

高等数学

形象化教程

陶 俊 编著

新教学法
易学易懂



南京大学出版社

高等数学

形象化教程

陶 俊 编著



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学形象化教程 / 陶俊编著. —南京: 南京大学出版社, 2014. 9

ISBN 978-7-305-13915-4

I. ①高… II. ①陶… III. ①高等数学—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 195560 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号
出版人 金鑫荣



书 名 高等数学形象化教程
编 著 陶 俊
责任编辑 陈 超 何永国

编辑热线 025-83686596

照 排 江苏南大印刷厂
印 刷 丹阳市兴华印刷厂
开 本 787×1092 1/16 印张 15 字数 365 千
版 次 2014 年 9 月第 1 版 2014 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-13915-4
定 价 32.00 元

网 址: <http://www.njupco.com>
官方微博: <http://weibo.com/njupco>
官方微信号: njupress
销售咨询热线: (025)83594756

* 版权所有, 侵权必究
* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购图书销售部门联系调换

前言

微积分是由牛顿和莱布尼兹两位数学家在 17 世纪创立的. 但是与代数不同的是微积分很抽象. 因此, 微积分远比代数难学. 如果能将微积分形象化, 那么学微积分的难易度将与学代数的难易度相接近, 这对推动微积分的教学有着重大意义. 其实, 实现微积分形象化的途径或方法一直是存在的, 只是未被发现而已. 经过长期的探索, 我终于有幸找到它, 因此, 我写了这本书将这个新方法展示出来. 在这本书中, 我们采用了全新的、形象化的方式讲解微积分的原理.

那么, 是什么新方法使微积分变得形象化呢? 这是因为有了一个新的思路, 遵循这个思路, 我们推导出了两个新的公式: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A_{r1} + \Delta A_{r2} + \cdots + \Delta A_{rm}}{\Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_m} = 1$ 和 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_{l1} + \Delta y_{l2} + \cdots + \Delta y_{lm}}{\Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_m} = 1$. 借助于两个新的公式, 我们可以形象化地推导出微积分中最重要的核心公式: 牛顿-莱布尼兹公式. 这个新的推导方法让牛顿-莱布尼兹公式变得非常容易理解.

在这本书里, 我们还是遵循这个思路, 又推导了一个新的公式 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s_{l1} + \Delta s_{l2} + \cdots + \Delta s_{lm}}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_m} = 1$. 根据这个公式, 我们可以形象化地推导出计算曲线弧长的公式, 让计算曲线弧长的原理变得非常容易理解.

其实, 遵循这个思路, 我们还可以推导出与计算曲顶体积相关的公式, 与计算曲面面积相关的公式, 以及与计算空间曲线弧长相关的公式. 借助这些公式, 可使这些计算的原理变得非常容易理解. 由于本书篇幅有限, 就不讨论了. 我们将在其他书中进行讨论.

另外, 在本书中, 我们还将复合函数的微分法则形象化地展示出来; 对二阶导数与曲线凹凸性关系进行了形象化的解说; 对连续函数有原函数的定理作了简洁的证明.

微积分愈形象化, 就愈容易理解. 借助于这些形象化的变革, 我们可以将微积分的基本原理清晰、透彻、形象地揭示出来, 让微积分变得易懂易学.

我希望这本书对需要学习微积分的同学和读者能有所帮助.

由于时间仓促, 编者水平有限, 书中不妥之处敬请广大读者批评和指正.

另外, 本书中使用了一些新创符号, 如 ΔA_r 、 Δy_l 、 Δs_l 等等, 这些符号只在定理的证明过程中使用, 使定理的证明更加清晰、简洁. 这些新创符号并不会进入任何数学运算的程式中去. 故对微积分的符号系统并无影响. 特此说明.

