普通高等教育“十二五”重点规划教材配套辅导

Nucleus
新核心
理工基础教材

概率论与数理统计
学习指导与习题精解

徐晓岭 王蓉华 编

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材
Nucleus 新核心 理工基础教材

概率论与数理统计学习指导与习题精解

徐晓岭 王蓉华 编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是配合《概率论与数理统计》而编写的一本学习指导用书. 全书紧扣教材，共分 10 章，第 1 章至第 5 章是概率论，第 6 章至第 10 章是数理统计. 每一章由精选习题、习题精解、阅读与提高三部分组成，并将一些新的研究成果融入本书之中.

本书还可作为高等院校统计学专业以及理工类等其他专业师生阅读参考，也可作为考研参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导与习题精解 / 徐晓岭，王蓉华编. —上海：上海交通大学出版社，2014
ISBN 978-7-313-10444-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①徐… ②王… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 316945 号

概率论与数理统计学习指导与习题精解

编　　者：徐晓岭　王蓉华
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：昆山亭林印刷有限责任公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×960 mm　1/16　　印　　张：31
字　　数：600 千字
版　　次：2014 年 3 月第 1 版　　印　　次：2014 年 3 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-10444-1/O
定　　价：49.00 元

前　言

本书《概率论与数理统计学习指导与习题精解》是徐晓岭与王蓉华编写、上海交通大学出版社出版的《概率论与数理统计》教材相配套的习题指导书. 本书的编排分两部分，第1章至第5章是概率论，第6章至第10章是数理统计. 每一章由精选例题、习题解答和阅读与提高3部分组成，并将一些新的研究成果融入本书之中.

本书由上海对外经贸大学的徐晓岭、上海师范大学的王蓉华两位作者合作完成. 徐晓岭编写了第1至第5章，王蓉华编写了第6至第10章，并由徐晓岭对全书进行了统稿.

本书可作为大学理工类本科生概率论与数理统计的教学参考书，对考研的学生也具有一定的参考价值.

本书的撰写得到了上海对外经贸大学的顾蓓青、赵飞、沙丹、凌学岭、王磊、范登锋、陈洁、徐冰纨等老师的关心与帮助，此外，上海师范大学概率论与数理统计专业的部分硕士研究生张晓丽、李智军、魏晓、金藜勤、廖英、段贵锋、方园、王赟、胡平，上海对外经贸大学国际经济与贸易专业的硕士研究生梁舒，2009级统计学专业的本科生程慧君、於笑扬，2010级统计学专业的本科生刘芳芳、李桂芳、王园园、杨雯逸也对本书的撰写提供了协助，在此一并深表感谢！

本书的出版得到了上海对外经贸大学地方本科085工程（二期）建设项目——统计学重点专业建设的资助！

由于编者水平有限，书中存在的不妥或谬误之处，期望广大读者和专家批评指正.

作　者

2013年3月于上海

目　　录

第1章 随机事件与概率

1.1 精选例题

例1 以A表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件$\bar{A}$为(D).

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销” (B)“甲、乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销” (D)“甲种产品滞销，或乙种产品畅销”

解 选D.设甲、乙两种产品畅销的事件分别为B, C，则$A = B\bar{C}$, $\bar{A} = \overline{B\bar{C}} = \bar{B} \cup C$, $\bar{A}$为甲种产品滞销或乙种产品畅销.

例2 已知$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \dfrac{1}{8}$，求事件$A$, B, C都全不发生的概率.

解 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$,

且
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC),$$

又由于$ABC \subseteq AB$，故$P(ABC) \subseteq P(AB) = 0$，即$P(ABC) = 0$,

所以$P(A \cup B \cup C) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - 0 - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8} + 0 = \dfrac{1}{2}$, $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

例3 已知事件AB发生，则事件C一定发生，证明：$P(A) + P(B) - P(C) \leqslant 1$.

证明 由于事件AB发生，事件C必然发生，则$AB \subseteq C$即$P(AB) \leqslant P(C)$,

故 $P(A) + P(B) - P(C) \leqslant P(A) + P(B) - P(AB) = P(A \cup B) \leqslant 1$.

例4 设A, B, C为三事件，且$P(B) = k_1 P(A)$, $P(C) = k_2 P(A)$, k_1, $k_2 > 0$, $k_1 + k_2 > 1$, $P(BC) \leqslant P(A)$，证明：$P(A) \leqslant \dfrac{1}{k_1 + k_2 - 1}$.

