高等数学

形象化教程

陶　俊　编著

新教学法
易学易懂

南京大学出版社

高等数学

形象化教程

陶 俊 编著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学形象化教程 / 陶俊编著. --南京 ：南京大学出版社，2014.9

ISBN 978-7-305-13915-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陶… Ⅲ. ①高等数学—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 195560 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 高等数学形象化教程
编　　著 陶　俊
责任编辑 陈　超　何永国　　　　编辑热线 025-83686596

照　　排 江苏南大印刷厂
印　　刷 丹阳市兴华印刷厂
开　　本 787×1092 1/16 印张 15 字数 365 千
版　　次 2014 年 9 月第 1 版 2014 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-13915-4
定　　价 32.00 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025)83594756

前　言

微积分是由牛顿和莱布尼兹两位数学家在17世纪创立的.但是与代数不同的是微积分很抽象.因此,微积分远比代数难学.如果能将微积分形象化,那么学微积分的难易度将与学代数的难易度相接近,这对推动微积分的教学有着重大意义.其实,实现微积分形象化的途径或方法一直是存在的,只是未被发现而已.经过长期的探索,我终于有幸找到它,因此,我写了这本书将这个新方法展示出来.在这本书中,我们采用了全新的、形象化的方式讲解微积分的原理.

那么,是什么新方法使微积分变得形象化呢?这是因为有了一个新的思路,遵循这个思路,我们推导出了两个新的公式:$\lim\limits_{\Delta r\to 0}\dfrac{\Delta A_{r1}+\Delta A_{r2}+\cdots+\Delta A_{rm}}{\Delta A_1+\Delta A_2+\cdots+\Delta A_m}=1$ 和 $\lim\limits_{\Delta r\to 0}\dfrac{\Delta y_{t1}+\Delta y_{t2}+\cdots+\Delta y_{tm}}{\Delta y_1+\Delta y_2+\cdots+\Delta y_m}=1$.借助于两个新的公式,我们可以形象化地推导出微积分中最重要的核心公式:牛顿-莱布尼兹公式.这个新的推导方法让牛顿-莱布尼兹公式变得非常容易理解.

在这本书里,我们还是遵循这个思路,又推导了一个新的公式 $\lim\limits_{\Delta r\to 0}\dfrac{\Delta s_{t1}+\Delta s_{t2}+\cdots+\Delta s_{tm}}{\Delta s_1+\Delta s_2+\cdots+\Delta s_m}=1$.根据这个公式,我们可以形象化地推导出计算曲线弧长的公式,让计算曲线弧长的原理变得非常容易理解.

其实,遵循这个思路,我们还可以推导出与计算曲顶体积相关的公式,与计算曲面面积相关的公式,以及与计算空间曲线弧长相关的公式.借助这些公式,可使这些计算的原理变得非常容易理解.由于本书篇幅有限,就不讨论了.我们将在其他书中进行讨论.

另外,在本书中,我们还将复合函数的微分法则形象化地展示出来;对二阶导数与曲线凹凸性关系进行了形象化的解说;对连续函数有原函数的定理作了简洁的证明.

微积分愈形象化,就愈容易理解.借助于这些形象化的变革,我们可以将微积分的基本原理清晰、透彻、形象地揭示出来,让微积分变得易懂易学.

我希望这本书对需要学习微积分的同学和读者能有所帮助.

由于时间仓促,编者水平有限,书中不妥之处敬请广大读者批评和指正.

另外,本书中使用了一些新创符号,如 ΔA_r、Δy_t、Δs_t 等等,这些符号只在定理的证明过程中使用,使定理的证明更加清晰、简洁.这些新创符号并不会进入任何数学运算的程式中去.故对微积分的符号系统并无影响.特此说明.

陶　俊
2014年2月

目　　录

第一章　函　数

函数是数学研究中的最重要的对象之一，本章将介绍函数的概念以及函数的一些基本性质. 在介绍之前，让我们先复习一下集合的概念以及它的一些基本性质.

第一节　集　合

由于集合学已经在中学中讲授，这里我们简单地复习一下集合的概念和运算.

一、集合及其表示法

集合是数学的基本概念之一. 一般地讲，集合是指具有某种特性的事物所组成的一个整体，而构成这个整体的每一个个体事物称作元素. 集合中的元素可以是任何事物，可以是人，可以是物，也可以是字母或数字等. 例如：

由一个排的士兵组成的一个集合，每一个士兵就是这个集合的元素.

由 2，4，6，8，10，12 六个数字组成的一个集合，每一个数字就是这个集合的元素.