陶俊

2014 年 2 月

目 录

第一章 函 数	1
第一节 集 合	1
一、集合及其表示法	1
二、集合的运算	2
三、区间和邻域	3
习题 1-1	4
第二节 函数的概念	5
习题 1-2	6
第三节 函数的性质	7
一、函数的有界性	7
二、函数的单调性	7
三、函数的奇偶性	8
四、函数的周期性	9
习题 1-3	9
第四节 反函数与复合函数	10
习题 1-4	11
第五节 基本初等函数与初等函数	12
一、基本初等函数	12
二、初等函数	16
习题 1-5	16
第二章 极 限	18
第一节 极限的概念和定义	18
一、当 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限	18
二、当 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限	27
三、当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数的极限与当 $x \rightarrow -\infty$ 时函数的极限	30
四、当 $x \rightarrow \infty$ 时数列的极限	30
习题 2-1	33
第二节 极限的运算法则及求极限的方法	34
一、函数极限的运算法则	34
二、常数函数极限法则的运用	35
三、计算函数极限的方法	38

习题 2-2	44
第三节 极限存在准则 两个重要极限	45
一、准则 I — 夹逼定理	45
二、准则 II — 单调有界数列必有极限	48
习题 2-3	50
第三章 函数的连续性	51
第一节 函数连续性的定义与间断点	51
一、函数连续性的定义	51
二、函数的间断点及其分类	54
习题 3-1	56
第二节 连续函数的运算和初等函数的连续性	57
一、连续函数的和、差、积、商的连续性	57
二、反函数与复合函数的连续性	57
三、初等函数的连续性	58
习题 3-2	59
第四章 切线的斜率与导数的概念	60
习题 4	66
第五章 牛顿-莱布尼兹公式	68
第一节 用极限法计算函数曲线下的面积	68
一、推导 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A_{r1} + \Delta A_{r2} + \cdots + \Delta A_{rm}}{\Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_m} = 1$	69
二、推导 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = A$ (A 为函数 $f(x)$ 曲线下面积)	72
演示题 5-1	77
第二节 用极限法计算函数在区间上的增量	86
一、推导 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_{t1} + \Delta y_{t2} + \cdots + \Delta y_{tm}}{\Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_m} = 1$	86
二、推导 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F'(x_i) \Delta x = F(b) - F(a)$	90
演示题 5-2	93
第三节 牛顿-莱布尼兹公式	100
一、公式 $f(x) \Delta x = F'(x) \Delta x$	100
二、牛顿-莱布尼兹公式	101
演示题 5-3	103
习题 5-3	105
第六章 导数的运算与微分	106
第一节 导数公式	106
一、函数导数公式的求法	106
二、函数 $f(x) + C$ 与函数 $f(x)$ 的导数相同	108
习题 6-1	109

第二节 导数的运算法则	110
一、函数的和、差、积、商的求导法则	110
二、复合函数的求导法则	113
三、反函数的求导法则	114
四、参数方程所确定的函数的求导法则	116
习题 6-2	118
第三节 高阶导数	119
习题 6-3	122
第四节 微分 dy	122
一、微分 dy 的概念	122
二、微分 dy 与函数微增量之间的关系	123
三、 $\frac{dy}{dx}$ 可解释为切线的纵增、横增之比	123
四、 $\frac{dy}{dx}$ 的双重性	124
五、函数的微分公式与微分的四则运算法则	125
六、复合函数的微分法则与微分不变性	127
七、反函数的微分	131
八、由参数方程所确定的函数的微分法则	132
习题 6-4	136
第七章 中值定理与导数的应用	138
第一节 中值定理	138
一、罗尔定理	138
二、拉格朗日中值定理	140
三、柯西中值定理	141
习题 7-1	143
第二节 洛必达法则	143
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式的洛必达法则(洛必达法则 I)	144
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的洛必达法则(洛必达法则 II)	146
习题 7-2	147
第三节 用导数描述物理量	147
习题 7-3	149
第四节 函数的极值与最大值、最小值	150
一、函数的单调性与一阶导数的关系	150
二、函数的极值与一阶导数的关系	152
三、函数曲线的凸凹性与二阶导数的关系	154
四、函数最大值和最小值的判定	159
习题 7-4	162