证明 由一般加法公式有：

$$\begin{aligned}
&P(A \cup B \cup C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - [P(AB) + P(AC) - P(ABC)] - P(BC) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P[A(B \cup C)] - P(BC),
\end{aligned}$$

再考虑到 $P(A\cup B\cup C)\leqslant 1$，$P(BC)\leqslant P(A)$，$P[A(B\cup C)]\leqslant P(A)$，得不等式

$$P(B)+P(C)-P(A)\leqslant 1,$$

即 $(k_1+k_2-1)P(A)\leqslant 1$，解之得：$P(A)\leqslant \dfrac{1}{k_1+k_2-1}$.

例 5　一个袋子中共有 N 个球，其中红球 N_1 个，黑球 N_2 个，若分别采用摸后"放回"与"不放回"两种方式来任取 $a+b$ 个球，试求这 $a+b$ 个球中恰有 a 个红球和 b 个黑球的概率.

解　首先观察"不放回"的情况：

"不放回"可以有两种理解：一是，一次取出 $a+b$ 个球；二是，不放回地一个一个地取，取 $a+b$ 次. 若按第一种方式，每取一次就做了一次试验，构成一个基本事件，只观察颜色而不分顺序，则基本事件总数为：C_N^{a+b}，设 A 表示"$a+b$ 个球中恰有 a 个红球和 b 个黑球"，将 A 发生的过程分为两步：先在红球中取 a 个，再在黑球中取 b 个，则此时的样本点数为：$\mathrm{C}_{N_1}^a\mathrm{C}_{N_2}^b$，

故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_{N_1}^a\mathrm{C}_{N_2}^b}{\mathrm{C}_N^{a+b}};$$

若按第二种方式，一个一个地取，每次记录下颜色和球的编号，不放回取 $a+b$ 个球是有顺序的，构成 $a+b$ 个球的一个排列，则基本事件总数为 P_N^{a+b}，此时 A 发生的过程也可以分为如下的过程：在这 $a+b$ 个球的位置上，选 a 个位置放红球，剩下的放黑球，则事件的样本点数为：$\mathrm{C}_{a+b}^a\mathrm{P}_{N_1}^a\mathrm{P}_{N_2}^b$，故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_{a+b}^a\mathrm{P}_{N_1}^a\mathrm{P}_{N_2}^b}{\mathrm{P}_N^{a+b}}=\frac{\dfrac{\mathrm{P}_{N_1}^a}{a!}\,\dfrac{\mathrm{P}_{N_2}^b}{b!}}{\dfrac{\mathrm{P}_N^{a+b}}{(a+b)!}}=\frac{\mathrm{C}_{N_1}^a\mathrm{C}_{N_2}^b}{\mathrm{C}_N^{a+b}};$$

因为一个一个取和一次取是一样的，所以还有如下的方法：

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_{N_1}^a\mathrm{C}_{N_2}^b(a+b)!}{\mathrm{P}_N^{a+b}}=\frac{\mathrm{C}_{N_1}^a\mathrm{C}_{N_2}^b}{\mathrm{C}_N^{a+b}},$$

其次观察"放回"的情况：

一个一个放回的抽取，可以看成可重复的排列，样本空间的样本点数为：N^{a+b}，则 A 所含的样本点数为：$\mathrm{C}_{a+b}^aN_1^aN_2^b$，故 $P(A)=\dfrac{\mathrm{C}_{a+b}^aN_1^aN_2^b}{N^{a+b}}$.

例 6　（彩票问题）一种福利彩票称为幸福 35 选 7，即从 01，02，…，35 中不重复地开出 7 个基本号码和一个特殊号码，中各等奖的规则如表 1.1 所示，试求各等

奖的中奖概率.

表 1.1　彩票中奖规则

中奖级别	中　奖　规　则
一等奖	中 7 个基本号码
二等奖	中 6 个基本号码及特殊号码
三等奖	中 6 个基本号码
四等奖	中 5 个基本号码及特殊号码
五等奖	中 5 个基本号码
六等奖	中 4 个基本号码及特殊号码
七等奖	中 4 个基本号码,或中 3 个基本号码及特殊号码

解　由于这是一种不放回抽样的试验,所以其样本空间 Ω 含有 C_{35}^{7} 个样本点,要中奖需把抽取看成是在如下三种类型中抽取：第一类号码：7 个基本号码;第二类号码：1 个特殊号码;第三类号码：27 个无用号码.