我们通常用大写字母 $A,B,C,D,\cdots$ 表示集合，而用小写字母 $a,b,c,d,\cdots$ 表示元素. 当元素 a 属于集合 A 时，记为 $a\in A$；符号 $\in$ 的意思是"属于". 当元素 a 不属于集合 A 时，则记作 $a\notin A$；符号 $\notin$ 的意思是"不属于". 例如：

由 a,b,c,d 四个字母组成的一个集合 H，这四个字母都属于集合 H，我们有：$a\in H$，$b\in H$，$c\in H$ 和 $d\in H$.

若一个集合只包含有限个的元素，则称为有限集；若一个集合包含无限的元素，则称为无限集. 不含元素的集合，则称为空集，用符号 $\varnothing$ 表示.

集合的表述法有两种：列举法和描述法.

列举法：就是把集合的元素都列举出来，例如由 2，4，6，8 这四个数字组成的集合 A，可表示为 $A=\{2,4,6,8\}$.

描述法：如果集合 B 是由许多具有性质 f 的元素 x 组成的，就可表示为

$$B=\{x\mid x\text{ 具有性质 }f\}.$$

例如，集合 C 是方程 $2x^2+6x=0$ 的解集，就可表示为

$$C=\{x\mid 2x^2+6x=0\}.$$

如果一个集合中所有的元素都是数，那么这个集合就称为数集. 习惯上，由实数全体构成的数集称为实数集，记作 **R**.

全体自然数的数集记作 **N**，我们有

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,\cdots,n,\cdots\}.$$

我们在表示数集的字母的右上角标上“+”来表示该数集是排除 0 与负数元素的数集.例如,$\mathbf{N}^+$ 为全体正整数的数集：

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,4,5,6,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体整数的数集记作 $\mathbf{Z}$,我们有

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体有理数的数集记作 $\mathbf{Q}$,我们有

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+,p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}.$$

设有集合 A 和集合 B,若集合 A 的所有元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. $A\subset B$ 读作 A 包含于 B,而 $B\supset A$ 读作 B 包含 A.

二、集合的运算

集合的基本运算方式是并、交、差. 下面作简单的介绍.

并集

设集合 A 和集合 B 是两个非空集合,那么所有属于集合 A 或集合 B 的元素所组成的集合,称为集合 A 和集合 B 的并集,记为 $A\cup B$,如图 1-1 所示. 并集 $A\cup B$ 的定义为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

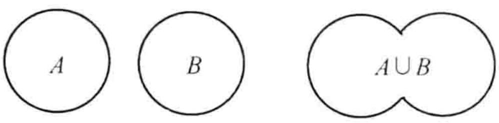


图 1-1

交集

设集合 A 和集合 B 是两个非空集合,那么所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素所组成的集合,称为集合 A 和集合 B 的交集,记为 $A\cap B$,如图 1-2 所示. 交集 $A\cap B$ 的定义为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

图 1-2

差集

设集合 A 和集合 B 是两个非空集合,那么所有属于集合 A 而不属于集合 B 的元素所组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的差集,记为 $A\backslash B$,如图 1-3 所示. 差集 $A\backslash B$ 的定义为

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

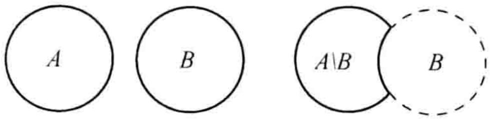


图 1-3

余集

设集合 A 非常大，而集合 B 很小且是集合 A 的子集，那么 $\overline{A}$ 称为 B 的余集，记为 B^c，如图 1-4 所示. $B^c=\overline{A}$，其中 $B\subset A$.

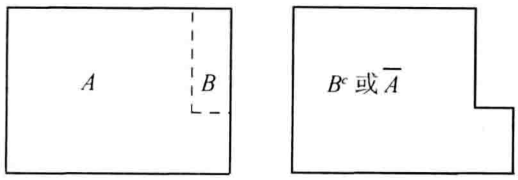


图 1-4

设有 A,B,C 任意三个集合，则有下列法则：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，
$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 对偶律：$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，
$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

上面介绍的法则均可根据集合相等的定义进行验证，在这里我们就不逐条验证了.

三、区间和邻域

区间

区间是一种数集. 区间一般用 I 表示，I 是英文单词 Interval(区间)的第一个字母. 区间分有限区间和无限区间两类. 先讨论有限区间.

有限区间包括开区间、闭区间和半开区间. 设 a,b 为实数，且 $a<b$，那么上述有限区间的定义和记号可表示如下：

记号	名称	定义
(a,b)	开区间	$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$	闭区间	$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$	半开区间	$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$	半开区间	$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$

在上述有限区间中，a,b 分别称为区间的左、右端点.

