

21世纪高等学校
工科数学辅导教材

线性代数

学习指南

赵晓颖 刘 晶 潘 斌 等编著



化学工业出版社

21世纪高等学校
工科数学辅导教材

线性代数

学习指南

赵晓颖 刘 晶 潘 斌 等编著
陈明明 主 审



化学工业出版社

本书以教育部制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》为依据，与同济大学编写的《线性代数》教材相配套。

本书共分五章，每章内容包括教学基本要求、内容要点、精选题解析、疑难解析与强化练习题（A 题、B 题），书末附有四套自测题以及强化练习题和自测题的参考答案。本书将线性代数诸多问题进行了合理的归类，并通过对典型例题的解析，诠释解题技巧和进行方法归纳，帮助读者在理解概念的基础上，充分掌握知识和增强运算能力。

本书可作为普通高等院校理工类各专业的教学用书或教学参考书，也可作为线性代数课程考研学习参考资料。

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数学习指南/赵晓颖等编著. —北京：化学工业出版社，2014.8

21 世纪高等学校工科数学辅导教材

ISBN 978-7-122-21338-9

I. ①线… II. ①赵… III. ①线性代数-高等学校-教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 161406 号

责任编辑：唐旭华 郝英华
责任校对：吴 静

装帧设计：张 辉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）

印 刷：北京市振南印刷有限责任公司

装 订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm 1/16 印张 9½ 字数 249 千字 2014 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899

网 址：<http://www.cip.com.cn>

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定 价：19.00 元

版权所有 违者必究

目 录

第一章 行列式	1
一、内容要点	1
二、精选题解析	4
三、疑难解析	21
四、强化练习题	23
第二章 矩阵及其运算	27
一、内容要点	27
二、精选题解析	31
三、疑难解析	39
四、强化练习题	40
第三章 矩阵的初等变换与线性方程组	45
一、内容要点	45
二、精选题解析	50
三、疑难解析	61
四、强化练习题	61
第四章 向量组的线性相关性	66
一、内容要点	66
二、精选题解析	72
三、疑难解析	93
四、强化练习题	94
第五章 相似矩阵及其二次型	100
一、内容要点	100
二、精选题解析	105
三、疑难解析	118
四、强化练习题	120
线性代数自测题	125
自测题(一)	125
自测题(二)	126
自测题(三)	127
自测题(四)	129
自测题参考答案	131
自测题(一)	131
自测题(二)	131
自测题(三)	132
自测题(四)	133
强化练习题参考答案	135

第一章 行列式

本章基本要求

理解 2 阶与 3 阶行列式的定义, 掌握 2 阶与 3 阶行列式的对角线法则. 了解全排列与逆序数的定义, 掌握全排列逆序数的计算方法. 了解 n 阶行列式的定义, 掌握一些特殊类型的 n 阶行列式的结果. 掌握行列式的性质, 重点掌握利用行列式的性质计算较低阶行列式以及特殊类型的 n 阶行列式的方法. 理解余子式和代数余子式的概念, 掌握其运算, 重点掌握行列式的按行(列)展开法则. 了解克莱姆法则求解线性方程组的方法, 理解系数行列式与线性方程组解的关系.

一、内容要点

(一) n 阶行列式的定义

1. 排列和逆序

由 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组 $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$ 称为一个 n 元排列. 所有不同的 n 元排列共有 $n!$ 个. 在一个排列 $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$ 中, 如果一个大的数排在小的数前面, 就称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数, 通常记为 $\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)$. 若一个排列的逆序数为奇数, 则称这个排列为奇排列, 否则称为偶排列.

在一个排列 $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$ 中, 如果交换任意两个数的位置, 称为对排列作一次对换. 对换改变排列的奇偶性.

2. n 阶行列式的定义

由 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表, 记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix},$$

做出表中所有取自不同

行、不同列 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的所有代数和, 就称为此行列式的值. 这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个全排列. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶(奇)排列时, 该项的前面带正(负)号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

式中, $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $1, 2, \dots, n$ 所有不同的 n 元排列求和.

注意: 由于 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 所有不同的 n 元排列共有 $n!$ 项, 所以 n 阶行列式的值是由所有不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的 $n!$ 项之代数和组成, 其结果是一个

数值.

(二) 余子式、代数余子式

在 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中, 划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列, 由剩下的

元素按原位置排成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} . 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 记为 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

(三) 行列式的性质

性质 1 行列互换, 行列式的值不变.

注意: 该性质表明了行列式中行、列地位的对称性. 也就是说, 行列式中有关行的性质对列也同样成立.

性质 2 对换行列式的两行 (列), 行列式改变符号.

推论 如果行列式有两行 (列) 完全相同, 则此行列式为零.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行 (列), 等于用数 k 乘以此行列式.

推论 行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子可以提到行列式记号外面.