若记 p_i 为中第 i 等奖的概率 ($i=1, 2, \cdots, 7$),则得各等奖的概率如下：

$$p_1=\frac{C_7^7C_1^0C_{27}^0}{C_{35}^7}=\frac{1}{6\ 724\ 520}=0.149\times10^{-6};$$

$$p_2=\frac{C_7^6C_1^1C_{27}^0}{C_{35}^7}=\frac{7}{6\ 724\ 520}=1.04\times10^{-6};$$

$$p_3=\frac{C_7^6C_1^0C_{27}^1}{C_{35}^7}=\frac{189}{6\ 724\ 520}=28.106\times10^{-6};$$

$$p_4=\frac{C_7^5C_1^1C_{27}^1}{C_{35}^7}=\frac{567}{6\ 724\ 520}=84.318\times10^{-6};$$

$$p_5=\frac{C_7^5C_1^0C_{27}^2}{C_{35}^7}=\frac{7\ 371}{6\ 724\ 520}=1.096\times10^{-6};$$

$$p_6=\frac{C_7^4C_1^1C_7^2}{C_{35}^7}=\frac{12\ 285}{6\ 724\ 520}=1.827\times10^{-6};$$

$$p_7=\frac{C_7^4C_1^0C_7^3+C_7^3C_1^1C_{27}^3}{C_{35}^7}=\frac{204\ 750}{6\ 724\ 520}=30.448\times10^{-3},$$

记 A 表示“中奖”, B 表示“未中奖”,则 $P(A)+P(B)=1$, 则

$$P(A)=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7=\frac{225\ 170}{6\ 724\ 520}=0.033\ 485,$$

$$P(B)=1-P(A)=1-0.033\ 485=0.966\ 515,$$

从上面得到的数据可以看出：中奖的概率只比 3%稍高些，而中一等奖的概率更少，只有 0.149×10^{-6}，说明中彩票的概率很低，要平常心看待这件事情，期望值不要过高.

例 7 (1) 设甲有 $n+1$ 枚硬币，乙有 n 枚，求甲掷出的正面数超过乙掷出的正面数的概率；(2) 设甲有 $n+2$ 枚硬币，乙有 n 枚硬币，投掷后比较，求甲掷出的正面数超过乙掷出的正面数的概率.

解 (1) 设乙掷出 k 个正面，甲掷出 $k+l$ 个正面，$0\leqslant k\leqslant n$，$l\geqslant1$，记 $A=\{甲正>乙正\}$，

则 $$P(A)=\frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{l=1}^{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+l}C_n^k=\frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{l=1}^{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{n+1-k-l}C_n^k=\frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{l=1}^{n+1}C_{2n+1}^{n+1-l}$$

$$=\frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{i=0}^{n}C_{2n+1}^{i}=\frac{1}{2^{2n+1}}\times\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{i}=\frac{1}{2^{2n+1}}\times\frac{1}{2}\times2^{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

如果利用对称性，则能很快得到答案，即记 $B=\{甲反>乙反\}$，显然 A 与 B 对称，故 $P(A)=P(B)$，在甲只比乙多一枚硬币的条件下(只有这种特殊情况下才有此特殊解法)，$\overline{B}=A$，因此有 $P(A)+P(B)=1$，即得 $P(A)=\dfrac{1}{2}$；

(2) 由对称性 $P(A)=P(B)$，但 $AB\neq\varnothing$，又由于 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$，故 $P(A\cup B)=P(\Omega)=1$，而

$$\begin{aligned}AB&=\{甲正>乙正,\ 甲反>乙反\}=\{甲正-乙正=1,\ 甲反-乙反=1\}\\&=\{甲正-乙正=1\}\end{aligned}$$

故 $P(AB)=\sum_{k=0}^{n}P\{甲正=k+1,\ 乙正=k\}=\dfrac{1}{2^{2n+2}}\sum_{k=0}^{n}C_{n+2}^{k+1}C_n^k=\dfrac{1}{2^{2n+2}}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1-k}^{n+2}C_n^k=\dfrac{C_{2n+2}^{n+1}}{2^{2n+2}}$，又 $1=P(A)+P(B)-P(AB)$，则 $P(A)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{C_{2n+2}^{n+1}}{2^{2n+2}}\right)$.