第八章 不定积分	164
第一节 不定积分的概念	164
习题 8-1	169
第二节 不定积分的公式与运算法则	169
一、不定积分的基本公式	169
二、基本运算法则	171
习题 8-2	173
第三节 换元积分法	174
一、第一类换元法	175
二、第二类换元法	177
习题 8-3	179
第四节 分部积分法	181
习题 8-4	183
第九章 定积分	184
第一节 定积分的概念	184
习题 9-1	187
第二节 定积分的性质和运算法则	188
一、定积分的性质	188
二、定积分运算法则	189
习题 9-2	193
第三节 曲线下面积	194
习题 9-3	200
第四节 平面曲线的弧长	201
一、推导 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s_{t1} + \Delta s_{t2} + \cdots + \Delta s_{tm}}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_m} = 1$	201
二、推导 $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} \Delta x$	206
演示题 9	214
习题 9-4	221
习题答案	222
编后记	232

第一章 函 数

函数是数学研究中的最重要的对象之一,本章将介绍函数的概念以及函数的一些基本性质.在介绍之前,让我们先复习一下集合的概念以及它的一些基本性质.

第一节 集 合

由于集合学已经在中学中讲授,这里我们简单地复习一下集合的概念和运算.

一、集合及其表示法

集合是数学的基本概念之一.一般地讲,集合是指具有某种特性的事物所组成的一个整体,而构成这个整体的每一个个体事物称作元素.集合中的元素可以是任何事物,可以是人,可以是物,也可以是字母或数字等.例如:

由一个排的士兵组成的一个集合,每一个士兵就是这个集合的元素.

由 2, 4, 6, 8, 10, 12 六个数字组成的一个集合,每一个数字就是这个集合的元素.

我们通常用大写字母 $A, B, C, D, \dots$ 表示集合,而用小写字母 $a, b, c, d, \dots$ 表示元素.当元素 a 属于集合 A 时,记为 $a \in A$; 符号 $\in$ 的意思是“属于”.当元素 a 不属于集合 A 时,则记作 $a \notin A$; 符号 $\notin$ 的意思是“不属于”.例如:

由 a, b, c, d 四个字母组成的一个集合 H , 这四个字母都属于集合 H , 我们有: $a \in H$, $b \in H, c \in H$ 和 $d \in H$.

若一个集合只包含有限个的元素,则称为有限集;若一个集合包含无限的元素,则称为无限集.不含元素的集合,则称为空集,用符号 $\emptyset$ 表示.

集合的表述法有两种:列举法和描述法.

列举法:就是把集合的元素都列举出来,例如由 2, 4, 6, 8 这四个数字组成的集合 A , 可表示为 $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

描述法:如果集合 B 是由许多具有性质 f 的元素 x 组成的,就可表示为

$$B = \{x \mid x \text{ 具有性质 } f\}.$$

例如,集合 C 是方程 $2x^2 + 6x = 0$ 的解集,就可表示为

$$C = \{x \mid 2x^2 + 6x = 0\}.$$

如果一个集合中所有的元素都是数,那么这个集合就称为数集.习惯上,由实数全体构成的数集称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

全体自然数的数集记作 $\mathbf{N}$, 我们有

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots\}.$$

我们在表示数集的字母的右上角标上“+”来表示该数集是排除 0 与负数元素的数集. 例如, $\mathbf{N}^+$ 为全体正整数的数集:

$$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots\}.$$

全体整数的数集记作 $\mathbf{Z}$, 我们有

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}.$$

全体有理数的数集记作 $\mathbf{Q}$, 我们有

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+, p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\}.$$

设有集合 A 和集合 B , 若集合 A 的所有元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. $A \subset B$ 读作 A 包含于 B , 而 $B \supset A$ 读作 B 包含 A .

二、集合的运算

集合的基本运算方式是并、交、差. 下面作简单的介绍.

并集

设集合 A 和集合 B 是两个非空集合, 那么所有属于集合 A 或集合 B 的元素所组成的集合, 称为集合 A 和集合 B 的并集, 记为 $A \cup B$, 如图 1-1 所示. 并集 $A \cup B$ 的定义为

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

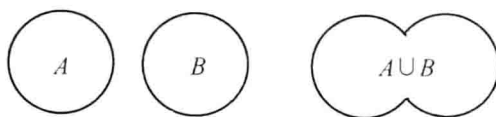


图 1-1

交集

设集合 A 和集合 B 是两个非空集合, 那么所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素所组成的集合, 称为集合 A 和集合 B 的交集, 记为 $A \cap B$, 如图 1-2 所示. 交集 $A \cap B$ 的定义为