性质 4 行列式中, 如果有两行 (列) 的对应元素成比例, 则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一行 (列) 的元素都是两个数之和, 则此行列式等于两个行列式之和, 如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式某一行 (列) 的若干倍加到另一行 (列) 上去, 行列式不变.

(四) 行列式按行 (列) 展开定理

定理 n 阶行列式等于它的任一行 (列) 的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和.

推论 1 n 阶行列式中某一行 (列) 的每个元素与另一行 (列) 相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

推论 2 在 n 阶行列式中, 若有一行 (列) 除去一个元素 $a_{ij} \neq 0$ 外其余元素均为零, 则此行列式的值等于这个非零元素与其代数余子式的乘积. 即 $D = a_{ij}A_{ij}$.

以上结论用公式表示为: 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 则

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} D, & i=k, \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$\text{或} \quad a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \begin{cases} D, & j=k, \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

(五) 几种特殊行列式的结论

1. 对角行列式、上(下)三角行列式的值等于主对角线上元素之积

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 两个特殊的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

3. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

4. 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & \end{vmatrix} \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(六) 行列式的计算方法

1. 基本方法

- (1) 直接利用行列式定义或行列式性质算得结果;
- (2) 用行列式的性质, 化行列式成三角形行列式;
- (3) 按某一行(列)展开.

2. 常用方法

- (1) 递推法;
- (2) 数学归纳法;
- (3) 利用一些已知结论. 如①范德蒙行列式; ②特殊行列式.

【例 3】 $D = \begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解析】 注意到行列式中第 1 列的 3 个数分别与 100, 200, 300 较接近, 而第 3 列的 3 个数分别与 200, 400, 600 较接近, 所以由行列式的性质知, 将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列上, 将第 2 列的 -2 倍加到第 3 列上, 第 2 列再提取公因数 100, 则有

$$D = \begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

对于最后的行列式, 可以将第 3 行加到第 2 行上, 同时将第 3 行的 -3 倍加到第 1 行上, 再按第 1 列展开, 得

$$D = 100 \begin{vmatrix} 0 & -8 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 100 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 100 \cdot (40 - 20) = 2000.$$

注意 (1) 用行列式性质计算行列式时, 为减少重复书写, 通常计算一步行列式可以多次利用行列式性质; (2) 以后为简单起见, 行列式的第 i 行 (列) 的 k 倍加到第 j 行 (列) 上, 常记为 $kr_i + r_j$ ($kc_i + c_j$).

【例 4】 若 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解析】 方法一 用 $(-5)r_1 + r_2$, 然后两次都按第 1 列展开, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -4(5x - 12) = 0,$$

所以, $x = \frac{12}{5}.$

方法二 直接用“本章内容要点(五)几种特殊行列式的结论”中 2, 得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -4(5x - 12) = 0.$$

得到答案, $x = \frac{12}{5}.$

【例 5】 $D = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解析】 方法一 直接按行列式展开公式 [在此按第 1 行 (列) 展开] 及对角行列式的结论得

$$D = n \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-1)^{n-1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^n n!.$$

方法二 注意到所有 $n!$ 项中, 不等于零的项只有 $a_{11}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n2}$ 这一项, 它为 $(-1)^{\tau(1,3,4,\cdots,n,2)} n! = (-1)^{n-2} n! = (-1)^n n!$.

【例 6】 在函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中, x^3 的系数为_____.

【解析】 方法一 根据行列式的定义考察能组成 x^3 的项. 由于行列式的 $n!$ 中每一项都是不同行、不同列的 n 个元素的乘积, 在此组成 x^3 的项中必须每项都含有 x , 由于第 1, 3 行中各只含有一个带 x 的项, 即 a_{11} 和 a_{33} , 所以根据不同行、不同列的原则, 带有 a_{11} 和 a_{33} 的项只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}$, 又因为这一项的符号为正, 所以此项为 $2x \cdot (-x) \cdot x = -2x^3$, 得 x^3 的系数为 -2 .

方法二 要求 x^3 的系数, 只需考察组成 x^3 的项即可. 事实上, 只需考察 $2x \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -x & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = -2x^3 - 4x^2$, 或 $x \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -x & -x \end{vmatrix} = -2x^3 + x^2$ 中 x^3 的系数即可. 得 x^3 的系数为 -2 .

【例 7】 设 a, b 为实数, 则当 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

【解析】 将行列式按第 3 列展开, 得

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2),$$

所以应填 $a=0, b=0$.

【例 8】 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解析】 因为所有 $4! = 24$ 项中, 只有 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ 这一项不为零, 此时列标的排列为 4, 1, 2, 3, 且为奇排列, 符号为负, 所以原式 $= -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = -24$.