现在介绍无限区间. 设 a,b 为实数,那么无限区间的定义和记号可表示如下:

记号	名称	定义
$(-\infty,+\infty)$	无限区间	$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}$
$[a,+\infty)$	无限区间	$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$
$(-\infty,b)$	无限区间	$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}$
$(-\infty,b]$	无限区间	$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$

邻域

邻域是一种数集. 设 x_0 和 δ 为两个实数,且 $\delta>0$,则数集 $\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,如图 1-5 所示,记为 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\},$$

x_0 为邻域 $U(x_0,\delta)$ 的中心,δ 为邻域 $U(x_0,\delta)$ 的半径.

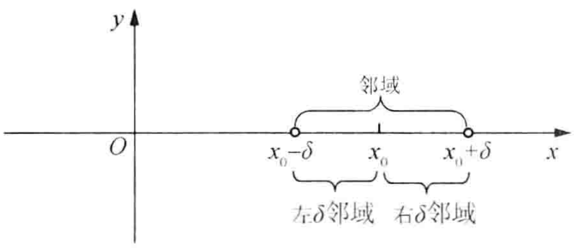


图 1-5

不含点 x_0 的 δ 邻域称为去心邻域,记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,用数集可表示为

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为左 δ 邻域,可用数集表示为

$$(x_0-\delta,x_0)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0\}.$$

开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为右 δ 邻域,可用数集表示为

$$(x_0,x_0+\delta)=\{x\mid x_0<x<x_0+\delta\}.$$

在表示邻域时,也可以不指明半径,用 $U(x_0)$ 表示点 x_0 的邻域,用 $\mathring{U}(x_0)$ 表示点 x_0 的去心邻域.

习题 1-1

1. 已知集合 $A=(-\infty,+\infty)$,$B=(-12,-4)$.

(1) 求 $A\cup B$;

(2) 求 $A\cap B$;

(3) 求B^c.

2. 已知集合 $A=(-\infty,1)$,$B=(-6,12)$.

(1) 求 $A\cup B$;

(2) 求 $A\cap B$;

(3) 求 $A\setminus B$.

3. 开区间(a,b)的定义是(　　).

(A) $\{x|a<x<b\}$.

(B) $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

(C) $\{x|a<x\leqslant b\}$.

4. 用区间表示下列不等式的解.

(1) $x<9$;

(2) $x\leqslant 5$;

(3) $|x-2|>0$.

第二节　函数的概念

自然界里很多变量是相互依赖的,一个变量的变化会导致另一个变量的变化,而这种变化有一定的内在规律.这些变量与变量之间的依赖关系、内在的变化规律可用数学的方式进行表述,这个表述变量之间关系的数学方式就是函数.下面举个例子.

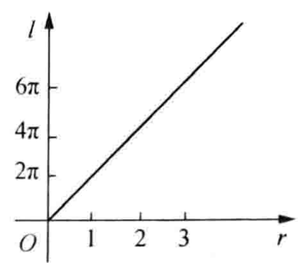
设圆的周长为 l,它的半径为 r,那么圆的周长与它的半径之间的关系可用等式表示为

$$l=2\pi r;$$

也可用表格表示为:

半径 r/cm	1	2	3	4	5	6
周长 l/cm	2π	4π	6π	8π	10π	12π

也可用图形表示为:



上述等式、表格和图形都描述了圆的周长 l 和圆的半径 r 这两个变量之间的变化规律.表述这两个变量内在的变化规律的数学方式就是函数.因此,函数可用等式表示,也可用表格表示,也可用图形表示.

函数定义　设 D 为一个非空数集,若存在对应规则 f,使得每一个数 $x\in D$,都有唯一的一个数 y 与之相对应,则称 f 为定义在非空数集 D 上的函数,记作

$$y = f(x), x \in D.$$

非空数集 D 称作这个函数的定义域，与数 x 相对应的数 y 称作函数值，全体函数值所组成的数集 $f(D)$ 称作函数 f 的值域.

在函数 $y=f(x)$ 中，非空数集 D 中的数 $x(x\in D)$ 称作自变量，与之相对应的且唯一的数 y 称作因变量.

在上述例子中，函数 $l=2\pi r$ 中的变量 r 为自变量，变量 l 为因变量.

对一个给定的函数 $y=f(x)$，确定其定义域，是数学中常需要解决的问题. 下面举几个例子.

例 1 求函数 $y=\dfrac{6}{x^2-3x}$ 的定义域.