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

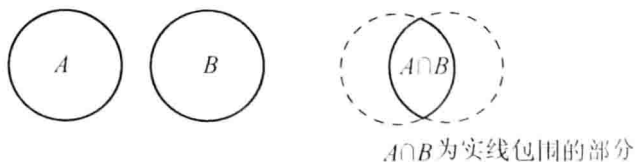


图 1-2

差集

设集合 A 和集合 B 是两个非空集合, 那么所有属于集合 A 而不属于集合 B 的元素所组成的集合, 称为集合 A 与集合 B 的差集, 记为 $A \setminus B$, 如图 1-3 所示. 差集 $A \setminus B$ 的定义为

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

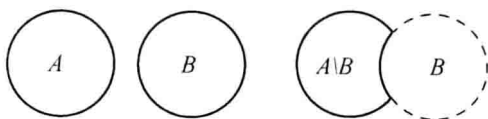


图 1-3

余集

设集合 A 非常大, 而集合 B 很小且是集合 A 的子集, 那么 $\bar{A}$ 称为 B 的余集, 记为 B^c , 如图 1-4 所示. $B^c = \bar{A}$, 其中 $B \subset A$.

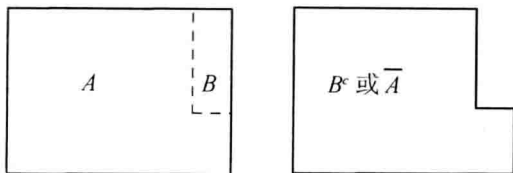


图 1-4

设有 A, B, C 任意三个集合, 则有下列法则:

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$,
 $A \cap B = B \cap A$;
- (2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- (3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
- (4) 对偶律: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

上面介绍的法则均可根据集合相等的定义进行验证, 在这里我们就不逐条验证了.

三、区间和邻域

区间

区间是一种数集. 区间一般用 I 表示, I 是英文单词 Interval(区间)的第一个字母. 区间分有限区间和无限区间两类. 先讨论有限区间.

有限区间包括开区间、闭区间和半开区间. 设 a, b 为实数, 且 $a < b$, 那么上述有限区间的定义和记号可表示如下:

记号	名称	定义
(a, b)	开区间	$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$
$[a, b]$	闭区间	$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$	半开区间	$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$
$[a, b)$	半开区间	$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$

在上述有限区间中, a, b 分别称为区间的左、右端点.

现在介绍无限区间. 设 a, b 为实数, 那么无限区间的定义和记号可表示如下:

记号	名称	定义
$(-\infty, +\infty)$	无限区间	$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$
$(a, +\infty)$	无限区间	$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$
$[a, +\infty)$	无限区间	$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\}$
$(-\infty, b)$	无限区间	$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$
$(-\infty, b]$	无限区间	$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\}$

邻域

邻域是一种数集. 设 x_0 和 δ 为两个实数, 且 $\delta > 0$, 则数集 $\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 如图 1-5 所示, 记为 $U(x_0, \delta)$, 即

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\},$$

x_0 为邻域 $U(x_0, \delta)$ 的中心, δ 为邻域 $U(x_0, \delta)$ 的半径.

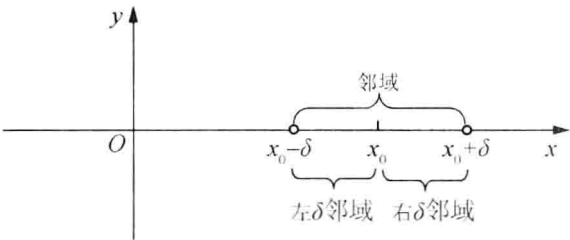


图 1-5

不含点 x_0 的 δ 邻域称为去心邻域, 记为 $\mathring{U}(x_0, \delta)$, 用数集可表示为

$$\mathring{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

开区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为左 δ 邻域, 可用数集表示为

$$(x_0 - \delta, x_0) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0\}.$$

开区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 称为右 δ 邻域, 可用数集表示为

$$(x_0, x_0 + \delta) = \{x \mid x_0 < x < x_0 + \delta\}.$$

在表示邻域时, 也可以不指明半径, 用 $U(x_0)$ 表示点 x_0 的邻域, 用 $\mathring{U}(x_0)$ 表示点 x_0 的去心邻域.