例 8 从 1, 2, …, 9 共 9 个数字中任取一个，取后放回，先后取出 5 个数字，求下列各事件的概率：(1) $A_1=$“最后取出的数字是奇数”；(2) $A_2=$“5 个数字全不相同”；(3) $A_3=$“1 恰好出现 2 次”；(4) $A_4=$“1 至少出现 2 次”；(5) $A_5=$“恰

好出现不同的两对数字”；(6) $A_6=$“总和为 10”.

解　(1) $P(A_1)=\dfrac{5\times 9^4}{9^5}\approx 0.556$；(2) $P(A_2)=\dfrac{\mathrm{P}_9^5}{9^5}\approx 0.256$；(3) $P(A_3)=\dfrac{\mathrm{C}_5^2\times 8^3}{9^5}\approx 0.0867$；(4) 1 恰好出现 k 次的所有取法为：$\mathrm{C}_5^k\times 8^{5-k}(k=2,3,4,5)$，

则
$$P(A_4)=\frac{\sum\limits_{k=2}^{5}\mathrm{C}_5^k\times 8^{5-k}}{9^5}=1-\frac{8^5+\mathrm{C}_5^1\times 8^4}{9^5}\approx 0.0982;$$

(5) 5 个数字看作 5 个位置，先在 5 个位置上的任一个位置放上一个数字，它有 $\mathrm{C}_5^1\times 9$ 中可能，在余下的 4 个位置上再放上不同的两对数字，它有 $\mathrm{C}_4^2\times\mathrm{C}_8^2$ 中可能，A_5 包含的基本事件数是 $\mathrm{C}_5^1\times\mathrm{C}_4^2\times\mathrm{C}_8^2\times 9$，则 $P(A_5)=\dfrac{\mathrm{C}_5^1\times\mathrm{C}_4^2\times\mathrm{C}_8^2\times 9}{9^5}\approx 0.128$；

(6) A_6 包含的基本事件数等于下列方程的正整数解的个数：

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$，$1\leqslant x_i\leqslant 9$，$i=1,2,3,4,5$，其中 x_i 代表第 i 次取得的数字. 令 $y_i=x_i-1$，$i=1,2,3,4,5$，则 A_6 包含的基本事件数即为如下方程的非负整数解的个数：C_9^5，

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=5,\ 0\leqslant y_i\leqslant 8,\ i=1,2,3,4,5,$$

进而
$$P(A_6)=\frac{\mathrm{C}_9^5}{9^5}=\frac{126}{9^5}\approx 0.00213.$$

例 9　设 $\{A_n,n=1,2,\cdots\}$ 为一组随机事件序列，且满足 $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}P(A_m)<+\infty$，证明：

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\overline{A}_m\Big)=1.$$

证明　由于 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{+\infty}\overline{A}_m=\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{+\infty}A_m}$ 有

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\overline{A}_m\Big)=P\Big(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}A_m}\Big)=1-P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}A_m\Big),$$

再考虑到 $\bigcup\limits_{m=n}^{+\infty}A_m\supset\bigcup\limits_{m=n+1}^{+\infty}A_m$，$n=1,2,\cdots$，由概率的连续性有

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\overline{A}_m\Big)=1-\lim_{n\to+\infty}P\Big(\bigcup_{m=n}^{+\infty}A_m\Big),$$

由已给级数 $\sum_{m=1}^{+\infty} P(A_m) < +\infty$，得 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{m=n}^{+\infty} P(A_m) = 0$，而

$$0 \leqslant P\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\right) \leqslant \sum_{m=n}^{+\infty} P(A_m),\ 0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{m=n}^{+\infty} P(A_m) = 0,$$

得 $\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\right) = 0$，因而 $P\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty}\bigcap_{m=n}^{+\infty} \bar{A}_m\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\right) = 1$.

例 10 某人午休醒来，发觉表停了，他打开收音机想听电台整点报时，求他等待的时间少于 10 分钟的概率.

解 记“等待的时间小于 10 分钟”为事件 A，打开收音机的时刻位于 $[50, 60]$ 分钟的时间段内则事件 A 发生，则有：$P(A) = \dfrac{60-50}{60} = \dfrac{1}{6}$.