解 因为在分式 $\dfrac{6}{x^2-3x}$ 中分母不能等于零，所以有 $x^2-3x\neq 0$，解得

$$x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3.$$

因此函数 $y=\dfrac{6}{x^2-3x}$ 的定义域 D 为

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty).$$

例 2 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}$ 的定义域.

解 因为在偶次根式中，被开方式必须大于或等于零，所以有 $16-x^2\geqslant 0$，解得

$$-4 \leqslant x \leqslant 4.$$

因此函数 $y=\sqrt{16-x^2}$ 的定义域 D 为

$$D = [-4, 4].$$

例 3 求函数 $y=\dfrac{2}{\ln(x-6)}$ 的定义域.

解 因为在对数中真数必须大于零，所以有 $x-6>0$，即 $x>6$. 又因为在分式 $\dfrac{2}{\ln(x-6)}$ 中分母不能等于零，所以有 $\ln(x-6)\neq 0$，即 $x-6\neq 1$，所以 $x\neq 7$. 因此函数 $y=\dfrac{2}{\ln(x-6)}$ 的定义域 D 为

$$D = (6, 7) \cup (7, +\infty).$$

习题 1－2

1. 求函数 $y=\sqrt{1-2x}$ 的定义域.
2. 求函数 $y=\dfrac{2}{1-x}$ 的定义域.
3. 求函数 $y=\dfrac{1}{x^2-3x}$ 的定义域.

4. 求函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-10)}$的定义域.

5. 求函数 $y=\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{x}$的定义域.

6. 求函数 $y=\dfrac{1}{x^2-x}+\sqrt{2-x}$的定义域.

第三节　函数的性质

一、函数的有界性

让我们观察函数 $y=\sin x$ 的图形，在区间$(-\infty,+\infty)$上，函数 $y=\sin x$ 的曲线介于两条平行直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间，如图 1－6 所示.

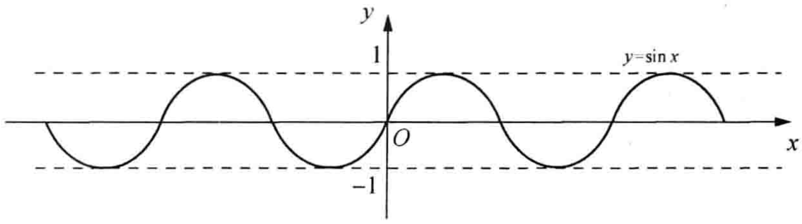


图 1－6

因此，对函数 $y=\sin x$，我们有不等式$|\sin x|\leqslant 1$. 这个不等式告诉我们，在区间$(-\infty,+\infty)$上，函数值不可能大于 1 或小于-1. 也就是说，函数值的变动范围是有限的，或者说是有界的.

定义　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，如果存在一个确定的正数 M，使得对所有的 $x\in D$，都有$|f(x)|\leqslant M$，那么就称函数 $y=f(x)$在集合 D 上是有界函数. 如果不存在这个正数 M，那么就称函数 $y=f(x)$在集合 D 上是无界函数.

注意不等式$|f(x)|\leqslant M$ 中的绝对值符号，它表明有界性是同时在上、下加以限制的. 也就是既要求有上界，又要求有下界. 在上面例子中的函数 $y=\sin x$ 完全符合这一条件，我们有

$$|\sin x|\leqslant 1.$$

$y=\sin x$ 的上界为 1，下界为-1. 因此函数 $y=\sin x$ 是有界函数.

再让我们讨论函数 $y=\dfrac{1}{x}$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$上没有上界，但有下界，下界等于 1. 因此，函数 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$上是无界函数.

二、函数的单调性

让我们观察函数 $y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上的图形，即 y 轴右边的图形. 当 x 增大时，函数 y 总是增大，如图 1－7 所示. 也就是说，函数 $y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上是单调增加的.

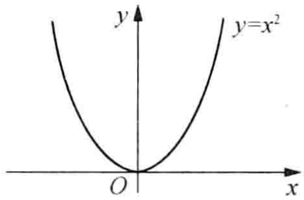


图 1-7

再让我们观察函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上的图形，即 y 轴左边的图形. 当 x 增大时，函数 y 总是减小，如图 1-7 所示. 也就是说，函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的.

定义 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)上有定义，若我们在区间(a,b)上任意取两点 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$ 时，总是有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间(a,b)上单调增加. 同理，如果我们在区间(a,b)上任意取两点 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$ 时，总是有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间(a,b)上单调减少.

根据定义，让我们对函数 $y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上任意取两点 x_1 和 x_2，使得$x_1<x_2$，我们总有 $x_1^2<x_2^2$，如图 1-8 中的左图所示. 因此，函数 $y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上是单调增加的.

