果存在正常 M , 使得任意 $x \in X$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上是有界的; 否则, 就是无界的.

(2) 单调性: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及

x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的; 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

(3) 奇偶性: 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称, 奇函数的图像关于原点对称.

(4) 周期性: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 l , 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

3. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 R_f , 如果对于 R_f 中任意一 y , 从关系式 $y = f(x)$ 中可以确定唯一的一个 x 与之对应, 则称变量 x 为变量 y 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$.

由于习惯上自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示, 一般地, $y = f(x)$, $x \in D$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

4. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g , 且其值域 $R_g \subset D_f$, 则 $y = f[g(x)]$, $x \in D_g$ 称为由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数, 其定义域为 D_g , 变量 u 称为中间变量.

5. 函数的运算

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域依次为 D_1, D_2 , $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, 则定义这两个函数的下列运算:

和(差) $f \pm g: (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D$.

积 $f \cdot g: (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$.

商 $\frac{f}{g}: \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0, x \in D\}$.

6. 初等函数

(1) 基本初等函数.

幂函数: $y = x^\mu (\mu \in \mathbf{R} \text{ 为常数})$.

指数函数: $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$.

对数函数: $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 特别地, 当 $a = e$ 时, 记为 $y = \ln x$.

三角函数: 如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等.

反三角函数: 如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

以上这五类函数统称为基本初等函数.

(2) 初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可以用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

7. 分段函数

如果在不同的自变量变化范围内, 函数有着不同的表达形式, 这类函数称为分段函数.

常见的分段函数有

- (1) 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
- (2) 取整函数 $y = [x]$, 即 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数.

1.2.4 极限

1. 极限的定义

极限的 ϵ - N 、 ϵ - δ 定义如表 1.1 所示.

表 1.1 极限的 ϵ - N 、 ϵ - δ 定义

记 号	定 义				常数 A 的意义	
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$	$\forall \epsilon > 0$	$\exists N > 0$	当 $n > N$ 时	总有 $ a_n - A < \epsilon$	$n \rightarrow \infty$ 时数列 $\{a_n\}$ 的极限	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$			当 $x > N$ 时	总有 $ f(x) - A < \epsilon$	$x > 0$	x 趋于无穷大时函数 $f(x)$ 的极限
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$			当 $x < -N$ 时		$x < 0$	
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$			当 $ x > N$ 时		$ x > 0$	
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$	$\forall \epsilon > 0$	$\exists \delta > 0$	当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时	总有 $ f(x) - A < \epsilon$	双边极限	x 趋于有限值 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$			当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时		左极限	
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$			当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时		右极限	
$\lim u = A$				u 在其变化过程中的某个时刻后	总有 $ u - A < \epsilon$	变量在其变化过程中的极限

注: 极限值 A 为常数; ϵ 、 δ 、 N 均为正数.

2. 极限的性质

- (1) 唯一性: 若 $\lim u = A$, 则 A 值是唯一的.
- (2) 有界性: 若 $\lim u = A$, 则 u 在其变化过程中必有界.
- (3) 保号性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

以函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 为例, 其余几种可以类比得到.

3. 极限的运算法则

(1) 极限的四则运算.

- 设 $\lim u = A, \lim v = B$ (A, B 均为常数), 则:
- $\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v = A \pm B$ (可以推广到有限个的情形);
- $\lim(uv) = \lim u \cdot \lim v = AB$ (可以推广到有限个的情形);
- $\lim(cu) = c \cdot \lim u = cA$ (c 为常数);
- $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

(2) 极限的复合运算.

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成, $f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta_0)$ 时, 有 $g(x) \neq u_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$.

4. 极限存在准则

(1) 夹逼准则: 若 $u \leq w \leq v$, 且 $\lim u = \lim v = A$, 则 $\lim w = A$.

(2) 单调有界数列必有极限.

5. 左右极限

左右极限的定义见表 1.1.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

6. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

1.2.5 无穷大与无穷小

1. 基本概念

(1) 无穷大量是绝对值无限增大的变量.

(2) 无穷小量是绝对值无限缩小的变量, 或者称极限为零的变量为无穷小量.

2. 无穷小的运算性质

(1) 有限个无穷小的代数和仍然是无穷小;

(2) 有限个无穷小的乘积仍然是无穷小;

(3) 无穷小与有界变量的乘积仍然是无穷小.

3. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 如果 $f(x)$ 为无穷

小且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

4. 无穷小的比较

设 α 与 β 均为无穷小量

若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$, 则称 α 是比 β 高阶的无穷小 (或称 β 是比 α 低阶的无穷小), 记为 $\alpha = o(\beta)$;

若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow c \neq 0$ (c 为常数), 则称 α 与 β 是同阶无穷小;

若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 1$, 则称 α 与 β 是等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$;

若 $\frac{\alpha}{\beta^k} \rightarrow c \neq 0$, 则称 α 是 β 的 k 阶无穷小 ($k > 0$).