例 11 甲、乙两人约定在下午 1 时到 2 时之间到大学城站乘轻轨，在这段时间内有 4 班轻轨车，他们的开车时刻分别为 1:15，1:30，1:45，2:00. 如果他们约定：(1) 见车就乘；(2) 最多等一班轻轨车，求甲、乙同乘一车的概率(假定甲、乙两人到达大学城站的时刻是互相不牵连的，且每人在 1 时到 2 时的任何时刻到达大学城站是等可能的).

解 设 x，y 分别表示甲、乙两人到达大学城站的时刻，$1 \leqslant x \leqslant 2$，$1 \leqslant y \leqslant 2$，记 p 为甲、乙同乘一车的概率.

(1) 见车就乘：

$$p = \frac{4\times(1/4)^2}{(2-1)^2} = \frac{1}{4};$$

(2) 最多等一辆车的情况下，甲、乙同乘一车包括了三种情况：见车就上甲、乙同乘一车；甲先到达等一辆车，与乙同乘一车；乙先到达等一辆车，与甲同乘一车.

$$p = \frac{1}{4} + 2\times\frac{3\times(1/16)}{1} = \frac{5}{8}.$$

例 12 在线段 $[0, a]$ 上随机地投三点，试求由点 O 至三点的三个线段能构成一个三角形的概率.

解 $A =$ “三线段能构成一个三角形”，设三线段长各为 x，y，z，则

$$\Omega = \{(x, y, z),\ 0 \leqslant x, y, z \leqslant a\},$$
$$A = \{(x, y, z):\ x+y > z,\ x+z > y,\ y+z > x,\ 0 \leqslant x, y, z \leqslant a\},$$

它表示一个以 O，A，B，C，D 为顶点的六面体.

$$P(A) = A\text{ 的体积}/\,\Omega\text{ 的体积} = \frac{a^3 - 3\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2}{2}\cdot a}{a^3} = 0.5.$$

例 13　设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率？

解　设 $A=\{$两件产品中有一件是不合格品$\}$，$A_1=\{$两件产品中一件是不合格品，另一件也是不合格品$\}$，$A_2=\{$两件产品中一件是不合格品，另一件是合格品$\}$，则 $A=A_1+A_2$，$A_1A_2=\varnothing$，所求概率 $P(A_1\mid A)$，

$$P(A_1A)=P(A_1)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15},$$

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{2}{15}+\frac{C_6^1\cdot C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}+\frac{8}{15}=\frac{2}{3},$$

因此
$$P(A_1\mid A)=\frac{P(A_1A)}{P(A)}=\frac{2/15}{2/3}=\frac{1}{5}.$$

例 14　设事件 A，B 相互独立，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，求 $P(A\cup\bar{B})$.

解
$$\begin{aligned}P(\bar{A}\cup\bar{B})&=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A)P(\bar{B})\\&=P(A)+(1-P(B))(1-P(A))\\&=0.4+0.7\times0.6=0.82.\end{aligned}$$

例 15　设一个班中 30 名学生采用抓阄的办法分一张电影票，问各人获得此票的机会是否均等？

解　设事件 $A_i=$“第 i 名学生抓到电影票”，$i=1,2,\cdots,30$，$P(A_1)=\dfrac{1}{30}$，注意到，若 A_1 发生，则 A_2 不发生，则 $P(A_2)=P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})=\dfrac{29}{30}\times\dfrac{1}{29}=\dfrac{1}{30}$，同理，第 i 个人要抓到此票，他前面的 $i-1$ 个人都没抓到此票，则
$$\begin{aligned}P(A_i)&=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{i-1}}A_i)\\&=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})\cdots P(\overline{A_{i-1}}\mid\overline{A_1A_2\cdots A_{i-2}})P(A_i\mid\overline{A_1A_2\cdots A_{i-1}})\\&=\frac{29}{30}\cdot\frac{28}{29}\cdots\frac{30-(i-2)-1}{30-(i-2)}\cdot\frac{1}{30-(i-1)}=\frac{1}{30},\end{aligned}$$

可得出，各人获得此票的机会均等.

例 16　设 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$，证明 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$.