【例 9】 已知 $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 则 $\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解析】 考察所求行列式, 可见先进行 $3r_3 + r_1$, 即得

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

为了利用已知行列式, 再将 a_{22} 位置元素化为零, 为此进行 $(-2)r_3 + r_2$, 得到

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

这正是已知行列式的转置行列式. 再由“本章内容要点(三)行列式的性质”中的性质 1 得

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

【例 10】 已知 a 为实数, $D = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $a =$ _____.

【解析】 $D = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1 - a \cdot a \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4 = 0,$$

所以 $a = \pm 1$.

(二) 选择题

【例 1】 与 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 等值的行列式为_____.

(A) $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$

(B) $\begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12}+a_{13} & a_{13}+a_{11} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22}+a_{23} & a_{23}+a_{21} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32}+a_{33} & a_{33}+a_{31} \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} & a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} & a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a_{33} & a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{vmatrix}$

【解析】 由行列式性质, 得知, (B) 的第 1, 3 列均有公因数 -1 , 提取后为 $(-1)^2$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, 所以应选 (B). 而 (A) 与原行列式相差一个负号. 对于 (C), (D) 按

行列式性质展开后可以发现与原行列式不相等.

【例 2】 设 a, b 为实数, 若 $\begin{vmatrix} -1 & b & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, 则_____.

(A) $b \neq 0$

(B) $a \neq 0$

(C) $b \neq \pm 1$

(D) $a \neq \pm 1$

【解析】 方法一 按第 3 列展开, 得

$$\begin{vmatrix} -1 & b & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & b \\ -b & 1 \end{vmatrix} = -(-1+b^2) \neq 0.$$

由此得, 应选 (C).

方法二 按教材中的对角线法, 也可得到原行列式等于 $1-b^2 \neq 0$, 可知应选 (C).

【例 3】 已知 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3$, 则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A) 18 (B) -18 (C) -9 (D) 27

【解析】 先由“本章内容要点(三)行列式的性质”中的性质 5, 将

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix}$$

分解成两个行列式之和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33} & 3a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & -5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & -5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & -5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix},$$

在第 2 个行列式中提取公因数 -5 后发现最后两列成比例, 所以等于零. 第 1 个行列式分别提取公因数 2 与 3 后, 得

$$\text{原式} = 6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{21} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \\ a_{13} & a_{33} & a_{23} \end{vmatrix} = 6 \cdot (-3) = -18.$$

应选 (B).

【例 4】 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

- (A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$ (B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$
 (C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$ (D) $(a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3)$

【解析】 直接将行列式按第 1 行展开

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ = a_1 a_4 (a_2 a_3 - b_2 b_3) - b_1 b_4 (a_2 a_3 - b_2 b_3),$$

所以应选 (D).

【例 5】 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} = 0$ 的根的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【解析】 在此求方程 $f(x)=0$ 的根的个数, 实际是求多项式的次数. 先进行 $(-1)c_1 + c_2$, $(-1)c_1 + c_3$, $(-1)c_1 + c_4$, 可得

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix},$$

再进行 $c_2 + c_4$, 得

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}.$$

在此直接用“本章内容要点(三)几种特殊行列式的结论”中 2 可知, $f(x)$ 实际上是一个二次多项式, 故有 2 个根.

如果再继续运算, 可对上式进行 $(-1)r_2 + r_1$, 得

$$f(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix},$$

所以, $f(x) = -x \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} = 0$, 可得到 $f(x)$ 是一个二次多项式, 故有 2 个根, 应选 (B).

【例 6】方程 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3-x^2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 5-x^2 \end{vmatrix} = 0$ 的根为_____.

(A) $\pm 1, \pm\sqrt{3}$ (B) $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}$ (C) $\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}$ (D) $\pm 1, \pm\sqrt{5}$

【解析】注意到, 方程为四次方程, 故有 4 个根, 又由行列式的性质知, 当 $3-x^2=2$ 及 $5-x^2=2$ 时, 行列式中有两行相同, 此时行列式等于零. 所以得 $x^2=1$ 和 $x^2=3$, 从而 $x = \pm 1, \pm\sqrt{3}$, 应选 (A).

注意 此题也可以利用行列式的性质展开后, 求出结果.

【例 7】已知线性方程组 $\begin{cases} \lambda x - y = a \\ -x + \lambda y = b \end{cases}$, 有唯一解, 则 λ 满足_____.

(A) 为任意实数 (B) 等于 ± 1 (C) 不等于 ± 1 (D) 不等于零

【解析】由克莱姆法则知, 此时系数行列式必有 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0$, 否则无解或有无穷多解. 所以 $\lambda \neq \pm 1$. 应选 (C).

【例 8】设线性方程组 $\begin{cases} bx - ay = -2ad, \\ -2cy + 3bz = bc, \\ cx + az = 0, \end{cases}$ 则_____.