习题 1-1

1. 已知集合 $A = (-\infty, +\infty), B = (-12, -4)$.

(1) 求 $A \cup B$;

(2) 求 $A \cap B$;

(3) 求 B^c .

2. 已知集合 $A=(-\infty, 1)$, $B=(-6, 12)$.

(1) 求 $A \cup B$;

(2) 求 $A \cap B$;

(3) 求 $A \setminus B$.

3. 开区间 (a, b) 的定义是().

(A) $\{x | a < x < b\}$.

(B) $\{x | a \leq x \leq b\}$.

(C) $\{x | a < x \leq b\}$.

4. 用区间表示下列不等式的解.

(1) $x < 9$;

(2) $x \leq 5$;

(3) $|x - 2| > 0$.

第二节 函数的概念

自然界里很多变量是相互依赖的, 一个变量的变化会导致另一个变量的变化, 而这种变化有一定的内在规律. 这些变量与变量之间的依赖关系、内在的变化规律可用数学的方式进行表述, 这个表述变量之间关系的数学方式就是函数. 下面举个例子.

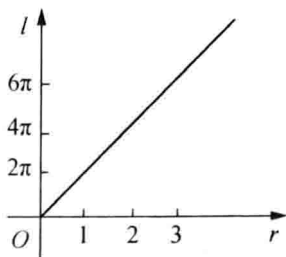
设圆的周长为 l , 它的半径为 r , 那么圆的周长与它的半径之间的关系可用等式表示为

$$l = 2\pi r;$$

也可用表格表示为:

半径 r/cm	1	2	3	4	5	6
周长 l/cm	2π	4π	6π	8π	10π	12π

也可用图形表示为:



上述等式、表格和图形都描述了圆的周长 l 和圆的半径 r 这两个变量之间的变化规律. 表述这两个变量内在的变化规律的数学方式就是函数. 因此, 函数可用等式表示, 也可用表格表示, 也可用图形表示.

函数定义 设 D 为一个非空数集, 若存在对应规则 f , 使得每一个数 $x \in D$, 都有唯一的一个数 y 与之相对应, 则称 f 为定义在非空数集 D 上的函数, 记作

$$y = f(x), x \in D.$$

非空数集 D 称作这个函数的定义域,与数 x 相对应的数 y 称作函数值,全体函数值所组成的数集 $f(D)$ 称作函数 f 的值域.

在函数 $y=f(x)$ 中,非空数集 D 中的数 $x(x \in D)$ 称作自变量,与之相对应的且唯一的数 y 称作因变量.

在上述例子中,函数 $l=2\pi r$ 中的变量 r 为自变量,变量 l 为因变量.

对一个给定的函数 $y=f(x)$,确定其定义域,是数学中常需要解决的问题.下面举几个例子.

例 1 求函数 $y=\frac{6}{x^2-3x}$ 的定义域.

解 因为在分式 $\frac{6}{x^2-3x}$ 中分母不能等于零,所以有 $x^2-3x \neq 0$,解得

$$x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3.$$

因此函数 $y=\frac{6}{x^2-3x}$ 的定义域 D 为

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty).$$

例 2 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}$ 的定义域.

解 因为在偶次根式中,被开方式必须大于或等于零,所以有 $16-x^2 \geq 0$,解得

$$-4 \leq x \leq 4.$$

因此函数 $y=\sqrt{16-x^2}$ 的定义域 D 为

$$D = [-4, 4].$$

例 3 求函数 $y=\frac{2}{\ln(x-6)}$ 的定义域.

解 因为在对数中真数必须大于零,所以有 $x-6 > 0$,即 $x > 6$. 又因为在分式 $\frac{2}{\ln(x-6)}$ 中分母不能等于零,所以有 $\ln(x-6) \neq 0$,即 $x-6 \neq 1$,所以 $x \neq 7$. 因此函数 $y=\frac{2}{\ln(x-6)}$ 的定义域 D 为

$$D = (6, 7) \cup (7, +\infty).$$

习题 1-2

1. 求函数 $y=\sqrt{1-2x}$ 的定义域.