证明　由等式 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$ 及条件概率的定义得

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})},\ P(\bar{B})P(AB)=P(B)P(A\bar{B}),$$

代入 $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$，$P(\bar{B})=1-P(B)$，得

$$[1-P(B)]P(AB)=P(B)[P(A)-P(AB)],$$

两边消去相同的项得 $$P(AB)=P(A)P(B),$$

由对称性,在上式两边减去 $P(A)P(AB)$,得

$$[1-P(A)]P(AB)=P(A)[P(B)-P(AB)],$$

上式可化为 $P(\bar{A})P(AB)=P(A)P(\bar{A}B)$, $\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}$,

即得 $$P(B|A)=P(B|\bar{A}).$$

例 17 设事件 A, B 独立,事件 C 满足 $AB\subset C$, $\bar{A}\bar{B}\subset\bar{C}$, 证明: $P(A)P(C)\leqslant P(AC)$.

证明 由 $\bar{C}\supset\bar{A}\bar{B}$ 得 $C\subset A\cup B$, 再考虑到 $AB\subset C$, 有

$$AC=AB\cup\bar{B}C,\ C=(B-B\bar{C})\cup\bar{B}C,$$

注意到 AB 和 $\bar{B}C$ 互不相容, $B-B\bar{C}$ 和 $\bar{B}C$ 互不相容, $B\bar{C}\subset B$, 有

$$P(AC)=P(AB)+P(\bar{B}C),$$

$$P(C)=P(B-B\bar{C})+P(\bar{B}C)=P(B)-P(B\bar{C})+P(\bar{B}C),$$

由于 A, B 独立, $P(AB)=P(A)P(B)$, $P(A)\leqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}P(AB)+P(\bar{B}C)&\geqslant P(A)P(B)+P(A)[P(\bar{B}C)-P(B\bar{C})]\\&\geqslant P(A)[P(B)-P(B\bar{C})+P(\bar{B}C)]\end{aligned}$$

因此, $$P(AB)\geqslant P(A)P(C).$$

例 18 某班共有 40 名学生,男生 24 人,女生 16 人. 男生中数学成绩不及格的比例是 30%,女生中数学成绩不及格的比例是 20%. 现从该班中随机选取一名学生,求: (1) 该学生数学不及格的概率;(2) 已知该生数学不及格,问该生是男生的概率为多少? 已知该生数学不及格,问该生是女生的概率为多少?

解 (1) 记事件 $A=$“从该班中随机选取一名学生数学不及格”, $B_1=$“从该班中随机选取一名学生是男生”, $B_2=$“从该班中随机选取一名学是女生”,

$$\Omega=B_1+B_2,\ B_1B_2=\varnothing, A=(AB_1)+(AB_2),\ (AB_1)(AB_2)=\varnothing,$$

$$\begin{aligned}P(A)&=P(AB_1)+P(AB_2)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)\\&=0.3\times\frac{24}{40}+0.2\times\frac{16}{40}=0.26;\end{aligned}$$

(2) 问题归结为计算：$P(B_1 \mid A)$ 和 $P(B_2 \mid A)$

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(AB_1)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(A)} = \frac{0.3 \times 0.6}{0.26} \approx 0.6923 \neq P(B_1),$$

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(AB_2)}{P(A)} = \frac{P(B_2)P(A \mid B_2)}{P(A)} = \frac{0.2 \times 0.4}{0.26} \approx 0.3077 \neq P(B_2).$$

例 19　用 $2n$ 个相同的单元组成一个系统，有两种不同的联结方式，系统一是先串联后并联；系统二是先并联后串联，如图 1.1 所示：

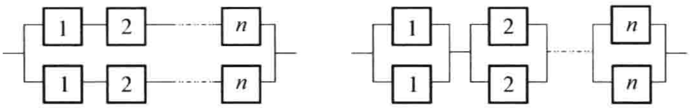

图 1.1　系统一、系统二的联结方式

如果各个单元能否正常工作是相互独立的，每个单元能正常工作的概率为 p，$0 < p < 1$，请比较哪一个系统更可靠.