再根据定义，让我们对函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上任意取两点 x_1 和 x_2，使得 $x_1<x_2$，我们总有 $x_1^2>x_2^2$，如图 1-8 中的右图所示. 因此，函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的.

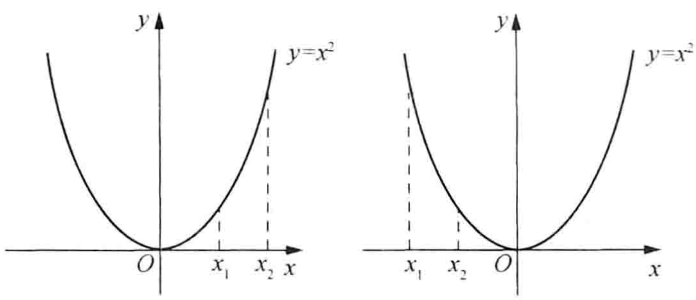


图 1-8

再根据定义，让我们对函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上任意取两点 x_1 和 x_2，使得 $x_1<x_2$，显然我们不能保证总有 $x_1^2<x_2^2$，或总有 $x_1^2>x_2^2$. 因此，函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上不是单调的. 如果我们观察函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上的图形，我们会发现函数既有增大情形又有减小情形，显然，该函数在此区间上不可能是单调的.

单调增加函数和单调减少函数都称为单调函数.

三、函数的奇偶性

奇偶性是对函数图形对称性的描述. 若一个函数的图形关于原点对称，则称此函数为奇函数. 例如，函数 $y=x^3$，它的图形关于原点对称，如图 1-9 中左图所示，因此，函数 $y=x^3$ 为奇函数. 若一个函数的图形关于 y 轴对称，则称此函数为偶函数. 例如，函数 $y=x^2$，它的图形关于 y 轴对称，如图 1-9 中右图所示，因此，函数 $y=x^2$ 为偶函数.

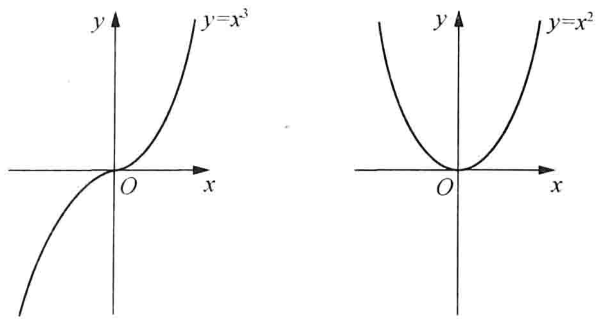


图 1-9

定义 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果对于任意 $x\in D$,总是有 $f(-x)=-f(x)$,那么就称函数 $y=f(x)$为奇函数;如果对于任意 $x\in D$,总是有 $f(-x)=f(x)$,那么就称函数 $y=f(x)$为偶函数.

四、函数的周期性

如果一个函数具有周期性,那么这个函数曲线的形状就会有规律地重复出现.例如函数 $y=\sin x$,它的曲线的形状每间隔 2π 就会重复地出现,如图 1-10 所示.

定义 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果存在一个正数 l,对于任意 $x\in D$,总是有 $f(x+l)=f(x)$,那么就称函数 $y=f(x)$为周期函数,称正数 l 为周期函数 $y=f(x)$的周期.注意,周期函数 $y=f(x)$的周期,总是指其最小正周期.

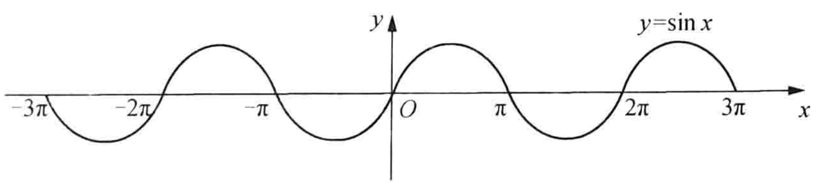


图 1-10

对函数 $y=\sin x$,我们总有 $\sin(x+2\pi)=\sin x$.因此根据定义,函数 $y=\sin x$ 是周期函数,2π 为函数 $y=\sin x$ 的周期.

习题 1-3

1. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\sin 2x$;

(2) $y=(x-2)(x+2)$;

(3) $y=x^4-x^2-8$;

(4) $y=\cos 2x$.

2. 指出下列函数哪些是周期函数,并给出其最小正周期.

(1) $y=\sin(x-3)$;

(2) $y=\sin 2x$;