2. 求函数 $y=\frac{2}{1-x}$ 的定义域.

3. 求函数 $y=\frac{1}{x^2-3x}$ 的定义域.

4. 求函数 $y = \frac{1}{\ln(x-10)}$ 的定义域.
5. 求函数 $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$ 的定义域.
6. 求函数 $y = \frac{1}{x^2 - x} + \sqrt{2-x}$ 的定义域.

第三节 函数的性质

一、函数的有界性

让我们观察函数 $y = \sin x$ 的图形, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 函数 $y = \sin x$ 的曲线介于两条平行直线 $y = 1$ 和 $y = -1$ 之间, 如图 1-6 所示.

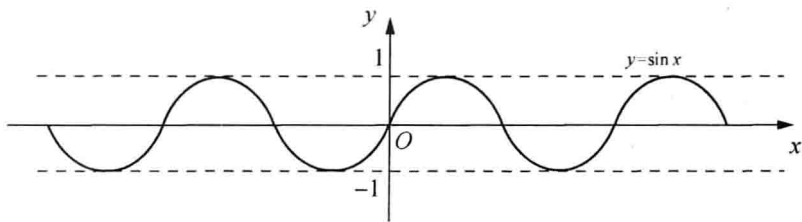


图 1-6

因此, 对函数 $y = \sin x$, 我们有不等式 $|\sin x| \leq 1$. 这个不等式告诉我们, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 函数值不可能大于 1 或小于 -1. 也就是说, 函数值的变动范围是有限的, 或者说是有限的.

定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个确定的正数 M , 使得对所有的 $x \in D$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 那么就称函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上是有界函数. 如果不存在这个正数 M , 那么就称函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上是无界函数.

注意不等式 $|f(x)| \leq M$ 中的绝对值符号, 它表明有界性是同时在上、下加以限制的. 也就是既要求有上界, 又要求有下界. 在上面例子中的函数 $y = \sin x$ 完全符合这一条件, 我们有

$$|\sin x| \leq 1.$$

$y = \sin x$ 的上界为 1, 下界为 -1. 因此函数 $y = \sin x$ 是有界函数.

再让我们讨论函数 $y = \frac{1}{x}$. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上没有上界, 但有下界, 下界等于 1.

因此, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上是无界函数.

二、函数的单调性

让我们观察函数 $y = x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的图形, 即 y 轴右边的图形. 当 x 增大时, 函数 y 总是增大, 如图 1-7 所示. 也就是说, 函数 $y = x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

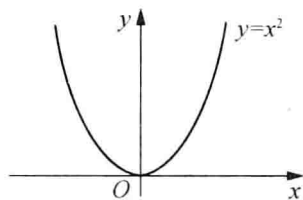


图 1-7

再让我们观察函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上的图形, 即 y 轴左边的图形. 当 x 增大时, 函数 y 总是减小, 如图 1-7 所示. 也就是说, 函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调减少的.

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上有定义, 若我们在区间 (a, b) 上任意取两点 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$ 时, 总是有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数在区间 (a, b) 上单调增加. 同理, 如果我们在区间 (a, b) 上任意取两点 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$ 时, 总是有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数在区间 (a, b) 上单调减少.

根据定义, 让我们对函数 $y=x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上任意取两点 x_1 和 x_2 , 使得 $x_1 < x_2$, 我们总有 $x_1^2 < x_2^2$, 如图 1-8 中的左图所示. 因此, 函数 $y=x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

再根据定义, 让我们对函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上任意取两点 x_1 和 x_2 , 使得 $x_1 < x_2$, 我们总有 $x_1^2 > x_2^2$, 如图 1-8 中的右图所示. 因此, 函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调减少的.