(A) 当 a, b, c 取任意非零实数时, 方程组均有解 (B) 当 $a=0$ 时, 方程组无解
(C) 当 $b=0$ 时, 方程组无解 (D) 当 $c=0$ 时, 方程组无解

【解析】方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = -5abc,$$

由克莱姆法则知, 当 a, b, c 同时取任意非零实数时, 方程组有唯一解, 当然有解. 而当 a, b, c 中有一个为零时, 它或无解或有无穷多解, 不能确定是否无解. 事实上, 由第四章的结论

算增加困难); 当 $a_{11}=0$ 时, 可以通过交换行或列的方法, 使得 $a_{11} \neq 0$. 最好的方法是通过交换行或列的方法直接使得 $a_{11}=1$. 然后把第 1 行的 $(-1) a_{i1} (i=2,3,\cdots,n)$ 倍分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行上, 这样就把第 1 列 a_{11} 以下的元素全化为零, 再逐次用类似的方法把主对角元素 $a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{n-1,n-1}$ 以下 (或以上) 的元素全部化为零, 则行列式就化为上 (或下) 三角形行列式了.

【解析】 先进行 $r_1 \leftrightarrow r_2$, 得

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

将 $r_1(-2)+r_3, r_1(-3)+r_4, r_1(-4)+r_5$, 得

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & -8 \\ 0 & 3 & -3 & -7 & -12 \end{vmatrix},$$

由于 $a_{22}=1$, 再对 a_{22} 以下元素化为零, 即进行 $r_2(-1)+r_3, r_2(-2)+r_4, r_2(-3)+r_5$, 得

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & -12 & -16 \\ 0 & 0 & -9 & -16 & -24 \end{vmatrix},$$

第 3, 4 行提取 -2 , 第 5 行提取 -1 , 得

$$D = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 16 & 24 \end{vmatrix},$$

因为 $a_{33}=2$, 为避免元素变为分数, 将 $(-1)r_4+r_3$, 并提取 -1 , 得

$$D = -4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 16 & 24 \end{vmatrix},$$

再将 $(-3)r_3+r_4, (-9)r_3+r_5$, 得

$$D = -4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -12 \end{vmatrix},$$

第 4, 5 行提取 -1 , 得

$$D = -4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{vmatrix},$$

交换第 4 列与第 5 列, 最后 $(-3)r_4 + r_5$, 得到

$$D = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 11 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 32.$$

注意 在以上的运算中, 若结合行列式的展开, 计算会更简单些. 见【例 4】及【例 5】.

【例 2】 计算 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$, $a_i \neq 0, i=1, 2, \cdots, n$.

【解析】 从第 2 列开始, 将行列式 D_{n+1} 的第 i 列 ($i=2, 3, \cdots, n+1$) 的 $\left(-\frac{c_{i-1}}{a_{i-1}}\right)$ 倍, 分别加到第 1 列上, 得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{c_i b_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{c_i b_i}{a_i} \right).$$

【例 3】 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0, i=1, 2, \cdots, n$.

【解析】 由于行列式中有很多元素等于 1, 所以先将第 1 行的 (-1) 倍加到各行上去, 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (\text{可见这已经是与上例形状相同的行列式了}),$$

从第 2 列开始, 将行列式 D_n 的第 i 列 ($i=2, 3, \cdots, n$) 的 $\left(\frac{a_1}{a_i}\right)$ 倍, 分别加到第 1 列上, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_2 a_3 \cdots a_n \left(1 + a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i} \right)$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right).$$

2. 利用展开定理将行列式降阶

通常先利用行列式的性质把原行列式的某一行(列)的元素尽可能多地化为零,使该行(列)不为零的元素只有一个或两个,然后再按该行(列)展开.

【例 4】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

【解析】 由“本章内容要点(四)行列式按行(列)展开定理”的推论 2 知,利用行列式的性质将行列式中的某一行(列)转换成只有一个非零元素后,再按展开定理计算就只需计算一个 3 阶行列式了.为此,分别进行 $(-2)c_1 + c_3$ 和 $(-5)c_1 + c_4$, 然后按第 1 行展开,则得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -4 & -9 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -1 & -4 & -9 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix},$$

对于这个 3 阶行列式,再进行 $2r_2 + r_1$ 以及 $3r_2 + r_3$, 最后按第 1 列展开,变为计算一个 2 阶行列式,得到

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -1 & -4 & -9 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -10 \\ -1 & -4 & -9 \\ 0 & -10 & -30 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -30 \end{vmatrix} = 50.$$

【例 5】 利用展开定理将行列式降阶的方法计算【例 1】中 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

【解析】 先进行 $(-2)r_2 + r_3$, $(-3)r_2 + r_4$, $(-4)r_2 + r_5$, 得

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & -8 \\ 0 & 3 & -2 & -7 & -12 \end{vmatrix},$$