解　对于系统一，它有两条通路工作，分别记这两条通路正常工作为 A_1，A_2，每条通路正常工作当且仅当该通路上的所有单元都能正常工作，由独立性知每条通路正常工作的概率为 $P(A_1) = P(A_2) = p^n$，于是系统一的可靠度(正常工作的概率)为

$$\begin{aligned} R_1 &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \\ &= p^n + p^n - p^{2n} = p^n(2 - p^n), \end{aligned}$$

对于系统二，先求每个并联的小系统的可靠度 $p_i = p + p - p^2 = p(2-p)$，而整个系统二由相同的 n 个小系统串联而成，再一次利用独立性即可得系统二的可靠度为

$$R_2 = p_1 p_2 \cdots p_n = [p(2-p)]^n,$$

注意到，当 $n = 1$ 时，$R_1 = R_2$；下证，当 $n \geqslant 2$ 时，总有 $R_2 > R_1$，事实上

$$R_2 - R_1 = [p(2-p)]^n - p^n(2-p^n) = p^n[(2-p)^n - (2-p^n)],$$

令函数 $f(p) = (2-p)^n - (2-p^n)$，$n \geqslant 2$，$0 < p < 1$，

$$\lim_{p \to 0} f(p) = 2^n - 2 > 0,\ \lim_{p \to 1} f(p) = 0,$$

$$f'(p) = -n(2-p)^{n-1} + np^{n-1} = np^{n-1}\left[1 - \left(\frac{2-p}{p}\right)^{n-1}\right] < 0,$$

进而 $f(p) > \lim\limits_{p \to 1} f(p) = 0$，即有 $R_2 > R_1$. 其实有更为简单的证明方法，事实上，只要令 $q = 1 - p$，则有 $R_2 - R_1 = p^n[(1+q)^n + (1-q)^2 - 2] > 0$，所以系统二更可靠.

例 20　一个工人看管三台机床，在一小时内机床不需要工人照管的概率：第

一台为 0.9,第二台为 0.8,第三台为 0.7,求在一小时内三台机床中最多有一台需工人照管的概率.

解 记 A_i: 第 i 台机床需要工人照管, $i=1, 2, 3$, B: 最多有一台需要工人照管,则

$$B=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3,$$
$$P(\bar{A}_1)=0.9,\ P(A_1)=0.1,\ P(\bar{A}_2)=0.8,$$
$$P(A_2)=0.2,\ P(\bar{A}_3)=0.7,\ P(A_3)=0.3,$$

由于各台机器是否需要工人照管相互独立,则

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=0.504,\ P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=0.056,$$
$$P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)=0.126,\ P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=0.216,$$

而以上诸事件互不相容,则

$$\begin{aligned}P(B)&=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)\\&=0.504+0.056+0.126+0.216=0.902.\end{aligned}$$

例 21 甲、乙进行投篮比赛.约定,甲先乙后依次投篮,先进球者胜.已知甲、乙投篮命中率分别为 p, q. 求甲、乙各自的胜率 $(0<p,\ q<1)$.

解 设 $A_i=$"甲第 i 次投篮命中", $B_i=$"乙第 i 次投篮命中", $i=1, 2, \cdots$,

$$\begin{aligned}P(\text{甲胜})&=P\Big(A_1\cup\Big(\bigcup_{i=2}^{\infty}\Big(\bigcap_{k=1}^{i-1}\bar{A}_k\bar{B}_k\Big)A_i\Big)\Big)\\&=p+(1-p)(1-q)p+\cdots+(1-p)^k(1-q)^kp+\cdots\\&=\frac{p}{1-(1-p)(1-q)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{乙胜})&=P\Big(\bar{A}_1B_1\cup\Big(\bigcup_{i=2}^{\infty}\Big(\bigcap_{k=1}^{i-1}\bar{A}_k\bar{B}_k\Big)\bar{A}_iB_i\Big)\Big)\\&=(1-p)q+(1-p)^2(1-q)q+\cdots+(1-p)^k(1-q)^{k-1}q+\cdots\\&=\frac{(1-p)q}{1-(1-p)(1-q)},\end{aligned}$$

或直接得: $P(\text{乙胜})=1-P(\text{甲胜})=1-\dfrac{1}{1-(1-p)(1-q)}=\dfrac{(1-p)q}{1-(1-p)(1-q)}$,

值得一提的是当两人的命中率满足 $\dfrac{p}{1-p}>q$ 时,呈"先下手为强".

例 22 (下赌注问题)17 世纪末,法国的德梅尔注意到在赌博中一对骰子抛 25 次,把赌注押到"至少出现一次双六"比把赌注押到"完全不出现双六"有利.但他本人找不出原因,后来请当时著名的法国数学家帕斯卡才解决了这一问题.这问题应如何解决呢?