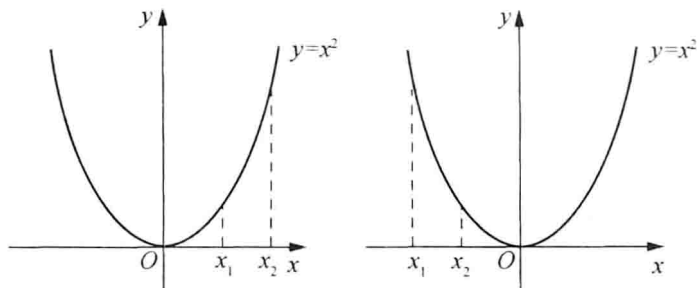


图 1-8

再根据定义, 让我们对函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上任意取两点 x_1 和 x_2 , 使得 $x_1 < x_2$, 显然我们不能保证总有 $x_1^2 < x_2^2$, 或总有 $x_1^2 > x_2^2$. 因此, 函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调的. 如果我们观察函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的图形, 我们会发现函数既有增大情形又有减小情形, 显然, 该函数在此区间上不可能是单调的.

单调增加函数和单调减少函数都称为单调函数.

三、函数的奇偶性

奇偶性是对函数图形对称性的描述. 若一个函数的图形关于原点对称, 则称此函数为奇函数. 例如, 函数 $y=x^3$, 它的图形关于原点对称, 如图 1-9 中左图所示, 因此, 函数 $y=x^3$ 为奇函数. 若一个函数的图形关于 y 轴对称, 则称此函数为偶函数. 例如, 函数 $y=x^2$, 它的图形关于 y 轴对称, 如图 1-9 中右图所示, 因此, 函数 $y=x^2$ 为偶函数.

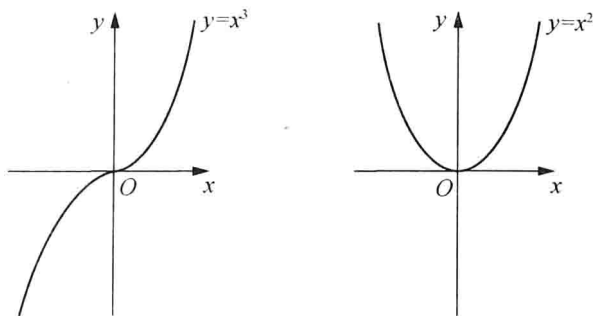


图 1-9

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 如果对于任意 $x \in D$, 总是有 $f(-x) = -f(x)$, 那么就称函数 $y=f(x)$ 为奇函数; 如果对于任意 $x \in D$, 总是有 $f(-x) = f(x)$, 那么就称函数 $y=f(x)$ 为偶函数.

四、函数的周期性

如果一个函数具有周期性, 那么这个函数曲线的形状就会有规律地重复出现. 例如函数 $y=\sin x$, 它的曲线的形状每间隔 2π 就会重复地出现, 如图 1-10 所示.

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 l , 对于任意 $x \in D$, 总是有 $f(x+l) = f(x)$, 那么就称函数 $y=f(x)$ 为周期函数, 称正数 l 为周期函数 $y=f(x)$ 的周期. 注意, 周期函数 $y=f(x)$ 的周期, 总是指其最小正周期.

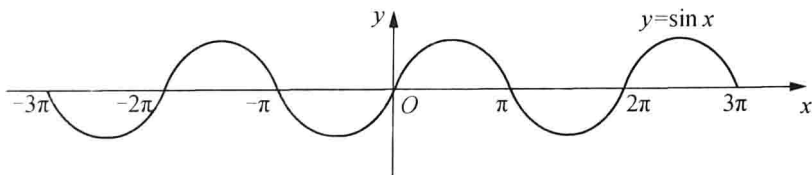


图 1-10

对函数 $y=\sin x$, 我们总有 $\sin(x+2\pi) = \sin x$. 因此根据定义, 函数 $y=\sin x$ 是周期函数, 2π 为函数 $y=\sin x$ 的周期.

习题 1-3

1. 判断下列函数的奇偶性.

- (1) $y=\sin 2x$;
- (2) $y=(x-2)(x+2)$;
- (3) $y=x^4-x^2-8$;
- (4) $y=\cos 2x$.

2. 指出下列函数哪些是周期函数, 并给出其最小正周期.

- (1) $y=\sin(x-3)$;
- (2) $y=\sin 2x$;